ランプ入力・定加速度入力に対する有限整定応答制御器の設計†

村田 弘 志*

A Design of Deadbeat Controller for a Ramp-Type or Acceleration Input

Hiroshi MURATA*

1. ま え が き

先に、インパルス応答系列で系を記述することにより、単なる行列演算で有限整定操作量を決定できる実用的な方法を提案し、ステップ状の目標値および外乱変化に対して閉ループ系を有限整定応答させる制御装置の設計法について発表した¹⁾。

いっぽう、プロセス制御におけるプログラム制御やサーボ系における飛翔体の追跡制御などのように、ランプ入力・加速度入力に有限整定応答させる制御装置の設計も重要である。従来のこのような問題に対する手法は、系をパルス伝達関数として把握し、その型と目標入力に応じて閉ループ伝達関数の形を適当に定めてデジタル制御装置を設計している^{2,3)}。しかし、パルス伝達関数の極や零点を正確に把握することは実プロセスでは困難であり、設計手順も容易でない。

本論文では、先に発表したステップ入力に対する手法を拡張し、ランプ状および加速度状目標値変化に対し系を有限整定応答させる操作量を求める方法を提案し、閉ループ系を有限整定応答させるデジタル制御装置の設計にも適用した。

2. 系の記述と問題の設定

入力が $u(t)$ 、出力が $x(t)$ で表わされる単一入出力系を考え、系の次数を n 、ゲインを K 、ステップ応答を $h(t)$ 、インパルス応答を $g(t)$ とする。サンプル周期を θ とし、 $y(i\theta) = y_i$ なる表現を用いれば、サンプル間隔内において入力 u_i が一定値をとるとき $i \geq 1$ なる i に対して次式が成立する。

$$x_i = \sum_{l=0}^i g_l u_{i-l} \quad (1)$$

ここに、 $g_i = h_i - h_{i-1}$ であり、 $i\theta$ と $(i-1)\theta$ 時点におけるステップ応答の増分からも決定できる。

問題は、系の動特性が(1)式で与えられるとき、ランプ状および定加速度状の目標値変化に対してこの系を有限整定応答させる操作量を求め、閉ループ系のデジタル制御装置 $D(z)$ を設計することである。

† 第 21 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 57・7)

* 広島工業大学 広島市外五日町 738

* Department of Electronic Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima (Received January 5, 1983)

(Revised April 2, 1983)

Keyword: deadbeat control, computer control, discrete system, design method

3. ランプ状目標値に対する有限整定操作量

ランプ関数を $\theta_a(t) = at$ (a : 定数) とし、Fig. 1 に示すように n 段の操作量によって系の出力を目標値に到達させ、 $n\theta$ 時点以降の値は目標値に有限整定させる。したがって、 x_i ($i=1 \sim n-1$) は未知であるが、 $x_i = \alpha(i+1)\theta$ ($i \geq n$) が成立している。また、 u_j ($j=0 \sim n-1$) が決定すべき操作量の系列である。

そこで、1 型の系の場合 $j \geq n$ なる j に対して $u_j = \alpha/K$ となるので、(1) 式において x_i ($i=n \sim 2n-1$) なる x について前記条件 $x_i = \alpha(i+1)\theta$ 、 $u_j = \alpha/K$ を代入して整理しマトリクス表示すれば、 $J\mathbf{u}_1 = \mathbf{I}_1$ となる。2 型以上の系の場合は、 n 段以降の入力系列は $u_j = 0$ ($j \geq n$) となることを考慮して同様に整理すると $J\mathbf{u}_2 = \mathbf{I}_2$ となる。したがって、次式によって有限整定操作量を求めることができる。

$$\mathbf{u}_m^l = J^{-1} \mathbf{I}_m^l = [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}]', \quad (l=1; m=1, 2) \quad (2)$$

ただし、(') は転置を表わし

$$\mathbf{I}_m^l = \alpha \begin{bmatrix} (n+1)\theta \\ (n+2)\theta - \frac{(l-m+1)}{K} g_1 \\ \vdots \\ (2n)\theta - \frac{(l-m+1)}{K} \sum_{p=1}^{n-1} g_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$J = \begin{bmatrix} g_n & g_{n-1} & \dots & g_1 \\ g_{n+1} & g_n & \dots & g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{2n-1} & \dots & \dots & g_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり、 $J \neq 0$ とする。また $\mathbf{u}_m^l$ 、 $\mathbf{I}_m^l$ の下つき、上つ

Fig. 1
Output response and control signal for ramp wise input

きの指数は、それぞれ入力の種類と制御対象の型を表わしている。\$l=1\$ はランプ入力、\$l=2\$ が次節に示す加速度入力の場合である。

つぎに、操作量に \$|u| \leq u_m (u_m > \alpha/K)\$ な制限がある場合、サンプル周期 \$\theta\$ が可変にできれば制御段数を系の次数に固定して、(2)式から得られる操作量が \$|u_i| \leq u_m (i=0 \sim n-1)\$ を満足するように \$\theta\$ を決定すればよい。

いっぽう、\$\theta\$ が定まっている場合は制御段数を増加することにより対処できる。いま操作量の制限のため制御段数が \$(n+k)\$ 段になったとし、最初の \$k\$ 段の操作量を \$|u_j| = u_m, u_m/\alpha = u_r (j=0 \sim k-1)\$ とおく。出力は \$x_1 \sim x_{n+k-1}\$ までの値が未知となるので、(1)式において \$x_i (i \geq n+k)\$ を考えれば

$$x_i = u_m \sum_{q=0}^{k-1} g_{i-q} + \sum_{l=k}^{i-1} g_{i-l} u_l \quad (5)$$

が成立する。上式で \$u_l (l=k \sim k+n-1)\$ が求める操作量であり、1 型の場合 \$u_j = \alpha/K (j=n+k \sim 2n-2+k)\$、2 型以上の場合 \$u_j = 0\$ とおいて整理すれば \$Ju_{mk}^l = I_{mk}^l\$ となるから

$$u_{mk}^l = J^{-1} I_{mk}^l = [u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+n-1}]' \quad (2')$$

として、入力に制限がある場合の操作量が求まる。ただし、\$I_{mk}^l\$ は次式で表わされる。

$$I_{mk}^l = \alpha \begin{bmatrix} (n+k+1)\theta - u_r \sum_{q=1}^k g_{n+q} \\ (n+k+2)\theta - u_r \sum_{q=2}^{k+1} g_{n+q} - \frac{(l-m+1)}{K} g_1 \\ \vdots \\ (2n+k)\theta - u_r \sum_{q=n}^{k+n-1} g_{n+q} - \frac{(l-m+1)}{K} \sum_{p=1}^{n-1} g_p \end{bmatrix} \quad (l=1; m=1, 2) \quad (3')$$

4. 定加速度状目標値に対する有限整定操作量

定加速度関数を \$\theta_a(t) = at^2/2\$ (\$a\$: 定数) とし、2 型の系について考える。Fig. 2 に示すように、\$n\$ 段の操作量で有限整定応答させるから、\$x_1 \sim x_{n-1}\$ は未知であるが \$x_i = a \{(i+1)\theta\}^2/2 (i \geq n)\$ 成立し、\$u_j = a/K (j \geq n)\$ となるはずである。そこで、前節と同様に (1)式において \$x_n \sim x_{2n-1}\$ なる出力について上記条件を代入して整理すれば \$Ju_2^l = I_2^l\$ となる。また、3 型以上の系では \$u_j = 0 (j \geq n)\$ を考慮すると \$Ju_3^l = I_3^l\$ となり次式から操作量が得られる。

$$u_m^l = J^{-1} I_m^l = [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}]', (l=2; m=2, 3) \quad (2'')$$

$$I_m^l = a \begin{bmatrix} \frac{\{(n+1)\theta\}^2}{2} \\ \frac{\{(n+2)\theta\}^2}{2} - \frac{(l-m+1)}{K} g_1 \\ \vdots \\ \frac{\{(2n)\theta\}^2}{2} - \frac{(l-m+1)}{K} \sum_{p=1}^{n-1} g_p \end{bmatrix} \quad (3'')$$

Fig. 2
Output response and control signal for acceleration wise input

なお、操作量に制限がある場合への対処も 3 節の場合と同様に取扱うことができ、(3')式における右辺のマトリクスの第 1 列の \$(n+k+i)\theta (i=1 \sim n)\$ を \$\{(n+k+i)\theta\}^2/2\$ とおき、\$\alpha\$ を \$a\$ と置き換えればよい。

5. デジタル制御装置の設計

ランプ状および定加速度状の目標値変化に対して、制御量を有限整定応答させるデジタル制御式 \$D(z)\$ を求める。Fig. 3 に示す離散値系において、\$\theta_0\$ は目標値、\$x\$ は制御量、\$e\$ は偏差、\$d\$ は外乱、\$H\$ は零次ホールド回路である。

ランプ入力については (2)式で \$\alpha=1.0\$ とおき、加速度入力については (2'')式で \$a=1.0\$ とおいておのの得られる操作量の系列 \$u = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}\$ を系に加えれば、制御量が有限整定応答するまでの値 \$x_i (i=1 \sim n-1)\$ は (1)式から計算できる。したがって、ランプ状の目標値に対して偏差は \$e_{mi}^l = (i+1)\theta - x_i, (m=1, 2)\$ となり、同様に加速度状目標値の場合 \$e_{mi}^2 = \{(i+1)\theta\}^2/2 - x_i, (m=2, 3; x_0=0)\$ となるから、偏差の系列は

$$e_m^l = \{e_{m1}^l, e_{m2}^l, \dots, e_{m(n-1)}^l\}, (l=1, 2) \quad (6)$$

となる。したがって、この \$e_m^l, e_m^2\$ が \$D(z)\$ の入力系列であればよい。

いっぽう、\$D(z)\$ の出力系列はランプ入力の場合、系が 1 型のとき (2)式の操作量 \$u_1^l (\alpha=1.0)\$ と \$u_j = 1/K (j \geq n)\$ が加わった操作量の系列 \$u_1^l\$ となり、2 型以上のときは \$u_j = 0\$ であるから (2)式の操作量のみの系列 \$u_2^l\$ となる。同様に、加速度入力の場合は 2 型の系に対して (2'')式の操作量と \$u_j = 1/K\$ が加わった \$u_2^2\$ が、3 型以上の系については (2'')式のみの操作

Fig. 3 Block diagram of the control system

Fig. 4 Comparison of responses for ramp wise change of desired value

量の系列 u_m^l が $D(z)$ の出力系列であればよい。以上のことから、 $D(z)$ の出力系列は次式で表わされる。

$$u_m^l = \left\{ u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, \frac{(l-m+1)}{K}, \dots, \frac{(l-m+1)}{K} \right\} \quad (7)$$

したがって、デジタル制御式は

$$D_m^l(z) = \frac{z(u_m^l)}{z(e_m^l)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} u_m^l z^{-j} + \frac{(l-m+1)z^{-n}}{K(1-z^{-1})}}{\sum_{i=0}^{n-1} e_m^l z^{-i}} \quad (8)$$

$$\left(l = \begin{cases} 1; & m=1, 2 \\ 2; & m=2, 3 \end{cases} \right)$$

となる。操作量に制限がある場合のデジタル制御式は(2')式の操作量を用いて同様に設計できる。

なお、(8)式で $l=0$ ($m=0, 1$) とおけば、文献 1) に示したステップ状目標値変化に対する制御式が得られる。

6. 数 値 例

ランプ状の目標値とし、伝達関数が $G(s) = K/s(s+1)$ で表わされる 1 型の系を考える。 $\theta=1$ 秒、 $K=1.0$ とすれば、 $g_1=0.367$, $g_2=0.767$, $g_3=0.914$ が得られる。まず、操作量に制限がない場合、(2)式で $n=2$, $l=1, m=1$ とすれば次式のように操作量が求まる。

$$u_1^1 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 & g_1 \\ g_3 & g_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4-g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.825 \\ 0.174 \end{bmatrix} \quad (9)$$

また、 $K=2$ とすれば $u_1^1 = [1.912, 0.087]'$ となる。この場合、(7)式に示した操作量の系列は $u_1^1 = \{1.912,$

$0.087, 0.5, \dots, 0.5\}$ となり、この u_1^1 に対する出力応答は(1)式から $x_1=1.407$ が得られるから偏差の系列は $e_1^1 = \{1.0, 0.592, 0, \dots, 0\}$ となる。したがって、デジタル制御式 $D_1^1(z)$ は(8)式から次式が求まる。

$$D_1^1(z) = \frac{z(u_1^1)}{z(e_1^1)} = \frac{1.912z - 1.825z^{-1} + 0.412z^{-2}}{1 - 0.407z^{-1} - 0.592z^{-2}} \quad (10)$$

この $D_1(z)$ による閉ループ系の応答と操作量を Fig. 4 に実線で示したが、2 段の操作量で完全有限整定応答している。同図で、 $t=5$ 秒に大きさが 1.0 のステップ状外乱 d を加えた場合の応答も示しているが、この場合の制御式は文献 1) で説明した外乱用の $D(z)$ を用いており、外乱検出後 2 段で有限整定している。

つぎに、操作量に制限がある場合を考える。 $K=1.0$ とし、操作量の制限を $u_m=2.0$ とする。 $\alpha=1.0$ とし、 $u_m=u_r$, $k=1$ とおき制御段数を 1 段増して 3 段とすれば、(2')式から有限整定操作量が次式のように得られる。

$$u_{11}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} 4-2g_3 \\ 5-2g_4-g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.671 \\ 0.328 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$u_1 > 2.0$ となっているからこの制限に対してはもう 1 段制御段数を増す必要がある。もし、 $u_m=2.5$ とすれば、 $u_{11}^1 = [1.987, 0.512]'$ となって条件を満たす。(11)式の操作量を用いる場合、応答は(1)式から、 $x_1=0.735$, $x_2=2.571$, 偏差は $e_{11}^1=2-x_1=1.265$, $e_{12}^1=3-x_2=0.482$ として得られるから、制御式 $D_{11}(z)$ は次式のようなになる。

$$D_{11}(z) = \frac{2.0 + 0.671z^{-1} - 2.342z^{-2} - 0.671z^{-3}}{1 + 0.265z^{-1} - 0.782z^{-2} - 0.483z^{-3}} \quad (12)$$

Fig. 4 には、この $D_{11}(z)$ による応答と操作量を点線で示しており、 $t=5$ 秒で大きさが 0.5 のステップ状外乱を加えた場合の応答も示している。制御段数は多くになっているが安定な応答特性が得られている。

7. ま と め

本手法は、系の記述が簡単であり、系の次数や型が未知であっても取扱うことができ、操作量の制限やむだ時間の存在なども制御段数の増加として容易に処理できる。また、系の過渡応答を測定すればよく、時間領域での設計により制御装置が容易に得られることは実用的に有用な方法と考えられる。

最後に、本研究を遂行するにあたって終始ご指導をいただいた九州大学工学部相良節夫教授に心から感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 村田弘志：インパルス応答を用いた有限整定応答制御装置の設計，電気学会論文誌，57-C9，67/74 (1982)
- 2) E. I. Jury (森他訳)：サンプル値制御，160/187，丸善 (1962)
- 3) 市川邦彦：体系自動制御理論，225/235，朝倉書店 (1966)