多項式入力に対する定常値を補償した代表根低次元モデル[†]

西 田 茂 人*・中 村 政 俊*

Dominant Eigenvalue Reduced-Order Model Compensating for a Steady-State Value for Polynomial Inputs

Shigeto NISHIDA* and Masatoshi NAKAMURA*

Methods for approximating a complex system of high order to a model of low order are referred to as reduced-order modelings. One of the ways of obtaining such an approximate model is to disregard the eigenvalues of the original system which are farthest from the origin and retain only dominant eigenvalues. The Davison model and the Marshall model are renowned reduced-order models by dominant eigenvalue technique. A defect of these methods is that a steady-state value of these models does not coincide with that of the original system for polynomial inputs.

In this paper, we consider a dominant eigenvalue reduced-order model which eliminates this defect. First, we derive the reduced-order model which compensates for a steady-state value for polynomial inputs. This model is the same as the Davison model or the Marshall model for special inputs. Next, we prove that the steady-state value of the model coincides with that of the original system for polynomial inputs. Finally, we show that the model, which involves differential terms of the inputs, can be applied to a control problem by using the polynomial input suboptimal control method.

Keyword : dominant eigenvalue, polynomial inputs, steady-state value, reduced-order model

1. ま え が き

大規模なシステムの推定や制御を行う場合、状態変数の次元が非常に大きいために、莫大な計算量が必要となってくる。このことは、オンライン計算によって処理する場合特に問題となるが、低次元モデル化手法^{1),2)}を用いることによってこの問題を回避すること

ができる。

線形システムの低次元モデル化手法のうち、時間領域に関するものとしては摂動法³⁾、集約化法⁴⁾、代表根法などがあり、 s 領域に関するものとしてはパデー近似法⁵⁾、モーメント法⁶⁾、連分数展開法⁷⁾、ラウス近似法⁸⁾などが提案されている。その中で、代表根法は原システムの減衰の速いモードを無視して、減衰の緩やかなモードを重視する方法であり、Davison 法⁹⁾や Marshall 法¹⁰⁾がよく知られている。Davison 法には、過渡応答におけるモデルの状態値が原システムの状態値とよく一致するが、モデルの定常値は原システムの定常値と必ずしも一致しないという欠点がある。これに対して、Marshall モデルはステップ入力に対する定常値が原システムの定常値と一致するという性質をもつ。しかし、多項式入力に対する定常値は一致しない。

多項式入力に対する定常値が原システムの定常値と一致する低次元モデルとしては、時間領域では Wilson らによる方法¹¹⁾や井上らによる方法¹²⁾があり、 s 領域ではパデー近似法などがある。Wilson らによる方法は、モデルの過渡的部分に関してはインパルス入力に対する低次元モデル化手法を用いており、それに原システムの定常値を補正項として加えている。この方法における低次元モデルは、入力の微分項を含んでいる。井上らは、1入力1出力系に対して微分項を含まない低次元モデルを提案している。またパデー近似法は、原システムと低次元モデルの伝達関数のテーラー展開係数を一致させる方法である。

本論文では、代表根法の立場から多項式入力に対する定常値が原システムの定常値と一致するモデルとして、代表根定常値補償モデルを提案する。モデルの過渡的部分に関しては原システムの代表根を用い、導出過程において補正項を加えることによって定常誤差をなくす改善を行っている。代表根定常値補償モデルは、サーボ系など多項式入力がかかるシステムの状態推定問題を考えるときに有用である。また、代表根定

[†] 第 20 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 56・7)

* 佐賀大学理工学部 佐賀市本庄町 1

Faculty of Science and Engineering, Saga University, Saga

(Received January 31, 1983)

(Revised May 26, 1983)

常値補償モデルには入力の微分項が含まれているが、多項式入力による準最適制御法¹³⁾を用いることによって、この低次元モデルを制御問題に適用することができる。

本論文の構成を以下に示す。第2章では、代表根定常値補償モデルの導出を行い、その特別な場合として Davison モデルや Marshall モデルが導出できることを示す。第3章では、多項式入力に対する代表根定常値補償モデルの定常値が原システムの定常値と一致することを証明する。第4章では、本方法が制御問題に適用できることを示す。第5章では、数値例を用いて本方法の有用性を示す。

2. 代表根定常値補償モデルの導出

本章では、代表根定常値補償モデルを、“原システム”、“正準システム”、“代表根正準システム”、“代表根原システム”、“低次元モデル”という変換手順に基づいて導出する。また、代表根定常値補償モデルの特別な場合として、Davison モデルや Marshall モデルを導出できることを示す。

高次元の線形システムを

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

とし、これを“原システム”と呼ぶ。ここで $\mathbf{x}(t)$ は n 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は r 次元入力ベクトル、 A と B は定数行列とする。

簡単のために、 A の固有値はすべて異なりその実部はすべて負とする。また、そのうち $n-m$ 個の固有値の実部は残り m 個の固有値の実部に対して著しく小さいという仮定、すなわち

$$\operatorname{Re}[\lambda(A_a)] \gg \operatorname{Re}[\lambda(A_b)] \quad (2)$$

を設ける。ここで A_a は m 個の固有値を、 A_b は $n-m$ 個の固有値を対角要素にもつ対角行列である。 A の固有ベクトルを列にもつ $n \times n$ 行列 U と固有値との間には

$$AU = U \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix} \quad (3)$$

が成立する。この U を用いて $\mathbf{x}(t)$ を変換すると

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t) \\ \mathbf{z}_b(t) \end{bmatrix} = U^{-1}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} U_a U_b \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

を得る。ここで $\mathbf{z}(t)$ は n 次元、 $\mathbf{z}_a(t)$ は m 次元、 $\mathbf{z}_b(t)$ は $n-m$ 次元ベクトル、 U_a と U_b はそれぞれ $n \times m$ 、 $n \times (n-m)$ 行列である。この $\mathbf{z}(t)$ を用いて(1)式の原システムを書き換えると

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_a(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t) \\ \mathbf{z}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (5)$$

$$W_a = [I_m \ 0] U^{-1} B, \quad W_b = [0 \ I_{n-m}] U^{-1} B$$

となり、これを“正準システム”と呼ぶ。ここで I_m 、 I_{n-m} はそれぞれ $m \times m$ 、 $(n-m) \times (n-m)$ の単位行列、 0 は適当な大きさの零行列を表わす。

(2)式の仮定より、 $\mathbf{z}_b(t)$ に関する応答の過渡項は $\mathbf{z}_a(t)$ に比して速やかに減衰する。そこで代表根法の考え方に従って、応答の速やかな項を無視して、減衰の緩やかな項だけを抽出する変換

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = E\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_a(t) \quad (6)$$

を行う。ここで E は

$$E = [I_m \ 0] \quad (7)$$

なる $m \times n$ 行列であり、 $\bar{\mathbf{z}}(t)$ は m 次元ベクトルである。この $\bar{\mathbf{z}}(t)$ に関する微分方程式は(5)式より

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = A_a \bar{\mathbf{z}}(t) + W_a \mathbf{u}(t), \quad \bar{\mathbf{z}}(0) = E\mathbf{z}(0) \quad (8)$$

で表わされ、これを“代表根正準システム”と呼ぶ。

(6)式の近似を $\mathbf{x}(t)$ の領域でみるため $\bar{\mathbf{z}}(t)$ に UE^T をかけてやるが、その際モデルの定常値が原システムの定常値と一致するように補正項を加えてやる。すなわち

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = UE^T \bar{\mathbf{z}}(t) + U_b \mathbf{z}_b^*(t) = U_a \bar{\mathbf{z}}(t) + U_b \mathbf{z}_b^*(t) \quad (9.1)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = UE^T \dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) + U_b \dot{\mathbf{z}}_b^*(t) = U_a \dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) + U_b \dot{\mathbf{z}}_b^*(t) \quad (9.2)$$

とする。ここで、 $\mathbf{z}_b^*(t)$ は入力が t^{l-1} までの多項式で表わされる場合の $\mathbf{z}_b(t)$ の定常値であり、 $\dot{\mathbf{z}}_b^*(t)$ はその微分値である。つぎに $\mathbf{z}_b^*(t)$ と $\dot{\mathbf{z}}_b^*(t)$ の値を求める。

(5)式より $\mathbf{z}_b(t)$ の解は

$$\mathbf{z}_b(t) = \exp(A_b t) \mathbf{z}_b(0) + \int_0^t \exp\{A_b(t-\tau)\} W_b \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (10)$$

である。 $\mathbf{u}(t)$ が t^{l-1} までの多項式で表わされているという仮定を用いて、(10)式右辺の積分項を l 回部分積分すると

$$\mathbf{z}_b(t) = \exp(A_b t) \mathbf{z}_b(0) - \sum_{i=0}^{l-1} \{A_b^{-i-1} W_b \mathbf{u}(t)^{(i)} - A_b^{-i-1} \exp(A_b t) W_b \mathbf{u}(0)^{(i)}\} \quad (11)$$

を得る。ここで $\mathbf{u}(t)^{(i)}$ は $\mathbf{u}(t)$ の t に関する i 階微分値を意味する。仮定より A_b の固有値の実部はすべて負であるから、(11)式の定常値は

$$\mathbf{z}_b^*(t) = - \sum_{i=0}^{l-1} A_b^{-i-1} W_b \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (12)$$

となり、(12)式の両辺を微分すれば

$$\dot{\mathbf{z}}_b^*(t) = - \sum_{i=1}^{l-1} A_b^{-i} W_b \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (13)$$

を得る。(9)式における $\bar{\mathbf{x}}(t)$ は、原システムの速やかな減衰項を無視した変数であり、 $\mathbf{x}(t)$ と同次元である。この $\bar{\mathbf{x}}(t)$ を状態変数としてもつシステムを“代表

根原システム”と呼ぶ。

つぎに、 n 次元の $\bar{\mathbf{x}}(t)$ の中から m 個の変数を取り出し低次元モデルをつくる。その場合

$$\text{rank } RU_a = m \quad (14)$$

を満たす範囲で、所望の変数を抽出するための $m \times n$ 行列 R を定義し、それを $\bar{\mathbf{x}}(t)$ にかけてやることによって低次元の変数

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = R\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (15)$$

を得る。また、 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ の式を導くために(9.1), (15)式より

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = (RU_a)^{-1}\hat{\mathbf{x}}(t) - (RU_a)^{-1}RU_b\mathbf{z}_i'(t) \quad (16)$$

を求めておく。(15), (9.2), (8), (16), (12), (13)式より、 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ に関する m 次元の式

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= RU_a\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) + RU_b\dot{\mathbf{z}}_i'(t) \\ &= RU_a\{\Lambda_a\bar{\mathbf{z}}(t) + W_a\mathbf{u}(t)\} + RU_b\dot{\mathbf{z}}_i'(t) \\ &= RU_a\Lambda_a(RU_a)^{-1}\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad - RU_a\Lambda_a(RU_a)^{-1}RU_b\mathbf{z}_i'(t) \\ &\quad + RU_aW_a\mathbf{u}(t) + RU_b\dot{\mathbf{z}}_i'(t) \\ &= F\hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=0}^{l-1} FRU_b\Lambda_b^{-i-1}W_b\mathbf{u}(t)^{(i)} \\ &\quad + RU_aW_a\mathbf{u}(t) - \sum_{i=1}^{l-1} RU_b\Lambda_b^{-i}W_b\mathbf{u}(t)^{(i)} \\ &= F\hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=0}^{l-1} K_i\mathbf{u}(t)^{(i)}, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = R\bar{\mathbf{x}}(0) \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。ここで

$$F = RU_a\Lambda_a(RU_a)^{-1} \quad (18)$$

$$K_0 = RU_aW_a + FRU_b\Lambda_b^{-1}W_b$$

$$K_i = FRU_b\Lambda_b^{-i-1}W_b - RU_b\Lambda_b^{-i}W_b \quad (i=1, 2, \dots, l-1) \quad (19)$$

である。(17)式によって表わされる低次元モデルが、代表根定常値補償モデルである。本方法は、導出過程において入力が t^{l-1} までの多項式で表わされるといふ仮定を設け、それに対する補正項を加えることによって定常誤差をなくす改善をしている。

一方、Davison モデルに関しても前述と同様な手順で導出することができる。代表根定常値補償モデルの場合と異なるのは代表根原システムの作り方である。すなわち Davison モデルの場合は(9)式における補正項 $\mathbf{z}_i'(t)$ と $\dot{\mathbf{z}}_i'(t)$ がない形

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = UET\bar{\mathbf{z}}(t) = U_a\bar{\mathbf{z}}(t) \quad (20.1)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = UET\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = U_a\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) \quad (20.2)$$

でもって $\bar{\mathbf{x}}(t)$ と $\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)$ を定義する。(15), (20), (8), (18)式より Davison モデルは

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = F\hat{\mathbf{x}}(t) + RU_aW_a\mathbf{u}(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = R\bar{\mathbf{x}}(0) \quad (21)$$

なる形で与えられる。すなわち、(17)式において

$$\begin{aligned} K_0 &= RU_aW_a \\ K_i &= 0 \quad (i \neq 0) \end{aligned} \quad (22)$$

の場合に相当する。

また、Marshall モデルに関しても同様に、代表根原システムの形を変えることによって得られる。この場合は(9)式の代りに

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = UET\bar{\mathbf{z}}(t) + U_b\mathbf{z}_i'(t) = U_a\bar{\mathbf{z}}(t) + U_b\mathbf{z}_i'(t) \quad (23.1)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = UET\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = U_a\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) \quad (23.2)$$

でもって $\bar{\mathbf{x}}(t)$ と $\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)$ を定義する。ここで補正項は $\bar{\mathbf{x}}(t)$ には入っているが $\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)$ には入っていない。また、 $\mathbf{z}_i'(t)$ は(9)式における補正項とは異なり、(12)式において $l=1$ のときの値

$$\mathbf{z}_i'(t) = -\Lambda_b^{-1}W_b\mathbf{u}(t) \quad (24)$$

である。このとき(13)式は零となる。すなわち、Marshall モデルの場合は、入力をステップ関数であると仮定したときの $\mathbf{z}_b(t)$ の定常値を補正項として加えている。(15), (23), (8), (18)式より Marshall モデル

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= F\hat{\mathbf{x}}(t) + \{RU_aW_a + FRU_b\Lambda_b^{-1}W_b\}\mathbf{u}(t), \\ \hat{\mathbf{x}}(0) &= R\bar{\mathbf{x}}(0) \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。すなわち、(17)式において

$$\begin{aligned} K_0 &= RU_aW_a + FRU_b\Lambda_b^{-1}W_b \\ K_i &= 0 \quad (i \neq 0) \end{aligned} \quad (26)$$

の場合に相当する。

このように、代表根定常値補償モデルの特別な場合として Davison モデルや Marshall モデルを導出することができる。すなわち、導出過程における代表根原システムの構成段階において、定常誤差をなくす補正を何も行っていないのが Davison モデルであり、ステップ入力に対して補正を行っているのが Marshall モデル、多項式入力に対して補正を行っているのが代表根定常値補償モデルである。したがって、(17)式と(25)式を比較するとわかるように、入力がステップ関数のとき、代表根定常値補償モデルと Marshall モデルは完全に一致するが、多項式入力の場合は一致しない。

3. 多項式入力に対する低次元モデルの定常誤差

本章では、サーボ系の状態推定などにおいて問題となる多項式入力に対する低次元モデルの定常誤差について述べる。ここで入力 $\mathbf{u}(t)$ は t^{l-1} までの多項式入力であると仮定する。

最初に多項式入力に対する原システムの定常値を求

める。原システムの解は、(1)式より

$$\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp\{A(t-\tau)\} B\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (27)$$

である。(27)式右辺の積分項を l 回部分積分すると

$$\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}(0) - \sum_{i=0}^{l-1} \{A^{-i-1}B\mathbf{u}(t)^{(i)} - A^{-i-1}\exp(At)B\mathbf{u}(0)^{(i)}\} \quad (28)$$

となる。仮定より A の固有値の実部はすべて負であるから、原システムの定常値は

$$\mathbf{x}^s(t) = - \sum_{i=0}^{l-1} A^{-i-1}B\mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (29)$$

である。(29)式は(3)、(5)式を用いると

$$\mathbf{x}^s(t) = - \sum_{i=0}^{l-1} \{U_a A_a^{-i-1} W_a + U_b A_b^{-i-1} W_b\} \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (30)$$

と書き換えることができる。(30)式が多項式入力に対する原システムの定常値である。つぎにこれと低次元モデルの定常値を比較する。

代表根定常値補償モデルの解は、(17)式より

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \exp(Ft)\hat{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \exp\{F(t-\tau)\} \sum_{i=0}^{l-1} K_i \mathbf{u}(\tau)^{(i)} d\tau \quad (31)$$

である。(31)式右辺の積分項を $l-i$ 回部分積分すると

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \exp(Ft)\hat{\mathbf{x}}(0) \\ &+ \sum_{i=0}^{l-1} \{ [-F^{-1}\exp\{F(t-\tau)\} K_i \mathbf{u}(\tau)^{(i)}]_0^t + \dots \\ &\dots + [-F^{-i+i}\exp\{F(t-\tau)\} K_i \mathbf{u}(\tau)^{(i-1)}]_0^t \} \\ &= \exp(Ft)\hat{\mathbf{x}}(0) - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{l-i} \{ F^{-j} K_i \mathbf{u}(t)^{(i+j-1)} \\ &- F^{-j}\exp(Ft) K_i \mathbf{u}(0)^{(i+j-1)} \} \quad (32) \end{aligned}$$

となる。仮定より、 F の固有値の実部はすべて負であるから、(32)式の定常値は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^s(t) &= - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{l-i} F^{-j} K_i \mathbf{u}(t)^{(i+j-1)} \\ &= -F^{-1} K_0 \mathbf{u}(t) \\ &\quad - F^{-2} K_0 \mathbf{u}(t)^{(1)} - \dots - F^{-l} K_0 \mathbf{u}(t)^{(l-1)} \\ &\quad - F^{-1} K_1 \mathbf{u}(t)^{(1)} - \dots - F^{-l+1} K_1 \mathbf{u}(t)^{(l-1)} \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad - F^{-1} K_{l-1} \mathbf{u}(t)^{(l-1)} \\ &= - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^i F^{-i+j-1} K_j \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (33) \end{aligned}$$

となる。ここで(19)、(18)式を用いて $\mathbf{u}(t)^{(i)}$ の係数を変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i F^{-i+j-1} K_j &= F^{-i-1} \{ R U_a W_a + F R U_b A_b^{-1} W_b \} \\ &\quad + \sum_{j=1}^i F^{-i+j-1} \{ F R U_b A_b^{-j-1} W_b \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- R U_b A_b^{-j} W_b \} \\ &= F^{-i-1} R U_a W_a + F^{-i} R U_b A_b^{-1} W_b \\ &\quad + \sum_{j=1}^i \{ F^{-i+j} R U_b A_b^{-j-1} W_b \\ &\quad - F^{-i+j-1} R U_b A_b^{-j} W_b \} \\ &= R U_a A_a^{-i-1} W_a + R U_b A_b^{-i-1} W_b \quad (34) \end{aligned}$$

となる。よって、(34)式を(33)式に代入すると、多項式入力に対する代表根定常値補償モデルの定常値

$$\hat{\mathbf{x}}^s(t) = - \sum_{i=0}^{l-1} \{ R U_a A_a^{-i-1} W_a + R U_b A_b^{-i-1} W_b \} \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (35)$$

を得る。(30)、(35)式より定常誤差は

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}}^s(t) - R \mathbf{x}^s(t) = \mathbf{0} \quad (36)$$

となり、低次元モデルの定常値は原システムの定常値と完全に一致する。

一方、Davison モデルの定常値は、(33)、(22)、(18)式より

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^s(t) &= - \sum_{i=0}^{l-1} F^{-i-1} R U_a W_a \mathbf{u}(t)^{(i)} \\ &= - \sum_{i=0}^{l-1} R U_a A_a^{-i-1} W_a \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (37) \end{aligned}$$

である。(30)、(37)式より定常誤差は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \hat{\mathbf{x}}^s(t) - R \mathbf{x}^s(t) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} R U_b A_b^{-i-1} W_b \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (38) \end{aligned}$$

となる。この誤差は、入力がステップ関数であっても 0 とはならず、定常誤差は常に残る。

また、Marshall モデルの定常値は、(33)、(26)、(18)式より

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^s(t) &= - \sum_{i=0}^{l-1} F^{-i-1} \{ R U_a W_a \\ &\quad + F R U_b A_b^{-1} W_b \} \mathbf{u}(t)^{(i)} \\ &= - \sum_{i=0}^{l-1} \{ R U_a A_a^{-i-1} W_a \\ &\quad + F^{-i} R U_b A_b^{-1} W_b \} \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (39) \end{aligned}$$

である。(30)、(39)式より定常誤差は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \hat{\mathbf{x}}^s(t) - R \mathbf{x}^s(t) \\ &= \sum_{i=1}^{l-1} \{ R U_b A_b^{-i-1} W_b - F^{-i} R U_b A_b^{-1} W_b \} \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (40) \end{aligned}$$

となる。この場合、多項式入力に対しては定常誤差が残るが、ステップ入力に対しては定常誤差が残らない。

4. 代表根定常値補償モデルの制御問題への適用

本章では、多項式入力による準最適制御法¹³⁾を用い

ることによって、入力の微分項を含む代表根定常値補償モデルが制御問題に適用できることを示す。

原システム

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (41)$$

に対する評価関数を

$$J = \int_0^T \{\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{H}\mathbf{u}(t)\} dt \quad (42)$$

とする。ここで $\mathbf{Q}$ は $n \times n$ の半正定値行列、 $\mathbf{H}$ は $r \times r$ の正定値行列である。つぎに

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \quad (43)$$

を満たす $\mathbf{R}$ と $\hat{\mathbf{Q}}$ を求める。すなわち、状態変数 $\mathbf{x}(t)$ の中で (42) 式に関与している部分だけを抽出するような低次元モデルを構成する。たとえば、 $\mathbf{Q} = \text{diag}[q, 0, \dots, 0]$ の場合、評価関数には $\mathbf{u}(t)$ と $\mathbf{x}(t)$ の第1成分 $x_1(t)$ のみ含まれているので、 $x_1(t)$ を近似する低次元モデルを構成し ($\mathbf{R} = [1, 0, \dots, 0]$), $\hat{\mathbf{Q}} = q$ とする。そのとき、低次元モデルに対する評価関数

$$\hat{J} = \int_0^T \{\hat{\mathbf{x}}(t)^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{H}\mathbf{u}(t)\} dt \quad (44)$$

を得る。また、代表根定常値補償モデルは

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=0}^{l-1} \mathbf{K}_i \mathbf{u}(t)^{(i)} \quad (45)$$

である。これより (44), (45) 式に対する制御問題を考える。

まず最初に、入力 $\mathbf{u}(t)$ を有限個の時間多項式で表わす。すなわち、 $\mathbf{u}(t)$ の第 i 要素 $u_i (i=1, 2, \dots, r)$ を

$$u_i = c_{i,1} + c_{i,2}t + \dots + c_{i,j}t^{j-1} + \dots + c_{i,l'}t^{l'-1} \quad (46)$$

なる $t^{l'-1}$ までの多項式で表現する。ここで、 $l' \geq l$ とする。つぎに、行列

$$\begin{aligned} D(t) &= \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{d}(t)^T \\ \mathbf{d}(t) &= [1, t, \dots, t^{l'-1}]^T \end{aligned} \quad (47)$$

$$\mathbf{c} = [c_{1,1}, \dots, c_{1,l'}, \dots, c_{r,1}, \dots, c_{r,l'}]^T \quad (48)$$

を定義する。ここで、 $D(t)$ は $r \times rl'$ 行列、 $\mathbf{d}(t)$, $\mathbf{c}$ はそれぞれ l' , rl' ベクトルであり、“ $\otimes$ ” は行列のクロネッカ積を意味する。(47), (48) 式を定義すると、(46) 式で表わした入力 $\mathbf{u}(t)$ は

$$\mathbf{u}(t) = D(t)\mathbf{c} \quad (49)$$

なる形で表現することができる。そこでこの準最適制御法における問題は、(49) 式 of 多項式入力を (45) 式のシステムに加えたとき、(44) 式の評価関数が最小になるような多項式係数 $\mathbf{c}$ を決定することである。

上述の考え方に基づいて計算すると多項式係数 $\mathbf{c}$ は

$$\mathbf{c} = -\mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^T \hat{\mathbf{x}}(0) \quad (50)$$

となる。ここで

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{S}_1 = -\{\hat{\mathbf{Q}} - \exp(\mathbf{F}T)^T \hat{\mathbf{Q}} \exp(\mathbf{F}T)\}$$

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \quad (51)$$

$$\mathbf{S}_3 = \mathbf{E}_1^T \mathbf{S}_1 \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{H} \otimes \mathbf{V} \quad (52)$$

$$\mathbf{E}_1 = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{l'-i} \mathbf{F}^{-j} \mathbf{K}_i D(0) \mathbf{W}^{i+j-1} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{l'-i} \sum_{k=i+j}^{l'} (-\mathbf{F}^T)^{i+j-k-1} \{\hat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^{-j} \mathbf{K}_i D(0) \\ - \exp(\mathbf{F}T)^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^{-j} \mathbf{K}_i D(T)\} \mathbf{W}^{k-1} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{l'-i} \sum_{\alpha=0}^{l-1} \sum_{\beta=1}^{l'-\alpha} \{(F^{-j} \mathbf{K}_i)^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^{-\beta} \mathbf{K}_\alpha\} \otimes \{(W_0^{i+j-1})^T \mathbf{V} W_0^{\alpha+\beta-1}\} \quad (56)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T & T^2/2 & \dots & T^{l'}/l' \\ T^2/2 & & & \vdots \\ \vdots & & & T^{2l'-1}/2l'-1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{I}_r \otimes \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & \\ 0 & & & l'-1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

である。得られた入力を (45) 式に加えたときの評価値は

$$\hat{J} = \hat{\mathbf{x}}(0)^T \{\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^T\} \hat{\mathbf{x}}(0) \quad (59)$$

となる。

このように、入力の微分項が含まれるシステムでも多項式入力による準最適制御法を用いることによって制御問題に適用できる。また、モデルに含まれる入力の微分項の数が増加すれば計算時間は増加するが、その増加よりも低次元化によって減少する計算時間のほうが大きく、原システムに対する制御問題を解くより計算時間の短縮になっている。

5. 数値例

本章では、第2章で導出した各代表根低次元モデルの定常値と原システムの定常値を比較するために数値例を行う。

原システムを

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -2.3 & -3.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

とする。このとき、 $\mathbf{A}$ の固有値は -0.1 , -1 , -2 である。その中で代表根 -0.1 を保持し、 $\mathbf{x}(t)$ の第1成分 $x_1(t)$ を近似する ($\mathbf{R} = [1 \ 0 \ 0]$) 代表根低次元モデルを考える。まず、(17), (18), (19) 式より、 $l=2$, すなわち t までの多項式入力に対する定常値を補償する代表根定常値補償モデルは

Fig. 1 Response for $u(t)=1+t$

$$\dot{x}(t) = -0.1\dot{x}(t) + 0.5u(t) - 0.75\dot{u}(t)$$

となる。つぎに (21), (18) 式より Davison モデルは

$$\dot{x}(t) = -0.1\dot{x}(t) + 0.5848u(t)$$

となり, (25), (18) 式より Marshall モデルは

$$\dot{x}(t) = -0.1\dot{x}(t) + 0.5u(t)$$

となる。そこで, 多項式入力

$$u(t) = 1+t$$

を加えたときの原システムと各代表根低次元モデルの応答を Fig. 1 に示す。ここで “model” は代表根定常値補償モデルである。これより, 多項式入力に対する Davison モデルと Marshall モデルの応答は原システムの応答とかなりのくい違いを生じているが, 代表根定常値補償モデルの応答はよく一致していることがわかる。またこの場合, 各低次元モデルを解く計算時間はほぼ等しく, 原システムを解く計算時間の約 0.47 倍である。

6. む す び

本論文では, 代表根法の立場から多項式入力に対する定常値が原システムの定常値と一致するモデルとして, 代表根定常値補償モデルを提案した。このモデルの特別な場合は, Davison モデルや Marshall モデルとなる。つぎに, 低次元モデルを状態推定に用いる場合に問題となる定常誤差について, 多項式入力に対して本モデルの定常値は原システムの定常値と一致することを証明した。また, 代表根定常値補償モデルには

入力の微分項が含まれているが, 多項式入力による準最適制御法を用いることによってこの低次元モデルを制御問題に適用できることを示した。

参 考 文 献

- 1) 相良: システムの低次元モデル化について, 第 16 回 SICE 学術講演会予稿集, 1/2 (1977)
- 2) 前田: 大規模な線形システムの低次元モデルとシステム構造, システムと制御, **22-11**, 655/664 (1978)
- 3) P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley, Jr. and P. Sannuti: Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory—An Overview, *Automatica*, **12-2**, 123/132 (1976)
- 4) M. Aoki: Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-13-3**, 246/253 (1968)
- 5) T. C. Hsia: On the Simplification of Linear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-17-3**, 372/374 (1972)
- 6) M. Lal and R. Mitra: Simplification of Large System Dynamics Using a Moment Evaluation Algorithm, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-19-5**, 602/603 (1974)
- 7) C. F. Chen: Model Reduction of Multivariable Control Systems by Means of Matrix Continued Fractions, *International J. of Control*, **20-2**, 225/238 (1974)
- 8) M. F. Hutton and B. Friedland: Routh Approximations for Reducing Order of Linear, Time-Invariant Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-20-3**, 329/337 (1975)
- 9) E. J. Davison: A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-11-1**, 93/101 (1966)
- 10) S. A. Marshall: An Approximate Method for Reducing the Order of a Linear System, *Control*, **10**, 642/643 (1966)
- 11) D. A. Wilson and R. N. Mishra: Optimal Reduction of Multivariable Systems, *International J. of Control*, **29-2**, 267/278 (1979)
- 12) 井上, 岩井, 檜崎: 誤差最小化法による多項式形入力に対するモデルの最適低次元化, 計測自動制御学会論文集, **18-5**, 443/449 (1982)
- 13) 西田, 中村: 多項式入力による線形系の準最適制御法に関する計算時間と近似誤差, 第 14 回確率システムシンポジウム講演論文集, 32/34 (1982)