線形時変解析的システムの可制御性†

久永公紀*・高橋進一*

Controllability in Linear Time-Varying Analytic Systems

Kiminori HISANAGA* and Shin-ichi TAKAHASHI*

1. ま え が き

線形時変解析的システムとは、状態方程式における各係数行列の要素が解析関数であるような線形時変システムのことである。このシステムに関する構造解析の重要性は、多くの線形時変システムがこのシステムに含まれ、または近似可能である点に存する。線形時変解析的システムの可制御性についてはすでにいくつかの研究^{1), 2)}があるが、本文では可制御部分空間の概念を導入し、より詳細かつ統一的にその性質を検討する。

2. 対象とするシステム

本文で考察するシステムは、ある有限時間区間 J で定義された状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (1b)$$

で記述される線形時変解析的システムとする。ここに $x(t), u(t), y(t)$ はそれぞれ状態、入力、出力ベクトルを表わし、 $A(t), B(t), C(t)$ は解析関数を要素とする関数行列である。なお、ここでいう解析関数とは、定義された区間 J 内の任意の点においてテイラー級数に展開可能な関数のことである。また、以後現れるすべての時刻は区間 J 内の時刻とする。

初期状態 $x(t_0) = x_0$ に対する微分方程式 (1a) の解は、

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 $\Phi(t, \tau)$ は行列微分方程式

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau), \Phi(\tau, \tau) = I \quad (3)$$

の解として定義される状態遷移行列であり、つぎの i) ~ iii) の性質をもつ、i) $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$, ii) $\Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1)$, iii) $A(t)$ の要素が解析関数ならば、 $\Phi(t, \tau)$ の要素も解析関数である。

なお、可制御性の定義については文献 3) を参照されたい。

3. 可制御性に関する考察

従来、線形時変解析的システムを含む一般の線形時変システムの可制御性の判定条件としては、つぎの命題が基本である。

【命題】⁴⁾ (1) 式のシステムにおいて、時刻 t_0 で状態 x_0 が可制御であるための必要十分条件は、 $x_0 \in I_m[W(t_0, t_1)]$ となるような時刻 $t_1 (> t_0)$ が存在することである。ここに $W(t_0, t_1)$ は、次式で定義される可制御性のグラム行列である。

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B'(t)\Phi'(t_0, t)dt \quad (4)$$

(' は転置を表わす)

Remark 1: $x(t_0) \in I_m[W(t_0, t_1)]$ ならば、 $x(t_1) = 0$ とすることができるような適当な入力が存在する⁴⁾。

この命題では、状態遷移行列などより作られるグラム行列の性質により判定条件を与えている。しかしながら、(3) 式の行列微分方程式の解である状態遷移行列を求めることは一般に困難である。そこで本文では、時不変系における可制御部分空間⁵⁾を線形時変解析的システムに拡張し、状態遷移行列を求めることなく (1) 式システムの可制御性を判定する方法を提案する。

【定義】 次式で定義される $\Psi(s)$ を、 $(A(t), B(t))$ の時刻 s における可制御部分空間という。

$$\Psi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} I_m \left[\left(A(t) - \frac{d}{dt} \right)^{i-1} B(t) \Big|_{t=s} \right] \quad (5)$$

可制御部分空間について、つぎの補題が成り立つ。

【補題 1】 $t_1 > t_0$ なる任意の時刻 t_0, t_1 に対して次

† 第 25 回自動制御連合講演会で発表 (昭 57・11)

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Engineering, Keio University, Yokohama

(Received April 20, 1983)

(Revised June 6, 1983)

Keyword: linear time-varying analytic systems, controllability, controllable subspace

式が成立する。

$$\Psi(t_0) = \text{Im}[W(t_0, t_1)] \quad (6)$$

(証明) $W(t_0, t_1)$ は対称行列だから、(6)式は次式と等価である。

$$(\Psi(t_0))^{\perp} = \text{Ker}[W(t_0, t_1)] \quad (7)$$

(($\cdot$) $^{\perp}$ は部分空間・の直交補空間を表わす)

もし、 $x \in \text{Ker}[W(t_0, t_1)]$ ならば、

$$x'W(t_0, t_1)x = \int_{t_1}^{t_0} |B'(t)\Phi'(t_0, t)x|^2 dt = 0 \quad (8)$$

である。よって次式を得る。

$$x'\Phi(t_0, t)B(t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (9)$$

$d\Phi(t_0, t)/dt = -\Phi(t_0, t)A(t)$ であることを用いると、(9)式を $t=t_0$ でつぎつぎと微分すれば $i=1, 2, \dots$ に対し

$$x' \left(\left(A(t) - \frac{d}{dt} \right)^{i-1} B(t) \Big|_{t=t_0} \right) = 0 \quad (10)$$

を得る。式(10)より

$$\begin{aligned} x &\in \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\text{Im} \left[\left(A(t) - \frac{d}{dt} \right)^{i-1} B(t) \Big|_{t=t_0} \right] \right)^{\perp} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \text{Im} \left[\left(A(t) - \frac{d}{dt} \right)^{i-1} B(t) \Big|_{t=t_0} \right] \right)^{\perp} \\ &= (\Psi(t_0))^{\perp} \end{aligned} \quad (11)$$

となり次式が得られる。

$$\text{Ker}[W(t_0, t_1)] \subset (\Psi(t_0))^{\perp} \quad (12)$$

もし、 $x \in (\Psi(t_0))^{\perp}$ ならば上のステップを逆にたどり(11)式より(10)式を得る。ところで解析関数は、定義された有限区間 J 内のある区間で零ならば、区間 J で零に等しいという性質をもつ。よって $x'\Phi(t_0, t)B(t)$ を $t=t_0$ でテイラー級数に展開したときの第 i 項が

$$\frac{1}{(i-1)!} x' \left(\left(A(t) - \frac{d}{dt} \right)^{i-1} B(t) \Big|_{t=t_0} \right) (t-t_0)^{i-1}$$

であることと(10)式より(9)式が導びかれる。(9)式より(8)式が得られ、 $W(t_0, t_1)$ は準正定値行列だから、 $x \in \text{Ker}[W(t_0, t_1)]$ となる。ゆえに

$$(\Psi(t_0))^{\perp} \subset \text{Ker}[W(t_0, t_1)] \quad (13)$$

であり、(12)、(13)式より(7)式すなわち(6)式が成立することが証明された。■

【補題 2】 任意の時刻 t_0, t_1 に対し次式が成立する。

$$\Psi(t_0) = \Phi(t_0, t_1)\Psi(t_1) \quad (14)$$

(証明) 補題 1 の証明より、 $x'\Phi(t_0, t)B(t) = 0$ は $x \in (\Psi(t_0))^{\perp}$ と等価である。また、 $t=t_1$ でつぎつぎと微分することにより、 $x'\Phi(t_0, t)B(t) = 0$ は $x \in (\Phi(t_0, t_1)\Psi(t_1))^{\perp}$ と等価であることも同様に示すことができる。よって、 $\Psi(t_0) = \Phi(t_0, t_1)\Psi(t_1)$ である。■

これらの命題および補題より、つぎの定理を得る。

《定理 1》 (1)式のシステムにおいて、時刻 t_0 で状態 x_0 が可制御であるための必要十分条件は、 $x_0 \in \Psi(t_0)$ となることである。

《定理 2》 (1)式のシステムが可制御であるための必要十分条件は、ある任意の時刻 t_0 において $(\Psi(t_0))^{\perp} = 0$ となることである。

(定理 1 と 2 の証明) 命題と補題より明らか。■

Remark 2: 定理 1 で与えたある時刻でのある状態の可制御性の判定条件は、文献 1), 2) の可制御行列による解析方法では扱えなかった問題である。また定理 2 は文献 1) の条件と比べて、定義された時間区間内の任意の一点において判定可能であるという特徴をもつ。

以上の議論より、線形時変解析的システムはつぎの性質を有する。ただし、性質 iii) は文献 1) でも指摘されている。

- i) $x(t_0) \in \Psi(t_0)$ ならば、任意の $\delta > 0 (t_0 + \delta \in J)$ に対して $x(t_0 + \delta) = 0$ とすることができるような適当な入力が存在する。
- ii) 時刻 t における可制御な状態の張る部分空間の次元、すなわち $\dim \{\Psi(t)\}$ は、 t の値にかかわらず一定である。
- iii) システムがある時刻で可制御であることと、システムが可制御であることは等価である。

4. あとがき

可制御部分空間の概念を通して、線形時変解析的システムの可制御性に関する統一的な考察を行った。可観測性については、 $(C(t), A(t))$ の時刻 s における不可観測部分空間 $\Theta(s)$ を

$$\Theta(s) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Ker} \left[\left(\left(A'(t) + \frac{d}{dt} \right)^{i-1} C'(t) \Big|_{t=s} \right)' \right]$$

と定義することにより、本文と同様理論展開が可能である。

参考文献

- 1) L. M. Silverman and H. E. Meadows: Controllability and Observability in Time-Variable Linear Systems, SIAM J. on Control. 5-1, 64/73(1967)
- 2) A. Chang: An Algebraic Characterization of Controllability, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-10-1, 112/113(1965)
- 3) 有本 卓: 線形システム理論, 83/86, 産業図書(1974)
- 4) R. W. Brockett: Finite Dimensional Linear Systems, 74/91, Wiley(1970)
- 5) W. M. Wonham: Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, 2nd ed., Springer-Verlag, N. Y. (1979)