可変ロープ長振子の振動制御†

大 平 昇*・久 村 富 持*

Control of Simple Pendulum with Variable Rope Length

Noboru OHIRA*, Tomiji HISAMURA*

1. ま え が き

天井走行クレーンやアンローダなどの荷揺れ制御に関しては、これまで自動運転を目的として多くの研究^{1)~6)}がなされてきた。それらでは、ロープ長一定と問題が単純化されていたり、また、ロープ長可変の場合にも大型コンピュータによる複雑な最適制御計算が不可避であった。

本論文は、可変ロープ長振子の制御問題の基礎として、支点が静止あるいは等速運動する単振動のロープ長をマイコンで制御して、この振動を抑制する方策を求めることを目的とする。まず、(1)この系の動特性ならびに評価指数を求めて最適制御問題を定式化し、つぎに(2)この Bang Bang 制御解の切り換え時刻と初期条件との関係を大型コンピュータで計算して、マイコンに記憶させる。そして(3)この初期状態検出と開ループ制御を繰返して振動を抑制する。終りに(4)数値計算結果と試作シミュレータを用いた実験による制御効果を比較検討する。

2. システムの記述と評価指数

Fig. 1 の可変ロープ長振子を考え、以下の仮定をおく。

Fig. 1 Simple pendulum with variable rope length

† 第 22 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 58・7)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received April 15, 1983)

(Revised June 8, 1983)

Keyword: crane, optimal control

I) 荷は質量 m の質点とし、ロープの質量は無視する。II) 振子の振動において、空気の抵抗や支点での抵抗などによる減衰効果は無視できる。III) 振動は x - y 面内のみに生ずる。

2.1 動特性

F をロープの張力とすれば、質点に働く力は

$$F_x = -F \sin \theta, \quad F_y = mg - F \cos \theta,$$

また、座標に関しては $x = l \sin \theta + X$, $y = l \cos \theta$ が成立するから、これらの式から質点の運動エネルギーと (θ, l) 方向の一般化力を求めて Lagrange の運動方程式を用いれば、

$$\ddot{\theta} + (2\dot{l}/l)\dot{\theta} + (g/l) \sin \theta + \dot{X} \cos \theta / l = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{l} - l\dot{\theta}^2 + \dot{X} \sin \theta - g \cos \theta + F/m = 0 \quad (2)$$

を得る。(2)式はロープの張力 F を与える。トロリの速度 $\dot{X}$ が 0 あるいは定値のとき、(1), (2)式は非線形方程式

$$\ddot{\theta} + (2\dot{l}/l)\dot{\theta} + (g/l) \sin \theta = 0 \quad (\text{注 } 1) \quad (3)$$

$$F = m(g \cos \theta + l\dot{\theta}^2 - \ddot{l}) \quad (4)$$

となる。以下では $x \triangleq (x_1, x_2, x_3)^T \triangleq (\theta, \dot{\theta}, l)^T$, u (制御) $\triangleq \dot{l}$ とおく。入力 $u(t)$ が拘束条件 $u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$ のもとで Bang Bang 型になったときには $\dot{l}$ が大きな値をとるため、ロープがたるまないための条件

$$F/m = g \cos \theta + l\dot{\theta}^2 - \ddot{l} \geq 0 \quad (5)$$

が満足されなくなる。これについては後に検討する。さらに、初期条件を加え、以下の式を得る。

$$\text{状態方程式; } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(2x_2u + g \sin x_1)/x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{初期条件; } x(t_0) = (\theta_0, \dot{\theta}_0, l_0)^T \quad (7)$$

$$\text{制御の拘束条件; } u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (8)$$

2.2 評価指数

制御時間 $[t_0, t_1]$ (t_1 は有限な固定終端時刻^(注2)) 内に拘束(8)と終端条件 $x_3(t_1) = l_1$ のもとで可能な限り振動を抑制する制御を求める。この系は外力によるロープ長の制御が加わるため非保存系であり、振動抑

(注 1) $l(t)$ が正弦波で θ が小のときは、(3)式は Mathieu 方程式に帰着される。

(注 2) 最短時間制御問題とすると計算上困難な点が生じ易いので、このようにした。

制のためには制御後の振子システムの全エネルギー

$$\begin{aligned} E(t_1) &= [-mgl \cos \theta + ml^2 \dot{\theta}^2 / 2]_{t=t_1} \\ &\doteq -mgl_1 + mgl_1 \{ \theta^2(t_1) + (l_1/g) \dot{\theta}^2(t_1) \} / 2 \end{aligned} \quad (9)$$

を最小とすればよいから、評価指数 J' として

$$J' = x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) / \omega^2 \quad (10)$$

を考える ($\omega \triangleq \sqrt{g/l_1}$). この Mayer 型の J' に終端条件 $x_3(t) = l_1$ をペナルティ $Q(x_3(t) - l_1)^2 / 2$ ($Q > 0$) として付加し、さらにこれを Lagrange 型に変換すれば、

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t)) dt \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L(x, u) &= 2x_1x_2 - \{2gx_2 \sin x_1 / (\omega^2 x_3)\} \\ &\quad + \{-4x_3^2 / (\omega^2 x_3) + Q(x_3 - l_1)\} u \end{aligned} \quad (11')$$

を最小にする問題と等価になる。

3. 制御方策と計算結果

この問題において、制御時間内にロープの張力 F を通して振子システムに与えられるエネルギー E_l は、 $\dot{l}(t_0) = 0, \dot{l}(t_1) = 0$ とするとき、(4)式から、

$$\begin{aligned} E_l &= -\int_{t_0}^{t_1} F dl = -\int_{t_0}^{t_1} F l \dot{l} dt \\ &\doteq -m \left\{ g(l_1 - l_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\theta}^2 l \dot{l} dt \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

である。この第 1 項は定値である。また、運動の接線方向の成分が系に与えるエネルギー

$$E_\theta = -\int_{t_0}^{t_1} mg \sin \theta \cdot \dot{\theta} dt$$

は l の変化の影響を受けない。このため、振子系の全エネルギーを変化させるのは (12) 式第 2 項であって、これは遠心力成分が $\dot{l}$ と関係しながら与えるエネルギーである。このことと終端条件より、全エネルギーを減小させるためには、 $l\dot{\theta}^2$ が大きい場合は $\dot{l} > 0$ とし、 $l\dot{\theta}^2$ が小さい場合は $\dot{l} < 0$ とすればよいことが予想される。

3.1 計算方法

ここでは、まず (6) ~ (8), (11) 式で定式化される最適制御問題を、最大原理、微分動的計画法、Järmark の *c. c. p.* 法を利用した Sakawa らの方法⁷⁾ によって解く (注 3)。この場合、 x の随伴状態を $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ 、ハミルトニアンを H とすれば、以下の式を得る。

$$H = L + x_2\phi_1 - (2x_2u + g \sin x_1)\phi_2/x_3 + u\phi_3 \quad (13)$$

$$K = H + (c/2)(u - u^{i-1})^2$$

$$\begin{aligned} &= (2x_1 + \phi_1)x_2 - (2x_2/\omega^2 + \phi_2) \\ &\quad \times (2ux_2 + g \sin x_1)/x_3 \\ &\quad + \{Q(x_3 - l_1) + \phi_3\} u + (c/2)(u - u^{i-1})^2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} K(x^i, u^i, \phi^{i-1}; u^{i-1}, c^i) \\ = \min_u K(x^i, u, \phi^{i-1}; u^{i-1}, c^i) \end{aligned} \quad (15)$$

(14), (15) 式より

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^{i-1} - \{Q(x_3 - l_1) + \phi_3 \\ &\quad - (2x_2/x_3)(2x_2/\omega^2 + \phi_2)\} / (2c^i) \end{aligned} \quad (16)$$

とするとき、制御は

$$u^i(t) = \begin{cases} u_{\min}; & \bar{u}(t) < u_{\min} \\ \bar{u}(t); & u_{\min} \leq \bar{u}(t) \leq u_{\max} \\ u_{\max}; & \bar{u}(t) > u_{\max} \end{cases} \quad (17)$$

と求められる。これらを文献 7) の手順に従って反復計算したところ、Bang Bang 型に近い制御が得られた。

3.2 計算結果

$l_0 = l_1 = 100$ [cm], $u_{\max} = -u_{\min} = 60$ [cm/s], $t_1 - t_0 = 3$ [s] として、一つの初期条件 $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 1.6$ のもとにペナルティ荷重 Q と $l(t)$ の関係を計算したところ、 $Q > 0.002$ では $99.5 < l(t) < 100.5$ [cm] となり、実用に耐えることがわかった。以下ではこれを Q の目安とする。また、 t_0 の選定については、 $\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2 / \omega^2 = 0.261$ の単振動に対して、 $\tan^{-1}(\dot{\theta}_0 / (\theta_0 \omega))$ と J の関係を計算した結果、 $\tan^{-1}(\dot{\theta}_0 / (\theta_0 \omega)) \doteq 50^\circ$ 、換言すれば $\theta_0 = 0$ を少し過ぎた時点を選んだとき J は最小となった。このことと初期状態検出の都合上、以下では $\theta_0 = 0$ の時刻を t_0 に選ぶ。つぎに t_1 ($t_0 = 0$ とする) と残留振幅 A_f 、切り換え時刻 $\{\tau_i\}$ の関係を Fig. 2 (注 4) に示す。また、Fig. 3 は $\theta_0 = 0$ となる時刻に t_0 を選んだときの θ_0 と $\{\tau_i\}$ の関係を示す。この図をマイコンに記憶させて、制御に用いる。その結果得ら

Fig. 2 Effects of control period t_1 ($t_0 = 0$) on final amplitude A_f and switching time $\{\tau_i\}$; $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 1.6$ [rad/s]

(注 3) (11) 式を用いた勾配法 (直接法) も試みたが、収束状況が望ましくなかった。

(注 4) Fig. 2~Fig. 4, Table 1 では、 $l_0 = l_1 = 100$ [cm], $u_{\max} = -u_{\min} = 60$ [cm/s], $Q = 0.005$.

Fig. 3 Effects of initial state θ_0 ($\theta_0=0$) on switching time $\{\tau_i\}$

Table 1 Calculated and experimental results; $\theta_0=0, t_i-t=3.0$.

θ_0 [rad/s]	A_0	A_f^c (α^c)	A_f^e (α^e)
0.4	7.32	2.98 (0.407)	2.70 (0.369)
0.8	14.64	5.90 (0.403)	5.80 (0.396)
1.2	21.96	8.92 (0.406)	9.00 (0.410)
1.6	29.28	11.72 (0.400)	11.80 (0.403)
2.0	36.61	14.49 (0.396)	15.00 (0.410)

れた種々の初期条件のもとでの振動抑制効果の一部を Table 1 に示す (A_0, A_f は制御以前, 以後の最大振幅, α はその比, c は計算値, e は実験値). これより, 制御時間 3[s] で約 40% に振動を抑制できることがわかる. なお, $\theta(t), l(t), F(t)/m$ の時間変化と $\{\tau_i\}$ の関係を計算結果から検討したところ, 先の予想がほぼ成立していることが確認された.

つぎに, Bang Bang 制御では時刻 $\{\tau_i\}$ で $\dot{l} = \pm\infty$ となって (5) 式を満足しない (実際にはロープのたわみ, 荷のとびはねなどを生ずる) ので, 現実的制約を考慮して, $|\dot{l}| \leq M$ と考え, 切り換え時刻近傍では等加速運動 $|\dot{l}| = M$ とした制御方策を採用する. M は現実の制御装置ならびに (5) 式から選ばれる. この効果は実験によって検討した.

5. シミュレータ実験と検討

以上の方策の検証を行うために, ロープ長 l が 40~150 [cm] の範囲で最高速度 60 [cm/s] で可変なシミュレータを試作した. ロープ長はパルスモータで制御し, 巻取りドラム径 9.7 [cm], オモリの質量 30 [g], 使用マイコンは TI 社 990/101 M (16 bit), 角度 θ の検出にはロープを通した鞘に固定された小型加速度計 (Entran 社製) を用いた. 実験結果は Table 1 の最

Fig. 4 Suppression of oscillation by the repeated rope length control ($M=1,000$)

後列に示されており, 計算値と良い対応を示している. また, $|\dot{l}|$ を最大値 M に制限した場合, 実験では $\theta_0=0, \dot{\theta}_0=1.6$ [rad/s] のとき, $M=600, 800, 1000$ (この装置では $M < 1300$ のとき, (5) 式が満足される) に対して $\alpha^c=0.389, 0.375, 0.362$ となり, ロープのたわみや荷のとびはねなどが避けられたので, より良い振動抑制効果を得られている. いずれの場合も, 3 [s] (振動周期の約 1.5 倍) の制御時間で, 約 40% 程度に振動を抑制できることがわかる. さらに Fig. 4 は, この制御方策を 4 回繰返したときの振動の減衰効果を示すもので, 連続的な閉ループ制御の代りに, 4 回の初期状態検出を伴う開ループ制御となっている. 各回の制御開始前の単振動状態の $\theta_{\max}$ の検出により $\theta_{\max}$ は一意に定まるから, Fig. 3 の制御方策が適用可能である.

5. おわりに

この方法は本質的に開ループ制御であるので, 外乱がない場合は (t_1-t_0) を大きくとって抑制効果を大きくできるが, 外乱が予想される場合は, (t_1-t_0) を単振動周期の 1.5~2 倍程度に選んで, この制御方策を繰り返したほうが得策と思われる. なお, トロリが可変加速度で移動する場合には問題はより複雑になる.

参考文献

- 川崎: クレーンにおけるつり荷の振れ止め制御について, 日本機械学会誌, **72**-605, 830/835 (1969)
- 井口: クレーンの制御に関する研究, 日本機械学会論文集, **39**-320, 1225/1234 (1973)
- 山岸: クレーンの振れ止め制御, 第 16 回自動制御連合講演会前刷, 353/354 (1973)
- 森下: 走行クレーンの運転自動化のための振れ止め制御, 計測自動制御学会論文集, **14**-6, 739/744 (1978)
- 美多, 金井: トロリーの最大速度に注目したクレーンの最適運転法, 計測自動制御学会論文集, **15**-6, 833/838 (1979)
- Sakawa, Shindo: Optimal Control of Container Crane, Automatica, **18**-3, 257/266 (1982)
- Sakawa, Shindo: On Global Convergence of an Algorithm for Optimal Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-25**-6, 1149/1153 (1980)