粒 度 分 布 測 定 法*

芝 亀 吉**・佐 藤 光 春***

Grain-size Analysis

Kamekichi SHIBA and Mitsuharu SATO

This report is concerned with a new method of grain size analysis by sedimentation. The new method is also based on the assumption that all particles in a liquid descend with constant velocities dependent on their sizes. But the incorrect assumption, that the specific gravity at a level of a muddy liquid is measured by a hydrometer, is not introduced in the new method.

An equation is deduced which gives the integrated percentage as a function of the apparent increase of mass and its time derivative of a circular cylinder, partially immersed in the muddy liquid.

It is proved theoretically that the same equation is applicable for a totally immersed cylinder, under the condition that all particles initially exist in the part of the liquid over the cylinder remain permanently in that part.

1. は し が き

粒度分布はいろいろの方法で測られるが、比重法は最もよく用いられている方法の1つである。従来の比重法⁽¹⁾では、比重計で一水平面上の比重が測られるという厳密には正しくない仮定を置いているほかに、どの深さの比重が測られるかが明確でないこと、測定された比重の自動記録ができないことなどの欠点がある。

ここに報告する粒度分布測定法は、比重法の一つであるが、理論的にも従来のものと異なっていて、上述の仮定を置かないので理論的にすぐれていると考えられるうえに、上述のような欠点も改善されている。

(1) たとえば、JIS A 1204 (土の粘度試験法)

2. 粒度分布の表わし方

粒度を表わすのに、通常は、有効直径を用い、分布も有効直径によっているが、ここでは、一定降下速度による分布を使用する。それは、この両者は実質的には同様であるが、一定速度のほうが直接的でありまた理論的の取り扱いに都合がよいからである。

液体内に懸濁している粒子に Newton の運動法則を適用すると、

$$\mu \frac{dv}{dt} = \mu \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) g - \Phi \quad \cdots \cdots (1)$$

である。 μ は粒子の質量、 v は降下速度、 ρ , ρ_0 は粒子と液体との密度、 g は重力の加速度、 Φ は粒子が液体から受けている力である。力 Φ は速度 v が大きくなるにつれて大きくなるのに対して、式 (1) の右辺第1項は v によらず一定であるから、ある速度 v のときに式 (1) の右辺が 0 となり、その速度が一定に保たれることになる。

粒子が半径 r の球であり、力 Φ が粘性抵抗の力であるときには、

$$\Phi = 6 \pi \eta v r \quad \cdots \cdots (2)$$

であるという Stokes の法則がある。ここに η は液体の粘度である。この Stokes の法則は無条件に成り立つのではなく、Reynolds 数が小さいときにだけ正しく成り立つことが知られている。実際には、

$$v r \rho_0 \leq 0.05 \eta$$

であればよいとされている。ここでは、一定の速度になっても Stokes の法則が成り立つとする。これは、粒子が小さいことを意味している。このときには、式 (1) は

* 昭昭 40 年 7 月 29 日原稿受付

** 東洋大学工学部

*** 電源開発株式会社

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) - 6 \pi \eta v r$$

$$\dots\dots (3)$$

となり、一定速度 v のときには $dv/dt=0$ であるから、式 (3) から

$$v = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r^2, \quad r = \sqrt{\frac{9\eta}{2(\rho - \rho_0)g}} \cdot \sqrt{v}$$

$$\dots\dots (4)$$

の関係があることが知られる。

すべての粒子がそれぞれの大きさに応じた一定速度で降下していると仮定する。

球形粒子ならば、一定速度 v で降下している粒子の半径 r はその速度 v だけで定まり、その関係は式 (4) で示される。粒度分布は、この場合には半径 r による分布を考えても一定速度 v による分布を考えてもよい。 v による分布が知られると、半径 r あるいは直径 d による分布も知られる。

球形でなければ、大きさは半径だけで定まるとはいえない。一定速度 v で降下している粒子は球形でなくても式 (4) で定められる r をその有効半径とし、有効半径（あるいはその2倍の有効直径）による分布を取り扱うのが普通であるが、 v による分布を考えるのがより直接的であると考えられる。

一定降下速度 v による分布と有効半径 r による分布との間の関係は、つぎのようにして得られる。

粒子の総質量 M の中で、一定降下速度が v と $v+dv$ との間にあるものの質量を dM とし、

$$dM = Mf(v)dv \quad \dots\dots (5)$$

とすると、 $f(v)$ で一定降下速度 v による粒度分布が表わされ、有効半径が r と $r+dr$ との間にあるものの質量を dM' とし、

$$dM' = MF(r)dr \quad \dots\dots (6)$$

とすると、 $F(r)$ で有効半径 r による粒度分布が表わされる。式 (5), (6) を積分すると、

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1, \quad \int_0^\infty F(r)dr = 1 \quad \dots\dots (7)$$

であることが知られる。

v と r との間には式 (4) の関係があるので、

$$dv = \frac{4(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r dr$$

の関係を満たす dr を式 (6) に入れると、 $dM' = dM$ である。それで、

$$f(v)dv = f\left\{\frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r^2\right\} \frac{4(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r dr$$

であることが知られ、

$$F(r) = \frac{4(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r \cdot f\left\{\frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r^2\right\}$$

$$\dots\dots (8)$$

であることが知られる。これによって、 $f(v)$ から $F(r)$ も知られる。

3. 懸濁液の密度

粒子が沈降して容器の下部に密集すると、単位体積内の粒子の質量が大きくなり、他粒子の存在が粒子の下降速度に影響を及ぼすことになる。そのときには、球形粒子にも式 (4) が成り立つとはいえない。以下の考察では、このような他粒子の存在の影響は無視されたとする。

粒子が一様に分布している始初状態から各粒子がそれぞれの一定速度で降下し始めるとし、その時刻を $t=0$ であるとする。時刻 t においては、降下速度が x/t より大きい粒子はすべて深さが x より大きい場所へ降下してしまっているので、 $v \geq x/t$ については $dM=0$ であり、 $v < x/t$ については、単位体積あたりの粒子の質量は、始初状態と等しい。

懸濁液の密度は x と t によるので、それを $\phi(x, t)$ とする。 $t=0$ のときの密度 $\phi(x, 0)$ は一様なので x によらない。 $t=0$ のときの単位体積あたりの粒子の総質量を C_0 とすると、 C_0 は粒子の濃度だけで定まる。 $t=0$ における粒度分布は、式 (5) に $M=C_0$ とした式で示される。すなわち、

$$dM = C_0 f(v)dv \quad \dots\dots (9)$$

である。

時刻 t 、深さ x における単位体積あたりの粒子の質量を C とすると、

$$C = C_0 \int_0^{x/t} f(v)dv \quad \dots\dots (10)$$

である。いうまでもないが、式 (10) の $f(v)$ は式 (9) のものと同じである。

単位体積内の質量 C の粒子の体積は C/ρ であるから、液体の体積は $1 - (C/\rho)$ である。それで、時刻 t 、深さ x における懸濁液の密度は、

$$\phi(x, t) = \left(1 - \frac{C}{\rho}\right) \rho_0 + C$$

$$= \rho_0 + C_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \int_0^{x/t} f(v)dv \quad \dots\dots (11)$$

で与えられる。

4. 粒度分布の測定原理

これまでの比重法による粒度分布測定では、一水平面上の比重が測られることを仮定しているが、この仮定は厳密には正しくない。ここに報告する方法では、このような仮定をしない。

これまでの方法では、比重計としてうきばかりが使用されている。うきばかりは質量が一定の物体に及ぼ

Fig. 1

されている浮力を利用するので、浮力の大きさが一定であって、うきばかりの液体内にある部分の体積が比重によって変わることを利用する。これに対して、ここに報告する方法では、液体内にある部分の体積が一定の物体に及ぼされている浮力を利用する。

浮力を受けている物体を断面積が S の円筒とし、その円筒の質量をてんびんで測るようにする。その円筒の液面下に浸漬している部分の長さ L が一定に保たれるようにする (Fig. 1)。

浮力は時間 t とともに変わるので、浮力を $B(t) \cdot g$ とする。 $B(t)$ はてんびんで測っている物体の見掛けの質量の減少に等しい。 $B(t)$ は、断面積が S 、高さが L で深さによる密度分布が懸濁液の密度分布と同じ液柱の質量に等しいので、

$$B(t) = \int_0^L S \phi(x, t) dx = S \int_0^L \phi(x, t) dx$$

である。密度 $\phi(x, t)$ はすでに式 (11) で与えられているので

$$B(t) = SL\rho_0 + SC_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \int_0^L \int_0^{x/t} f(v) dv dx \quad \dots\dots (12)$$

である。さらに、右辺第 2 項の二重積分を変形すると、

$$B(t) = SL\rho_0 + SC_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \times \left\{ L \int_0^{L/t} f(v) dv - t \int_0^{L/t} v f(v) dv \right\} \quad \dots\dots (13)$$

となる。

式 (13) を時間 t で微分すると、

$$\frac{dB(t)}{dt} = -SC_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \int_0^{L/t} v f(v) dv \quad \dots\dots (14)$$

が得られ、さらにこれを t で微分すると、

$$\frac{d^2 B(t)}{dt^2} = SC_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \cdot \frac{L^2}{t^3} f\left(\frac{L}{t}\right) \quad \dots\dots (15)$$

が得られる。式 (15) を $f\left(\frac{L}{t}\right)$ について解くと、

$$f\left(\frac{L}{t}\right) = \frac{\rho}{SC_0(\rho - \rho_0)} \cdot \frac{t^3}{L^2} \cdot \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \quad \dots\dots (16)$$

となり、 $v = L/t$ による粒度分布が知られる。

従来の方では、加積百分率を採用している。加積百分率というのは、ある粒径以下の粒子の質量の全粒子の総質量に対する百分率である。新しい方法でも加積百分率を求めることができる。

粒子の総質量 M の中で一定降下速度が $v=0$ から $v=L/t$ までの粒子の質量は $M \int_0^{L/t} f(v) dv$ であるから、速度が v までの加積百分率を P とすると、

$$P = \frac{100}{M} \cdot M \int_0^{L/t} f(v) dv = 100 \int_0^{L/t} f(v) dv \quad \dots\dots (17)$$

である。これを式 (13) と (14) とから求めると、

$$P = \frac{100 \rho}{C_0 SL(\rho - \rho_0)} \cdot \left\{ B(t) - t \frac{dB(t)}{dt} - SL\rho_0 \right\} \quad \dots\dots (18)$$

が得られる。

この式 (18) は、一定降下速度による加積百分率として得られたのであるが、有効半径による加積百分率を求めることができる。有効半径が r_1 までの粒子の質量は、全粒子の質量が M のときには、 $M \int_0^{r_1} F(r) dr$ であるが、これは速度が $v=0$ から $v=v_1 = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g \cdot r_1^2$ までのものの質量に等しいので、 r_1 までの加積百分率を P_1 とすると、

$$P_1 = 100 \int_0^{r_1} F(r) dr = 100 \int_0^{v_1} f(v) dv = 100 \int_0^{L/t_1} f(v) dv \\ = P_{t=t_1} = \frac{100 \rho}{C_0 SL(\rho - \rho_0)} \cdot \left\{ B(t_1) - t_1 \left(\frac{dB(t)}{dt} \right)_{t_1} - SL\rho_0 \right\} \quad \dots\dots (19)$$

であることが知られる。ここに、

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{9 L \eta}{2(\rho - \rho_0) g r_1^2} \quad \dots\dots (20)$$

である。

式 (18) による P と t との関係あるいは式 (19) による P_1 と t_1 との関係をグラフに描き、 t あるいは t_1 の座標に、その代わりとして $v = L/t$ あるいは $r_1 = \sqrt{\frac{9 L \eta}{2(\rho - \rho_0) g t_1}}$ の値をつけておくと、速度 v あるいは有効半径 r_1 による加積百分率が得られる。

5. 測定による加積百分率の求め方

円筒の質量を $\mathcal{M}$ 、見掛けの質量を $\mathcal{M}'$ とすると

$$B(t) = \mathcal{M} - \mathcal{M}' \quad \dots\dots (21)$$

であり、直接に測定されるのは、円筒の見掛けの質量

$\mathcal{M}'$ である。最初 ($t=0$) のときの見掛け質量を $\mathcal{M}_0'$ とすると、

$$B(0) = SL\phi(x, 0) = SL\left(\rho_0 + C_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho}\right) = \mathcal{M} - \mathcal{M}_0' \quad \dots\dots (22)$$

であるから、

$$B(t) - SL\rho_0 - SLC_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \mathcal{M}_0' - \mathcal{M}' \quad \dots\dots (23)$$

である。ここに、

$$X = \mathcal{M}' - \mathcal{M}_0' \quad \dots\dots (24)$$

と置くと、 X は測定によって得られる。 $B(t)$ は時間が経つとともにしだいに小さくなるので、 $X > 0$ である。式(23)は、

$$B(t) - SL\rho_0 = SLC_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} - X \quad \dots\dots (25)$$

となる。また、これを時間 t で微分すると、

$$\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{dX}{dt} \quad \dots\dots (26)$$

であるから、加積百分率 P を与える式(18)は、

$$P = 100 \left\{ 1 - \frac{\rho}{SLC_0(\rho - \rho_0)} \left(X - t \frac{dX}{dt} \right) \right\} \quad \dots\dots (27)$$

となり、時間 t と X との関係を測定で得れば、 P が知られる。

さらに、 t と X との関係を $T = \log_{10} t$ と X との関係として表わすと、すなわち、横軸を t としないで T とし、 X を縦座標としてその関係を表わすと、

$$t \cdot \frac{dX}{dt} = \log_{10} e \cdot \frac{dX}{dT}$$

となるので、式(27)は、

$$P = 100 \left\{ 1 - \frac{\rho}{SLC_0(\rho - \rho_0)} \left(X - \log_{10} e \cdot \frac{dX}{dT} \right) \right\} \quad \dots\dots (28)$$

となり、 P を求めるための操作が容易になる。

6. 液面の変化

粒度分布の測定にはかなり長い時間を要する。それで、液面からの蒸発による液面低下が無視されないこともあるであろう。また、てんびんのわずかな傾斜によって、液面が相対的に変化することもあるであろう。液面が変化すると浮力を受けている円筒の液体内に浸漬している部分の長さ L が変わる。

蒸発によって液面が dL だけ低下する場合には、蒸発するのは上部にある液体ばかりの層であり、残っている懸濁液内の粒子の分布は蒸発に無関係であるとみられるので、そのための浮力の減少は $S\rho_0 dL$ である。各粒子の運動は蒸発の影響を受けないので、粒度分布の計算には $L - dL$ でなく L を用いるべきである。一方、浮力に相当する質量 $B(t)$ は、測定によって得

られる値に $S\rho_0 dL$ を加えて補正しなければならない。

てんびんの傾斜によって液面が相対的に dL だけ低下する場合には、測られる浮力の減少に相当する質量は $S\phi(L, t)dL$ であるが、 $1.00\rho_0 < \phi(L, t) < 1.05\rho_0$ の程度であるから、近似的にはやはり $S\rho_0 dL$ とみてよい。粒度分布の計算には L でなく $L - dL$ を用いるべきである。

粒度分布の測定には、浮力が少なくとも $1/1000$ まで測られる必要があるので、液面低下による浮力の減少の絶対値に相当する質量が $B(t)$ の $1/1000$ 以下でなければ、液面の変化による浮力の変化を無視することができない。すなわち、 $\left| \frac{dL}{L} \right| > \frac{1}{1000}$ ならば無視できない。この点からいえば、 L が大きいほどよい。

てんびんの傾斜によって液面が相対的に変わると、円筒の下端面などにおいて液体の流動が生じ、粒度分布測定によく影響を与える恐れがあるので、なるべくこの種の液面の変化は避けなければならない。

蒸発を抑制するには、液面に蒸発防止剤の薄膜を浮かせるか、円筒をてんびんの腕につる糸が細長い管(たとえば径が数 mm、長さが数 cm の管)を通るようにし、その管以外は空気が流通しないようにふたをするかすればよい。

液面の変化の影響を回避するには、つぎのようにすればよい。円筒の一部を液体内に浸漬する代わりに、長さ L^* の固体円筒を細い糸などでつるして、その円筒全部を液体内に浸漬するが、上端面の液面からの距離 l は短くしておく (Fig. 2)。

Fig. 2

この場合に、てんびんで測られる浮力は、円筒を液面まで延長した長さ $L = L^* + l$ の円筒に及ぼされている浮力であると考えることができる。この長さ L の円筒は、長さ L^* の固体円筒と長さ l の液柱(懸濁液柱)とからできているもので、長さ L の円筒の質量は両者の質量の和である。

$t=0$ の時刻には一様の懸濁液であるとし、固体円筒上の高さ l の液柱内に含まれている粒子が降下してもこの部分以外へは流出せず(固体円筒上にたまることになる)、また、外から粒子がこの部分に流入しないならば、液面が一定に保たれているときには、長さ L の円筒の体積および質量が一定に保たれるので、前の4での粒度分布の測定法がそのまま適用される。このような事情があるので、長さ L^* の固体円筒の上部に適当なわくあるいはへこみをつけるなどして、降下した粒子が固体円筒の側面へ流出しないようにするこ

とが望ましい。

蒸発によって液面が dL だけ低下する場合には、 l が dL だけ減少するので、円筒が $L^*+l-dL=L-dL$ の長さとなり、浮力は質量 $S\rho_0 dL$ に相当するだけ減少するが、同時に円筒の質量も $S\rho_0 dL$ だけ減少するので、見掛けの質量の減少は、蒸発による液面低下に無関係である。この場合には、粒度分布の計算には、もとの L を用いるべきであり、 $L-dL$ ではない。

てんびんの傾斜によって液面が dL だけ相対的に低下する場合には、見掛けの質量はほとんど影響を受けないが、液体内に流動が生じるので、このような液面の低下は避けるべきである。なお、この場合には、粒度分布の計算には L でなく $L-dL$ を用いなければならない。

いずれにしても、 L より長い固体円筒の L だけの部分を液体内に浸漬するよりも、 L より短い長さ L^* の固体円筒を全部液体内に浸漬させるほうが、液面の変化に対して有利である。なお、表面張力の影響も固体円筒を全部液体内に浸漬させるほうが少ない。

長さ L^* の固体円筒を全部液体内に浸漬させる場合に、4 の測定原理が適用されるためには、円筒上の高さ l の液柱内の粒子が全部保有されることが必要であるが、実際には、多少の流入流出があるであろう。この高さ l の液柱内に含まれている粒子の総質量が、長さ L の円筒の全質量に比して十分に小さければ、粒子の流入流出による質量変化が無視される。このために、 l を L^* に比して小さくとればよい。

7. 粒子の付着

液体中に懸濁している粒子はだいたい沈降するが、多少は固体の表面に付着するであろう。液体中にある固体円筒の上端面にたまる粒子は前の 6 で述べたように問題にならないので、側面と下端面とに付着するものだけを考えればよい。その中で下端面に付着するのはいきわめて少量であると考えられるので、側面に付着するものだけを考えることにする。

円筒に付着している粒子の受けている浮力に相当する質量は、付着している粒子の深さによる分布によるが、懸濁液の密度は ρ_0 と $1.05 \rho_0$ との間であるとよみてよいので、近似的には付着している粒子の深さによる分布を考えないでよい。それで、付着している粒子の総質量を $\Delta \mathcal{M}$ とすると、浮力に相当する質量は $\Delta \mathcal{M} \cdot \rho_0 / \rho$ とみてよいので、てんびんで測られる見掛けの質量の増加 $\Delta \mathcal{M}'$ は、

$$\Delta \mathcal{M}' = \Delta \mathcal{M} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \quad \dots\dots (29)$$

で与えられる。

粒子が付着していると、円筒の質量が $\mathcal{M} + \Delta \mathcal{M}$ となっているのであるが、 $B(t)$ を求めるときに式 (21) の $\mathcal{M}$ はそのまま、 $\mathcal{M}'$ の代わりに $\mathcal{M}' + \Delta \mathcal{M}'$ を用いて計算することになる。それで、直接に算出されるのは $B(t)$ でなく $B(t) + \Delta B(t)$ であり、

$$\Delta B(t) = -\Delta \mathcal{M}' = -\Delta \mathcal{M} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \quad \dots\dots (30)$$

である。この $\Delta B(t)$ は粒子が付着しているための $B(t)$ の誤差である。この誤差が $B(t)$ に比して十分に小さければ無視される。実際には、 $\Delta B(t) < 0.001 B(t)$ ならば無視してよいであろう。さらに $B(t) > SL\rho_0$ であるから、この条件は、

$$\frac{\Delta \mathcal{M}}{SL\rho_0} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} < \frac{1}{1000} \quad \dots\dots (31)$$

とみてよい。なお、円筒の半径を R とすれば、 $S = \pi R^2$ である。

長さ L^* の固体円筒の側面に付着する粒子は、固体表面の性質によるほか、粒子の性質にもよるであろうし、また、粒子の濃度にもよるであろう。固体の側面に付着する粒子は、 $t=0$ の時刻に側面に密接している厚さ λ の薄層内にある全粒子よりは少ないと考えることは、 λ を十分に大きくとれば必ずいえることである。ここで、 $\lambda = 0.25 \text{ mm}$ であると仮定する。この仮定のもとでは、付着粒子の総質量の最大限は $2\pi RL^* \lambda C_0$ であるが、 $C_0 < 0.05 \rho_0$ であるから、上の条件は ($L > L^*$ であるから)、

$$\frac{2\pi RL^* \lambda C_0}{\pi R^2 L \rho_0} \doteq \frac{0.1 \lambda}{R} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} < \frac{1}{1000}$$

あるいは、

$$R > \frac{100(\rho - \rho_0)}{\rho} \lambda \quad \dots\dots (32)$$

となる。 $\lambda = 0.25 \text{ mm} = 0.025 \text{ cm}$ とし、 $\rho = 2.6 \text{ g/cm}^3$ 、 $\rho_0 = 1.0 \text{ g/cm}^3$ とすると、式 (32) は、

$$R > 1.5 \text{ cm} \quad \dots\dots (33)$$

となる。

粒子の付着という点からいえば、 $L - L^* = l$ が大きいほどよい。しかし、前に 6 で述べたように、固体円筒の上端面にたまる粒子の流出の点からは l が小さいほうがよい。実際には、この両方の事情を考慮して、 l を定めるべきであろう。

7. 結 語

以上報告した粒度分布測定法は、Stokes の法則を仮定しているので、得られる粒度分布は従来の比重法と同様の粒度分布である。しかし、従来の比重法に比較すると、理論的にかなり改善されたものと考えられる。