空気圧信号伝達路特性に関する比較研究*

榎 木 義 一**・米 沢 洋***

三 宅 恵****

Survey of Studies on the Dynamics of Pneumatic Transmission Lines

Yoshikazu SAWARAGI, Yoo YONEZAWA

and Megumi MIYAKE

The use of pneumatic transmission lines in automatic control and instrumentation requires accurate knowledge of their dynamic response. Many researchers have dealt theoretically and experimentally with the frequency, step and/or impulse responses of fluid lines. The basic differential equations expressing the dynamics of the fluid lines are continuity, equation of motion, energy equation and equation of state for gas or liquid. These equations are very complex, so many researchers have made some assumptions and solved these equations by use of the methods corresponding to their own objects.

In this paper, these assumptions, procedures for solutions and solutions are compared with each other. The approximately basic equations are classified into two large groups. The first group consists of the Navier-Stokes equation and the linearized equation of energy equation with respect to fluid velocity, and the solutions derived from these equations express the radial distributions of temperature and fluid velocity as well as the axial deviation of pressure and velocity. But the physical considerations with regard to dynamic response are very difficult, because the solutions consist of Bessel functions. The equations of second group are the linearized ones of Euler's equation of motion and continuity. By this solution it is found that the behaviour of pneumatic transmission lines is comparable to an electric cable involving distributed constants, though only the axial deviations of pressure and fluid velocity are specified by the solution.

The dynamics yet to study on the pneumatic transmission lines are as follows:

- (1) the effects of end-point's impedances of transmission lines
- (2) theoretical examinations of resonance phenomena in pressure attenuation curve
- (3) the change of various factors by large disturbance

1. 緒 言

自動制御工学、計測工学などにおいては空気圧伝達管路を要素として使用することが多い。従来までにこの空気圧伝達管路の諸特性について理論的・実験的研究が数多くなされているが^{(1)~(15)}、一般に、流体を含む系を表現する基礎関係式は複雑であり、とくに流体が気体の場合には圧縮性を考慮した状態方程式が介入す

るため、取り扱いがひじょうに困難となるので、それぞれの研究目的に応じて種々の近似的手法がとられている。本論文は空気圧伝達管路に関するこれらの研究のうち主要なものをまとめて、

- (i) 空気圧伝達管路の諸特性を表現する基本的方程式の誘導および解法を明らかにし、解の処理法および主要な応答について比較考察し
- (ii) 空気圧伝達管路の重要な諸分布定数および伝達管路の始、末端での負荷に対する各解の比較を行ない、また
- (iii) 未研究の諸問題について考察する。

* 昭和 40 年 9 月 20 日原稿受付

** 京都大学工学部 *** 九州工業大学

**** 日本エヤーブレーキ株式会社

2. 基礎方程式

2.1 基礎方程式

粘性および圧縮性を持つ流体の一般的な運動量方程式は、Navier-Stokes の方程式⁽¹⁵⁾

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \eta - \eta_B \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \eta \nabla^2 \vec{v} + \nabla p = 0 \quad \dots (1)$$

で与えられる。ここで、 η :せん断粘性係数、 η_B :体積粘性係数、 $\vec{v}$:流体流速のベクトル表示、 ρ :密度、 p :圧力、 t :時間である。

また、流体の性質として、Euler の連続の方程式⁽¹⁵⁾

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \rho \vec{v} = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \quad \dots (2)$$

が成立する。一方、流体の温度分布については、エネルギー方程式⁽¹⁵⁾が成立する。すなわち

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial T}{\partial t} + \kappa \vec{v} \cdot \nabla T - \frac{\beta T}{\rho c_v} \left[\vec{v} \cdot \nabla p + \frac{\partial p}{\partial t} \right] - \frac{k}{\rho c_v} \nabla^2 T \\ - \frac{1}{\rho c_v} \left[\left(\eta + \frac{4}{3} \eta_B \right) (\nabla \cdot \vec{v})^2 \right. \\ \left. + \eta (\nabla \times \vec{v}) \cdot (\nabla \times \vec{v}) \right] = 0 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

ここで、 c_p :定圧比熱、 c_v :定積比熱、 k :熱伝導率、 T :温度、 β :熱膨張係数、 $\kappa = c_p/c_v$:断熱指数である。

上の(1)、(2)および(3)式と、流体が液体か、気体かに応じて与えられる状態方程式によって流体の運動が規定される。ただし、(1)および(3)式で表わされる方程式は

(i) 等方性の流体に限定

(ii) 流体に作用する体積力は微小として省略

の2つの仮定のもとで成立するが、考察する流体が気体である場合には、ほとんど制約とはならない。理想気体では $\beta T = 1$ であり、体積粘性係数 η_B は単原子気体ではゼロで、通常の気体の場合にもゼロとみなされている。

2.2 基礎方程式の近似法

自動制御系あるいは測定系の1要素として、空気圧伝達路を取り扱う場合には、主として伝達管路の始端に与えられた微小な圧力じょう乱に対する管軸方向の圧力変動あるいは流速変動を問題とする。これらの問題に対しては、前述の(1)~(3)式で表現される基礎方程式ならびに気体の状態方程式を境界条件に応じて解けばよいが、そのままの形では取り扱いがひじょうに困難であるので、なんらかの仮定のもとに近似手段がとられている。一般に行なわれている近似方法としては、運動量方程式について述べると、Navier-Stokes の方程式で速度に関する1次の項のみを取り出す方法、他の1つは別にEulerの運動方程式から出

発する方法である。後者の場合、出発点は異なっても Euler の方程式そのものが Navier-Stokes の方程式の近似形にあたるので、いずれの方法でも Navier-Stokes の方程式を近似したものにはかならない。

上の2つの近似方法を述べるにさいして、考えている空気圧伝達管路は管径一様のなめらかな円筒状のものとし、管路の分布定数は管軸に沿って一様に分布をなしているものとする。Fig.1 に示すような円筒座標をとる。

Fig. 1

まず、第1の近似方法としては、つぎの仮定

- (i) 流速 $\vec{v}$ は軸方向のみ考慮し、これをあらためて v と記す
- (ii) 体積弾性係数は微小として省略
- (iii) 気体の運動は管軸まわりに対称に行なわれるものとする。すなわち、

Fig.1 において、管軸を中心とし、半径 r の断面の周上では、気体の運動は同一とする

- (iv) 圧力 p は管断面上で一定とする。すなわち、管断面上での平均圧力を管軸上の一点の圧力とする。

のもとに、基礎方程式(1)~(3)式において速度についての2次以上の項を省略すると、

$$-\frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots (4)$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \quad \dots (5)$$

$$\frac{\nu_T}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\beta T}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots (6)$$

となる。ここで、 $\nu = \eta/\rho$:動粘性係数、 $\nu_T = k/\rho c_p$:熱拡散度である。(4)および(6)式により、管径方向の流速および温度分布がそれぞれ求められる。管軸方向の圧力変動を求めるには、標準状態の気体の密度を ρ^* 、流量を Q^* とすると、Fig.1 から

$$\rho^* Q^* = \int_0^{D/2} 2\pi r \rho v dr \quad \dots (7)$$

が成立する。(7)式を x で微分した式に(5)式を代入することにより、また、(7)式において1次の項のみを取ることににより、それぞれ

$$\rho^* \frac{\partial Q^*}{\partial x} = -2\pi \int_0^{D/2} r \frac{\partial \rho}{\partial t} dr \quad \dots (8)$$

$$\rho^* Q^* = 2\pi \rho \int_0^{D/2} r v dr \quad \dots\dots (9)$$

がえられる。(4), (6), (8) および (9) 式より圧力 p および流量 Q^* に関する連立1階微分方程式に帰着させることができる。この場合、前頁の (i) ~ (iv) の仮定に加えて

(v) 気体の密度 ρ , 流速 v および温度 T の管軸方向の変化を無視する

なる仮定をさらに必要とする。

第2の近似方法は通常行なわれている方法である。第1の方法が温度に関して1次の項のみ残したため、 $\partial^2 v / \partial x^2$, $\partial^2 v / \partial r^2$ の項が残り、したがって、粘性項が存在するに対し、第2の方法ではこれらの項を省略する代わりに、管壁での摩擦による力を考慮に入れる。基礎方程式を近似するにさいし、第1の方法で用いた仮定に加えてつぎのような仮定をおく。

(i) 管内の流体は理想気体とし、ポリトロプ変化を行なう

(ii) 軸方向の流速 v および密度 ρ は圧力 p と同様に管断面上で一定、すなわち、 v および ρ は管断面上の平均値を使用する

(iii) 管壁での摩擦などを含めて圧力降下は流速に比例するとし、粘性は無視する

(vi) $v(\partial \rho / \partial x)$, $v(\partial v / \partial x)$ は十分小さいとする

これらの仮定により、圧力 p および流速 v の管軸方向の変動のみを考えればよいから基礎方程式は (1) および (2) 式だけで十分である。これらのことから、Navier-Stokes の方程式および Euler の連続の方程式を近似すると

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho R' v = 0 \quad \dots\dots (10)$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (11)$$

となる。ここで R' は速度減衰定数である。上記の仮定 (i) から (11) 式は

$$n \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

となる。ここで n : ポリトロプ指数 である。(10) 式および上式をさらに変形すれば

$$\frac{\partial p}{\partial x} + Rv + L \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots (12)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} + C \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots (13)$$

となり、漏れのない送電線の伝ばん方程式と同形となる。ここで $R = \rho_0 R'$: 伝達管路の単位長の抵抗, $L = \rho_0$: 伝達管路の単位長のインダクタンス, $C = 1/n p_0$: 伝達管路の単位長の容量, ρ_0, p_0 : 基準状態の密度, 圧

力, である。

伝達管路の管軸方向の圧力 p , 流速 v の変動を求めるには (12), (13) 式を基礎方程式として用いればよい。 R, L および C の値は実際の管路について実験の数値を用い、必ずしも上記の値をとらないことが多い。(12) 式は1次元における Euler の運動方程式:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + X = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots (14)$$

において、2次の項 $v(\partial v / \partial x)$ を無視し、外力項 X を摩擦による項に置き換えた場合に相当する。(12), (13) 式で表現される基礎方程式系を誘導するにはこの Euler の運動の方程式、連続の方程式から出発するのが普通である。

(4) ~ (6) 式をもって伝達管路の特性を表現する基礎方程式系とするならば、管径方向の温度および流速の分布、さらに管軸方向の圧力変動を決定しうるので、管軸方向の圧力および流速の変動を表現している。(12) および (13) 式を基礎方程式系とする場合よりも適用範囲が広いが、(4) および (6) 式は、それぞれ v および T に関する2階の微分方程式であり、Bessel の方程式に帰着する。これに対し、(12) および (13) 式は p および v についての連立1階微分方程式に帰着する。もちろん、(4) および (6) 式から同様の方程式系に帰着しうが、Bessel の方程式を経由しなければならない。さらに後者の基礎方程式系を解くに必要な初期条件のほかには管壁での境界条件を必要とする。

これら近似基礎方程式系では流速 v を用いて表現したが、もちろん、流量あるいは変位を用いて同様な近似基礎方程式系を作ることができる。

3. 近似基礎方程式の解

3.1 近似基礎方程式の解法

伝達管路の特性を表現する近似基礎方程式系は前述のように2大別されうが、研究目的に応じて種々の解法が講じられている。最も一般的な方法としては、伝達管路の始端に与えられた小振幅の正弦波状圧力じょう乱に対し、管内の任意点の圧力、流速および温度は同一周期の正弦波状変化をすると仮定して、上記の近似方程式の変数分離解を求める。これより伝達管路の周波数応答が与えられ、したがって、伝達管路の各種の周波数伝達関数が求められる。このようにして求められた解は送電線の伝ばん問題に準じて処理されることが多い。

3.2 理論的応答

3.2.1 周波数応答 基礎方程式 (4), (5) およ

び (6) を用いる場合には、伝達管路の圧力、流速および温度は管路の始端での値を基準とし、始端での圧力じょう乱を

$$p(x=0) = p_0 e^{j\omega t_l} \quad \dots\dots (15)$$

とする。任意の点での圧力、流量および温度をそれぞれ

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p(x) e^{j\omega t} \\ v(r, t) &= v(r) e^{j\omega t} \\ T(r, t) &= T(r) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots (16)$$

とおけば、(4) および (6) 式は零次の Bessel 方程式に変形でき、境界条件

$$v(r=D/2)=0, \quad T(r=D/2)=0 \quad \dots\dots (17)$$

を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} v(r) &= -\frac{1}{j\omega} F(hv, -\frac{r}{\delta_v}) \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ T(r) &= F(h_T, -\frac{r}{\delta_T}) \frac{p}{\rho c_p} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (18)$$

と解くことができる。ただし

$$\left. \begin{aligned} F\left(h, \frac{r}{\delta}\right) &= 1 - \frac{J_0(\sqrt{2r/\delta} \cdot j^{3/2})}{J_0(\sqrt{2h} \cdot j^{3/2})}, \\ J_0 &: \text{零次の Bessel 関数} \\ \delta_v &= \sqrt{2\nu/\omega}, \quad \delta_T = \sqrt{2\nu_T/\omega}, \\ h_v &= D/2\delta_v, \quad h_T = D/2\delta_T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

である。管軸上の一点での圧力 p およびその 1 回微分 $\partial p/\partial x$ の値が与えられると、管径方向の速度および温度の分布が (18) 式により決定される。また、管軸方向の圧力変動は、(8) および (9) 式に (18) 式を使用すれば求められるが、その解は (12) および (13) 式の場合と同形になる。

つぎに (12) および (13) 式の方程式から出発する場合には、(15) 式の圧力じょう乱に対する管軸上の任意点での圧力および流速を

$$\left. \begin{aligned} p(x, t) &= p(x) e^{j\omega t} \\ v(x, t) &= v(x) e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (20)$$

とすれば、(12) および (13) 式はそれぞれ次式のようになる。

$$-\frac{dp}{dx} + (R + j\omega L)v = 0 \quad \dots\dots (21)$$

$$-\frac{dv}{dx} + j\omega C_p = 0 \quad \dots\dots (22)$$

積分定数 C_1 および C_2 を用いれば、上記 2 式の解はそれぞれつぎの形で記述される。

$$p(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \quad \dots\dots (23)$$

$$v(x) = -\frac{1}{Z_c} (C_1 e^{\gamma x} - C_2 e^{-\gamma x}) \quad \dots\dots (24)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)} \\ Z_c &= \sqrt{(R + j\omega L)/j\omega C} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (25)$$

である。送電線の伝ばん問題では γ は伝ばん定数、 Z_c は特性インピーダンスと呼ばれている。(4)～(6) 式からも (23), (24) 式と同様な解が得られるが、それらの解に表われる伝ばん定数、特性インピーダンスはつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= j\omega \sqrt{\frac{\epsilon \rho}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + (\kappa - 1)J(\sqrt{2\sigma h_v})}{(-1)J(\sqrt{2h_v})}} \\ Z_c &= \frac{\rho^*}{A} \sqrt{\frac{\kappa}{\epsilon \rho}} \sqrt{\{1 - J(\sqrt{2h_v})\}\{1 + (\kappa - 1)J(\sqrt{2\sigma h_v})\}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (26)$$

ただし、

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) : \text{等温圧縮率}$$

$$J(\varphi) = \frac{2}{\varphi^{3/2}} \cdot \frac{J_1(\varphi j^{3/2})}{J_0(\varphi j^{3/2})}$$

J_0, J_1 : 零次, 1 次の Bessel 関数

$\sigma^2 = \nu/\nu_T$: Prantl 数

ρ^* : 基準状態での気体の密度

A : 伝達管路の断面積

である。

(23), (24) 式の積分定数 C_1, C_2 は境界条件

$$p(x=0) = p_0, \quad p(x=l) = p_l \quad \dots\dots (27)$$

から決定でき、また

$$p_l/p_0 \equiv G(j\omega) \quad \dots\dots (28)$$

も求められる。この $G(j\omega)$ を伝達管路の圧力に関する周波数伝達関数とみなすと、これから管軸上の任意点での圧力の周波数応答を知ることができる。

3.2.2 ステップ応答 伝達管路の始端での圧力じょう乱が次式で与えられる場合、終端における圧力応答 $p_l(t)$ について考える。

$$p_0(t) = p_m \mathbf{I}(t) \quad \dots\dots (29)$$

ただし、 p_m は階段の大きさ、 $\mathbf{I}(t)$ は単位階段関数である。

(28) 式の周波数伝達関数 $G(j\omega)$ から伝達関数を $G(s)$ とおけば $p_l(t)$ は形式的に

$$p_l(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot p_m/s] \quad \dots\dots (30)$$

で与えられる。しかし、一般に $G(s)$ は複雑な形であるため、(30) 式を計算するのは容易ではない。そこで $G(s)$ をつぎのように近似して (30) 式のラプラス逆変換を求める。

$$G(s) \simeq e^{-T_d s} \frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} \quad \dots\dots (31)$$

ここで、 T_d : むだ時間、 $Q_1(s), Q_2(s)$: 比較的 low 次 s の多項式である。

また、近似基本方程式から直接ステップ応答を求めることも可能である。すなわち、(12) (13) 式で初期条件をすべてゼロとしてラプラス変換後変形すれば

$$\frac{\partial^2 p(x, s)}{\partial x^2} = Cs(R + Ls)p(x, s),$$

$$\frac{\partial^2 v(x, s)}{\partial x^2} = Cs(R + Ls)v(x, s)$$

となるから、それぞれの解は (23), (24) 式と同形の

$$p(x, s) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} \quad \dots\dots (32)$$

$$v(x, s) = -(C_1 e^{\gamma x} - C_2 e^{-\gamma x})/Z_c \quad \dots\dots (33)$$

となる、ただし、ここに表われる伝ばん定数 γ および特性インピーダンス Z_c は (25) 式で $j\omega = s$ とおいたものになる。圧力および流量の境界条件による積分定数 C_1, C_2 を消去して $p(x, s)$ を求め、(30) 式同様

$$p(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[p(x, s) \cdot p_m/s] \quad \dots\dots (34)$$

によりステップ応答が求まる。このラプラス逆変換もひじょうにめんどりで、 $p(x, s)$ の無限個の留数を図式解法により算出しなければならない。

3.3 方程式の解の処理法

上述のような方法で一応解は求められるが、一般に複雑な解となって以後の取り扱いが困難なことが多いので、適当な方法で近似する必要がある。以下 2.2 で述べた 2 種の近似基礎方程式系について代表的な解の処理法について記す。

まず、(4)～(6) 式を基礎方程式とした場合、解は Bessel 関数を含んでいる。この Bessel 関数を展開し、必要な項以外を省略して近似すれば取り扱いが比較的容易になる。零次の Bessel 関数は Kelvin の ber および bei 関数を用いて、

$$J_0(zj^{3/2}) = \text{ber } z + j \text{ bei } z \quad \dots\dots (35)$$

とかける。ここで

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{4n} \\ \text{bei } z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n+1)!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{4n+2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (36)$$

である。 $|z|$ が小さいときは無限級数中のうち初めから z^4 までをとれば

$$\text{ber } z \approx 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{2}\right)^4, \quad \text{bei } z \approx \left(\frac{z}{2}\right)^2 \quad \dots\dots (37)$$

と近似され、逆に $|z|$ が十分大きいときは

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } z &\approx \frac{\exp \alpha(z)}{\sqrt{2\pi z}} \cos \beta(z), \\ \text{bei } z &\approx \frac{\exp \alpha(z)}{\sqrt{2\pi z}} \sin \beta(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots (38)$$

と近似される。ここで、

$$\alpha(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}z} - \frac{25}{384\sqrt{2}z^3} - \frac{31}{128z^4} - \dots,$$

$$\beta(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}z} - \frac{1}{16z^2} - \frac{25}{384\sqrt{2}z^3} - \dots \quad \dots\dots (39)$$

である。(37) 式の表現および (39) 式の $\alpha(z), \beta(z)$ の各右辺ではじめから若干項までを用いることにより Bessel 関数 $J_0(zj^{3/2})$ は

$$J_0(zj^{3/2}) \approx$$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + j \left(\frac{z}{2}\right)^2 \right. \quad |z| : \text{小} \dots\dots (40)$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}z} \right) + j \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}z} \right) \right] \right\} \quad |z| : \text{大} \dots\dots (41)$$

となるので、これを用いて (18) 式の解の中の

$$F(h, r/\delta) \text{ は}$$

$$F(h, r/\delta) \approx$$

$$\left\{ \begin{aligned} &1 + j \frac{h}{8} \frac{1 - \left(\frac{r}{D/2}\right)^4}{1 - \left(\frac{r}{D/2}\right)^2} \\ &j \frac{h^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{D/2}\right)^2 \right] \frac{1 - \left(\frac{r}{D/2}\right)^2}{1 + jh^2/2} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} &h : \text{小} \dots\dots (42) \\ &h : \text{大} \dots\dots (43) \end{aligned}$$

と近似される。ただし、(43) 式は h が大きくかつ r が十分 $D/2$ に近い場合に成立する。(42) 式から得られる管径方向の分布は Hagen-Poiseuille の粘性流れに類似し、放物線状の分布をなす。これに対し、(43) 式から得られる分布は、管壁ではゼロで、管軸に近づくにつれしだいに増加し、管軸の近傍ではほとんど一定の値となる。したがって、高周波領域すなわち h が大きいときは高周波電流が導体を通るとき見られる表皮効果がこども表われる。表皮深さは上式中の δ で表わされる。

伝ばん定数 γ は (25) あるいは (26) 式で表わされるが、一般に複素数である。これを

$$\gamma = \alpha_1 + j\beta_1 \quad \dots\dots (44)$$

とすると、 α_1 は減衰定数、 β_1 は位相定数あるいは波長定数となる。すなわち α_1 は伝達管路の単位長あたりの減衰をネーパで、 β_1 は単位長あたりの位相角の増大量をラジアンで表わしたものである。また、伝達管路を伝ばんする圧力波の波長を λ とすると

$$\lambda = 2\pi/\beta_1 \quad \dots\dots (45)$$

なる関係が成立する。この α_1, β_1 により、周波数応答についての情報を得ることができる。

つぎに、管軸方向の圧力および流速の変動はいずれの近似基本方程式からでも (23), (24) 式に帰せられる。1 例として、伝達管路の始、終端での圧力 p_0, p_L の比を求めよう。いま、終端での負荷をインピーダン

スで表わし、管断面についてその大いさを Z_0 とし、始端、終端での圧力、流速をそれぞれ p_0, v_0, p_l, v_l とすれば、境界条件は

$$p(0) = p_0, \quad v(0) = v_0, \quad p(l) = p_l, \quad v(l) = v_l = p_l/Z_0$$

であるから、(23), (24) 式の積分定数を決定することにより、終端での圧力、流量は

$$p_l = p_0 \cosh \gamma l - Z_0 v_0 \sinh \gamma l \quad \cdots \cdots (46)$$

$$v_l = -(p_0 \sinh \gamma l - Z_0 v_0 \cosh \gamma l)/Z_0 \quad \cdots \cdots (47)$$

となる。これから始、終端での圧力比

$$\frac{p_l}{p_0} \equiv G(j\omega) = \frac{1}{\cos h \gamma l + (Z_0/Z_0) \sinh \gamma l} \quad \cdots \cdots (48)$$

が得られる。特殊な場合として伝達路の末端が閉鎖している場合には $Z_0 \rightarrow \infty$ となり、

$$p_l/p_0 = 1/\cosh \gamma l \quad \cdots \cdots (49)$$

を得る。

(25) あるいは (26) 式からわかるように伝ばん定数 γ は複雑な形であり、かつ $\sinh, \cosh$ は超越関数であるため、(48) あるいは (49) 式の計算は容易ではない。(26) 式の γ を使用する場合、まず伝達管路内の流体が

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad , \quad a : \text{音速} \quad \cdots \cdots (50)$$

を満足しているものとする。低周波領域では等温変化すなわち $\kappa=1$ と考えられるから

$$\gamma = \frac{\omega}{a} \left[1 - J(\rho a^2 \frac{D}{2}) \right]^{-1/2} \quad \cdots \cdots (51)$$

となる。さらに、 $\rho a^4 (D/2)^2 < 1$ ならば

$$\gamma \cong \frac{\omega}{a} \left[-\frac{1}{8} (\rho a^2 \frac{D}{2} j^{3/2})^2 \right]^{-1/2} \quad \cdots \cdots (52)$$

と近似される。また、(48) 式に表われている超越関数の和は次式で与えられる⁽¹⁶⁾。

$$\cosh z + B \sinh z =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{2x_B z - z^2}{x_B^2 + \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2 \pi^2} \right] \quad B < 1 \\ \left[1 - \frac{z}{x_B} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{2x_B z - z^2}{x_B^2 + n^2 \pi^2} \right] \quad B > 1 \end{array} \right. \quad \cdots \cdots (53)$$

ただし、 $x_B = \frac{1}{2} \ln |(B-1)/(B+1)|$ である。この無限級数積のうち、最初の数項をとって近似することが可能である。このような方法で、たとえば (48) 式を比較的低次の s の多項式の商の形、さらにむだ時間と 1 次遅れの形に近似すれば以後の取り扱いが容易になる。

4. 諸結果の比較

空気圧伝達管路に関する近似基礎方程式の種々の解についていろいろ解析が行なわれているが、それらの

諸結果を比較するには、主として、周波数応答および過渡応答についての各解の比較、ならびに、伝達管路を規定する管長、管径および負荷に対する各解の比較などが考慮されるべき重要な問題と考えられよう。

4.1 応答に対する比較

4.1.1 周波数応答に対する比較

圧力に関する周波数伝達関数は伝達管の始、終端での圧力の比で定義されているが、始端での平均圧力および圧力振幅に依存する。Sandell & Ceglske の実験によれば、圧力振幅が大きくなると減衰が大きくなることを示している。これは Hagen-Poiseuille の流量公式から単純に抵抗が与えられず、圧力振幅によって非定常流となるため、たとえレイノルズ数が 2000 以下であっても乱流条件が成立し、したがって、抵抗の値が圧力振幅によって変化するためと考えられる。Moise は管路抵抗を流速の関数として周波数応答を計算し、圧力振幅に対する依存性を実験と比較してかなりの好結果を得ている。しかし、場合に依りて管路の摩擦係数を逐一計算しなければならないのでめんどうである。また、伝達管路中の平均圧力により容量が影響を受けるため、圧力に関する周波数応答の減衰度が平均圧力の増大に伴い単調に増大することを、西原、沢村、渡辺は理論的に明らかにしている。

各理論的周波数伝達特性は実験と比較すると、減衰度、位相遅れともに大きく現われる傾向を有し、とくに高周波特性でこの傾向が強い。

伝達管路特性を表現する近似方程式は、いずれの研究においても、一般的な基礎方程式を一次近似したものであるから、周波数の比較的低い領域ではこれらの理論的周波数伝達特性は近似度が良好である。とくに十分低い周波数領域に限定するならば、周波数伝達関数をむだ時間と一次遅れの系で表現した西原、沢村、渡辺あるいは川崎、町山の理論、およびむだ時間と、それぞれ 2 つの極、零点を有する系で表現した de Bacci の理論は計算が容易で実用的であろう。そのほか、Sandell & Ceglske の実験によれば、Iberall および Farrington の各理論は、低周波領域でしかも小さい圧力振幅の場合十分な近似を持っている。

入力圧力の周波数が低周波数から高周波数になるにしたがい、一般にいずれの周波数伝達理論も近似度が悪化するが、管径が小さく管長が長いと、小圧力振幅に対し、この傾向は多少軽減される。小管径の長い伝達路の特性インピーダンスはほとんど抵抗によって支配され、容量による影響は少なく、また、圧力振幅が小であると管路中の流れは Poiseuille 流れとみなされるためである。他方終端に付加される容積が増大する

と、減衰度、位相遅れともに誤差が大きくなるが、これは主として付加容積中の状態変化が必ずしも等温変化でないことによる。

Sandell & Ceaglske や Samson の実験によれば、周波数応答における圧力の減衰曲線が高周波領域で波状になり、伝達管路の管径が大きく管長が短くなるにしたがいこの傾向は強い。管径が大きいと、伝達管路の断面上での抵抗が圧力波の伝ばんに与える影響が小さく、また管長が短いと伝達管路に沿った抵抗の影響が小さいため、圧力降下が少なく、終端からの圧力の反射波が強い。したがって減衰曲線が波状となる原因は、始端から終端へ向かう圧力波と、終端からの反射波とによる共振現象と考えられる。高周波領域では管路の分布定数とくに抵抗の値が決定しがたい上に、この共振現象の発生のため、理論的減衰曲線の最初の波付近から誤差が大きくなり、理論的にこの共振現象を正確に表現することは困難である。Sandell & Ceaglske は、高周波領域での状態変化は断熱的であるから、音波理論により共振周波数は計算可能であるとしている。

Samson は伝達管路の特性インピーダンスおよび終端負荷によるインピーダンスのほかに始端におけるインピーダンスを考慮する必要がある、伝達管路長が短く終端負荷が大きい場合にとくに影響が著しいと指摘している。

4.1.2 過渡応答に対する比較 過渡応答の中でステップ応答については Samson, Schuder & Binder, de Bacci および Brown の研究がある。これらのうち、Schuder & Binder は圧力のステップ応答を求めることだけを目的とし、 $p(x, s)$ を誘導して、無限個の留数のうち、はじめから4個の留数を図解法により求め、(34)式からステップ応答を計算し、実験と比較的よく合致する結果を得ている。これによれば、管径が大きいかつ終端の容量が小さければ、圧力のステップ応答は行き過ぎを生じることを示している。

そのほかの研究では、いずれも圧力に関する周波数伝達関数をむだ時間を持つ1次遅れあるいは2次遅れ系に近似した伝達関数を得て(30)式に代入しステップ応答を求めている。Samson はステップ応答の63.2% 応答時間について理論と実験とを比較し、管長に対してこの時間は単調に増大するとしているが、Schuder & Binder の傾向と同様に実験値のほうが理論値よりも大きい値となっており、とくに短い管路ではこの傾向が著しい。de Bacci は伝達関数を(31)式のように近似し、(30)式に代入してステップ応答を計算したところ、 $Q_1(s), Q_2(s)$ をそれぞれ s の2次式

とすれば十分実用に耐えることを明らかにしている。

実験問題として、伝達管路に圧力じょう乱を与える圧力源は必ずしも無限のパワーを有していないことに留意しなければならない、したがって伝達管路の始端でのインピーダンスを考慮に入れる必要があることを市川および Samson は論及している。

4.2 管路の寸度に関する比較

4.2.1 管径 D について 管径 D が小さいときの理論的圧力伝送周波数特性は、実験値とほとんど一致することを Sandell & Ceaglske は明らかにしている。これは、管径が小さいと管中の流れは Poiseuille 流と見なされ、管路の特性インピーダンスはほとんど抵抗によって支配されることに起因する。逆に管径が大となるとレイノルズ数が大きくなって、乱流が生じる可能性が強くなるため、管路の抵抗の値を決定することが困難となり、理論的計算での誤差、とくに圧力伝送周波数応答の減衰曲線の誤差を大きくする原因の1つとなる。さらに管径が大となると、抵抗が小さいため管路の終端での圧力減衰あるいは圧力降下が少なく、したがって終端での反射波が強く共振現象を発生し、減衰曲線の近似度は悪化する。

ステップ応答に対しては、管径が大となると圧力源の特性が現われることを Samson は指摘し、また、行き過ぎを生じることを Schuder & Binder は示している。

圧力信号伝送用管路の設計にさいしては、管径を大きくすれば不必要な圧力降下を防ぐことになるので、管径の大きい管路が望ましいが、共振の影響を考慮に入れなければならない。これに関して市川は、圧力伝送管路特性を圧力源の特性をも含めて集中定数系で表現し、管長が与えられたさいの最適管径を提案している。

4.2.2 管長 l について 管長 l の大いさの影響は管径 D の大いさと逆の効果をもたらすことは明らかである。管長が増大すると一般に圧力に関する周波数応答およびステップ応答はいずれも理論と実験との誤差が小さくなる。ステップ応答における63.2% 応答時間は管長とともに単調に増大することを Samson は示している。

4.2.3 負荷について 伝達管路終端に付加された負荷が大きくなると、減衰度は大となるが、位相遅れは 180° 以上となると負荷の大いさにあまり影響を受けないことを Moise は実験的に明らかにしている。負荷の影響に関する研究はそのほかにも行なわれているが、各説とも異論があり比較は困難である。

5. 結 論

円管を用いた空気圧信号伝達管路の特性に関する従来の研究における解析方法、および管路の始端に与えられた圧力じょう乱に対する周波数応答、ステップ応答などを比較した。

空気圧伝達管路特性を表現する基礎方程式は、大きく分類して2つの方法で近似されている。1つは Navier-Stokes の方程式およびエネルギー方程式の流速 u についての1次近似式、さらに連続の方程式を加えて基本方程式系、他の1つは Euler の運動方程式および連続の方程式をそれぞれ1次近似したものを基本方程式系とする方法である。前者の方法では管軸方向の圧力および流速の変動が得られるのみならず、管径方向の温度および流速の分布が得られるが、Bessel 関数の介入により求解が困難である。これに対し、後者の方法では管軸方向の圧力および流速の変動しかわからないが、取り扱いが比較的簡単であり、送電線の伝搬理論の知識が応用できる点において便利である。

伝達管路始端における圧力じょう乱に対する近似方程式の解は管路の始端と終端とにおける圧力比で与えられ、周波数応答でこの圧力比を周波数伝達関数とし、さらにこれより伝達関数が得られて、その他の応答、たとえば過渡応答を求めることが可能である。応答を考える場合、伝達関数をむだ時間を含む1次あるいは2次遅れなどの比較的低次の伝達関数に近似して取り扱う場合が多い。

Iberall の研究はこの方面における古典的研究であり、非圧縮性流体の場合から考察し、熱伝達を考慮して圧縮性流体へ論を進めている。解の形が複雑であるため、一般に数値計算がめんどうであるが計算図が用意してある。Farrington は送電線とのアナログな関係から伝達管路の特性を導き、圧力伝達周波数伝達関数をむだ時間をもたない1次遅れの系に近似している。Moise は管路の摩擦を流速の関数として取り扱い、圧力の減衰度は入力振幅に依存することを理論的に説明している。渡辺らおよび川崎、町山は、管路中の流れが Poiseuille 流との仮定のもとに抵抗を求め、終端にとりつける負荷の影響を考慮し、むだ時間と1次遅れ系の集中定数系に近似できることを示している。市川は管路始端における周期的圧力じょう乱に対する終端の圧力は高調波成分を含むと仮定して1次近似解を求め、その物理的意味を考察し、1次遅れ系に近似している。なお、管路始端に取り付けられる圧力源のインピーダンスを考慮して管路内径の最適値を提案している。

武田は Iberall と同じ方針でこの問題を追究し、数多くの結論を得ている。すなわち、管路の抵抗は単純に与えられず、Bessel 関数を含み、流速および周波数の関数であること、また、終端負荷中の状態はポットロップ変化をするが、その指数は周波数とともに1.0から1.4まで単調に増加する、などを明らかにした。Sandell & Ceaglske は Iberall および Moise の理論を実験的に確かめたものであり、管路の内径が小さく、周波数が低ければ、インダクタンスの影響を無視したこれらの理論は比較的正しいことを明らかにした。Rohmann & Grogan および Samson は始端におけるインピーダンスを考慮して広範囲の理論的、実験的研究を行なっている。とくに、管長が短く管径が大きい管路の周波数応答では減衰曲線に共振が生じることを示している。Schuder & Binder および Brown は過渡応答のみを目的にして取り扱い、いずれもむだ時間を含む低次の集中定数系に近似している。Nichols および Brown は分布定数系に表われる諸定数を綿密に追究している。de Bacci は周波数応答線図から求めたそれぞれ2個の極、零点を有する集中定数系で十分近似のよい圧力伝送周波数伝達関数を決定している。

これらの諸研究で不十分と思われる点は

- (i) 管路の始、端インピーダンスの値ならびにそれらの影響
- (ii) 圧力減衰曲線に見られる共振現象の理論的追究
- (iii) 管路中および終端負荷中の状態変化の有様である。これが十分に解明されてこそ最適な伝達管路が設計可能となるであろう。

引用文献

- (1) A. S. Iberall : Attenuation of Oscillatory Pressures in Instrument Lines; Journal of Research, National Bureau of Standards, Vol. 45, July, RP-2115, 85/103 (1950)
- (2) G. H. Farrington : Fundamentals of Automatic Control; p. 138, Chapman and Hall Ltd., London (1951)
- (3) J. C. Moise : Pneumatic Transmission Lines; ISA Journal, Vol. 1, April, 35/40 (1954)
- (4) 西原, 沢村, 渡辺 : 自動制御用空気圧導管の周波数伝達特性について; 日本機械学会論文集, Vol. 22, No. 115, 230/237 (1955)
- (5) 武田 : 導管による振動圧の伝達 (1), (2); 計測, Vol. 5, No. 11 and 12, 538/547, 605/613 (1955)
- (6) 市川 : 空気管の圧力伝達特性; 日本機械学会論文集, Vol. 22, No. 123, 890/894 (1956)
- (7) R. P. Sandell & N. H. Ceaglske : Frequency Response of Pneumatic Transmission Lines; ISA Journal, Vol. 3, December, 482/484 (1956)
- (8) C. P. Rohman & E. C. Grogan : On the Dynamics of Pneumatic Transmission Lines; Transactions of the ASME, Vol. 79, May, 853/874 (1957)

- (9) J.E.Samson : Dynamic Characteristics of Pneumatic Transmission; Transactions of Society of Instrument Technology, Vol.10, No.3, September, 117/134 (1958)
- (10) 川崎, 町山 : 空気圧信号の伝達特性について; Tokico Review, No.2 (1958)
- (11) C.B.Schuder & R.C.Binder : The Response of Transmission Lines to Step Inputs; Journal of Basic Engineering, Transactions of ASME, Series D, Vol.81, December, 578/584 (1959)
- (12) N.B.Nichols : The Linear Properties of Pneumatic Transmission Lines; Transaction of Instrument Society of America, Vol.1, No.1, January (1962)
- (13) F.T.Brown : The Transient Response of Fluid Lines; Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Series D, Vol. 84, No. 4, December, 547/553 (1962)
- (14) M.de Bacci : Propagation in Continuous Media; Process Control and Automation, Vol. 10, No.4, April, 143/147 (1963)
- (15) F.V.Hunt : Propagation of Sounds in Fluids; American Institute of Physics Handbook, 3/27, McGraw-Hill Book Co., New York (1957)
- (16) R.Oldenburger & R.E.Goodson : Simplification of Hydraulic Line Dynamics by Use of Infinite Products; Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Series D, Vol. 86, No.1, March, 1/10 (1964)
- (17) 榎木, 沢村, 米沢 : 空気式むだ時間発生装置の試作研究 : 日本機械学会論文集, Vol.27, No.176, 511/516 (1961)

付

録

Fig. 2 Frequency response of pneumatic transmission lines without terminal volume.

Curve's numbers designate equation's numbers in Table 1. Calculating conditions are as follows :

pipe length : 100 m pipe inside diameter : 6 mm

mean value of sinusoidal input pressure : 0.6 kg/cm² gauge

temperature : 20°C air inside of pipe : adiabatic

[Symbols in Table 1 (next page)]

$a_1, a_2, a_3, \dots$ = constants

a = adiabatic speed of velocity

A = sectional area of pipe

$b_1, b_2, b_3, \dots$ = constants

C = capacitance per unit length of pipe

C_0 = capacitance of terminal volume

D = inside diameter of pipe

$e = 2.718\dots$

f = friction factor of pipe

$j = \sqrt{-1}$

J_0, J_1 = Bessel functions of first kind

$k_1, k_2, k_3, \dots$ = constants

l = pipe length

L = inductance per unit length of pipe

L_e = equivalent dead time

n = polytropic exponent

P = pressure

P_0 = working mean pressure

P^* = atmospheric pressure

Q = terminal volume

R = resistance per unit length of pipe

T_e = equivalent time constant

v = flow velocity

Z_e = characteristic impedance of pipe

Z_0 = terminal impedance

Z_s = source impedance

α = constant

β = constant

γ = propagation factor

Γ = propagation operator

η = coefficient of viscosity

κ = adiabatic exponent

ν = kinematic coefficient of viscosity

ξ = ratio of capacitance of terminal volume to one of pipe

$\pi = 3.1416\dots$

ρ = density

ρ_0 = density at mean pressure

σ = Prandtl number

ω = frequency

Table 1 Comparison of important results in the various researches about the dynamics of the pneumatic transmission lines

name of researcher	fundamental equations	transfer function $G(j\omega)$	conditions for approximation	approximate transfer function
Farrington	Eqs. (12) and (13)	$\frac{1}{\cosh \gamma l}$ $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C}$ $R = \frac{128 \eta}{\pi D^4}$ $L = \frac{4 \rho}{\pi D^3}$ $C = \frac{\pi D^2}{4 P^*}$	small RCl^2	$\frac{1}{j\omega Te + 1}$ $Te = \frac{1}{2} RC l^2$
Moise	Eqs. (12) and (13)	$2 e^{-\alpha l} [K_1(\omega^2 \beta^2 + \alpha^2) - 2 K_1 \alpha + 1 + 2 e^{-\alpha l} \times \{1 - K_1^2(\omega^2 \beta^2 + \alpha^2) \cos 2 \omega \beta l + 2 K_1 \omega \beta \times \sin 2 \omega \beta l\} + e^{-4 \alpha l} \{(1 + K_1 \alpha)^2 + \omega^2 \beta^2\}]^{-1/2}$ $e^{-j\omega \beta l} \text{ for general case}$ $2 e^{-\alpha l} [1 + 2 e^{-2 \alpha l} \cos 2 \omega \beta l + e^{-4 \alpha l}]^{-1/2} e^{-j\omega \beta l}$ <p>for dead-ended tube</p> $K_1 = Q/A, \quad R' = f v / 2 D$ $\alpha = R' / (\sqrt{2} a \sqrt{1 + \sqrt{1 + R'^2 / \omega^2}})$ $\beta = \sqrt{1 + \sqrt{1 + R'^2 / \omega^2}} / \sqrt{2} a$		
Nishihara Sawamura and Watanabe	Eqs. (4), (5), and (6)	$\frac{1}{\cosh \gamma l + (Q/A) \gamma \sinh \gamma l} \dots (A-1)$ $\gamma = \frac{j\omega}{a} \sqrt{\frac{1}{6} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} D^{3/2} J_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} D^{3/2} \right) - 1 - 2 J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} D^{3/2} \right)}$	Poiseuille flow $\frac{\omega}{\nu} \frac{D^2}{4} \ll 1$	$\frac{e^{-L_0 j\omega}}{j\omega T_e + 1} \dots (A-2)$ $T_e = 0.411 RC l^2$ $L_e = 0.0916 RC l^2$ $R = \frac{128 \eta}{\pi D^4}, \quad C = \frac{A}{\pi P_0}$ <p>for the case without terminal volume, see reference (17) for the case with terminal volume</p>
Takeda	Eqs. (4), (5) and (6)	$\frac{1}{\cosh \gamma l + (Q/A) \gamma \sinh \gamma l}$ <p>γ_- is ditto</p>		

Ichikawa	Eqs. (12) and (13)	$\frac{1}{\cosh \gamma l} \dots\dots (A-3)$ $\gamma = \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{2 n P_0}} \left\{ \sqrt{\gamma^2 \omega^2 + \left(\frac{8 \gamma \pi}{A \rho_0} \right)^2} - \omega \right. \\ \left. + j \sqrt{\gamma^2 \omega^2 + \left(\frac{8 \gamma \pi}{A \rho_0} \right)^2} + \omega \right\}$ <p>for dead-ended tube</p>	$\frac{8 \gamma \pi}{A \rho_0 \omega} \gg 1$	$\frac{1}{j \omega T_e + 1} \dots\dots (A-4)$ $T_e = \frac{1}{2} \frac{8 \gamma \pi}{a^2 \rho_0} \frac{l^2}{A}$
Samson	Eqs. (12) and (13)	$\frac{2 Z_0 Z_e}{(Z_0 + Z_e)(Z_e + Z_0) e^{j\tau} + (Z_0 - Z_e)(Z_e - Z_0) e^{-j\tau}}$ $\gamma = \sqrt{(R + j \omega L) j \omega C}$ $Z_e = \sqrt{(R + j \omega L) j \omega C}$ $Z_0 = 1/j \omega C_0$ $Z_s = \text{source impedance}$ $C_0 = Q/nP$ $R = 128 \eta / \pi D^4 + (l/3) j \omega \rho$ <p>at low frequencies</p> $= j \omega \rho + 2(1 + j) \sqrt{2 \omega \eta l} / D$ <p>at high frequencies</p> $C = \pi D^3 / 4 nP$ $L = (4 \rho / \pi D^2) (12 P / P^*)$	<p>R is small compared with ωL and ωC at high frequencies</p> <p>ωL approaches zero at low frequencies</p> <p>$Z_s = 0$</p>	$[1 + b_1 j \omega + b_2 (j \omega)^2 + b_3 (j \omega)^3 + \dots]^{-1}$ $b_1 = T(\xi + 1/2)$ $b_2 = T^2(\xi/3! + 1/4!) + T T_1(\xi + 1/2)/2$ $b_3 = T^3(\xi/5! + 1/6!) + T^2 T_1(\xi/3! + 1/4!)/2$ $T = RC l^2, T_1 = 2L/R, \xi = C_0/C l$ <p>for general response</p> $\exp \left\{ -k_1 j \omega + \frac{1}{2} k_2 (j \omega)^2 - \frac{1}{6} k_3 (j \omega)^3 + \dots \right\}$ $k_1 = b_1$ $k_2 = b_1^2 - 2 b_1$ $k_3 = 2 b_1^3 - 6 b_1 b_2 + 6 b_3$ <p>for monotonic response</p> $e^{-j \omega T_d} \{ 1 + a_1 j \omega + a_2 (j \omega)^2 + a_3 (j \omega)^3 + \dots \}^{-1}$ $b_1 = a_1 + T_e$ $b_2 = a_2 + a_1 T_e + T_e^2/2$ $b_3 = a_3 + a_2 T_e + a_1 T_e^2/2 + T_e^3/6$ <p>for oscillatory response</p>
Schuder & Binder	Eqs. (12) and (13)	$\frac{1}{\cosh \gamma l + (Q/A) \gamma \sinh \gamma l}$ $\gamma = \sqrt{(R + j \omega L) j \omega C}$ $R = 32 \eta / D^2$ $C = 1/\rho a^2$ $L = \rho$		
Brown	Eqs. (4), (5), and (6)	$e^{-T(j \omega)} \dots\dots (A-5)$ $\Gamma(j \omega) = \frac{j \omega l}{a} \left(\frac{1 + 2(\kappa - 1) \frac{D}{j_2 \sqrt{j \omega} j \omega_0 \left(j \frac{D}{2} \sqrt{j \omega} \nu \right)}}{1 - 2 \frac{D}{j_2 \sqrt{j \omega} j \omega_0 \left(j \frac{D}{2} \sqrt{j \omega} \nu \right)}} \right)^{1/2}$	$\nu \omega l^2 \ll 1$ $\omega D/a \ll 1$ $\nu/a D \ll 1$	$\exp \left\{ \frac{-l}{a} \left[1 + a_1 \left(\frac{4 \nu}{j \omega D^2} \right)^{1/2} + a_2 \left(\frac{4 \nu}{j \omega D^2} \right)^{3/2} + a_3 \left(\frac{4 \nu}{j \omega D^2} \right)^{5/2} \right] \right\} \dots\dots (A-6)$ $a_1 = 1 + (\kappa - 1)/\sqrt{\sigma}$ $a_2 = 1 + (\kappa - 1)(1 - \kappa/2 \sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma}$ $a_3 = \frac{7}{8} + \frac{\kappa - 1}{\sqrt{\sigma}} \left[1 - \frac{1}{2 \sqrt{\sigma}} - \frac{1}{8 \sigma} \right]$ $- \left(\frac{\kappa - 1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \sqrt{\sigma}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa - 1}{\sqrt{\sigma}} \right)^3$

討 論

〔武田 晋一郎*〕 空気圧の導管による伝達特性の研究は相当古くからある。討論者の関係した航空計測においても 1924 年ごろの Simmons & Johansen の初期のすぐれた実験的研究がある。しかし理論と実験との一致は必ずしも良好ではなく、とくに共振振動数と共振振幅において著しいことは現在における諸研究におけるものと変わりがなかった。比較的短い管長についての Simmons & Johansen の共振実験は、討論者の理論（法政大学工学部研究報告第 1 号、昭和 31 年 5 月）によってほぼ満足に説明されたが、工業計測一般の問題としては未解決のところが多くなかった。その後、主としてアメリカ方面においてこの研究が行なわれ数多くの成果が得られたし、またわが国においてもこの問題に関心を持つ研究者が少なくなく現われたことは喜ばしいことである。

空気圧信号伝達路特性に関する従来のおもなる研究結果を比較整理されて問題の内容を分析し、その困難性の所在を明らかにされた講演者のご努力は同じ問題を研究する討論者としてひじょうに感謝します。

討論者のこの問題の困難性の分析は講演者とはほとんど同じであります、つぎのように考えております。

(1) 管路の流体力学に関するもの

- a) 管路流の非定常性によるもの 定常流の Hagen-Poiseilles 法則が成立しない領域では抵抗の法則が速度（流量）に比例しないことと、乱流成立条件が明確でない（非定常流の critical Reynolds 数が研究されていないため）ので明確な理論が構成できない。
- b) 管路流の非線形性によるもの 振幅が大きくなると非線形性のため解析が困難になると同時に、エネルギー方程式をいっしょに考えなくてはならなくなり、熱伝導（温度分布）を含む問題となり、管壁との熱交換が行なわれ減衰度が大きくなる（熱力学的考察が必要になる）。

(2) 圧力波伝達の微分方程式の解法に関するもの
前項の理由により抵抗の法則が Poiseilles の法則から離れてくるため振動数と振幅の両者によって異なるため、これを織り込んだ圧力波伝達論は電気の場合

に比べて著しくめんどうなものになる。管長による共振現象の変動、管端容量の性格による変動等も付随して現われるため、なおいっそうめんどうになるのである。

なお、この問題の研究を実験を併用して解決するには、比較的短い管（種々の径のもの）についての各種振動数に対する振動流の抵抗の法則を実験的に決定し、その結果を抵抗法則 $R(\omega)$ として圧力波伝達の偏微分方程式に用いる。ただし管の各部の容量（キャパシタンス）についてもまた各振動数について短い管に対して実験的に決定しておく。そうすれば、各振動数に対して正しい分布値を用いることができ、正しい共振振幅を得ることができると思われる。講演者のご意見をおうかがいしたい。

管端の負荷の性格については、研究者の（従来の）無理解がしばしば見られることであるが、今後詳細な研究と関心が必要なことは講演者に賛成である。

〔筆者〕 わが国でのこの方面のパイオニアである武田教授から、空気圧信号伝達回路の動特性の研究における困難性について貴重なご意見を賜わり、本論文に補足していただいたことに対し深謝いたします。

研究不十分な諸問題を解決するための一方法として、伝達回路の重要な定数である管路抵抗および管路キャパシタンスを入力圧力の周波数の関数と考え、短い管路について理論的ならびに実験的に追究しては、というお考えについては筆者らも同感ですが、さらにインダクタンスも考慮に入れたほうが、圧力の共振現象のみならず、全般的な管路の動特性を正確に表現するのに便利ではないかと思ひます。このようにして、この問題を追究するさい、ひじょうに重要なことは、実験方法およびその結果の評価方法です。とくに変動圧力源のいわゆる供給インピーダンスによる影響および検出端のいわゆる負荷による影響を十分に考慮に入れておかないと正しい理論的考察は不可能となり、いたずらに繁雑さを増すばかりだと思ひます。

与えられる圧力の振動振幅が大きくなると、ご意見にもありましたように流れの非線形性が顕著となり、本論文で取り扱っているような近似基礎方程式は理論的に成立しなくなりますが、上記の諸定数を周波数のみならず振幅の関数と考えることにより、姑息的ではありますが、ある程度正確に伝達管路動特性を表現できるのではないかと思います。

* 法政大学工学部