不規則 Energy 動揺に対する 条件付確率分布関数の測定*

太 田 光 雄**

The Measurement of Conditional Probability Distribution Function for Random Energy Fluctuations

Mitsuo ŌTA

We need, very often, to measure the joint probability distribution of many correlative random physical quantities in case when we observe simultaneously one or more waves having random phases (like random noise) at two or more different observation points that are different in time, position, frequency or propagation constant. If we call our particular attention to the effect of general correlations among their random physical quantities, it would be well to measure directly the conditional probability distribution rather than the joint probability distribution.

This paper proposes a new method for obtaining sample points of the conditional probability distribution by using the combination of Schmitt trigger circuit and phantastron. We can vary the trigger level in Schmitt trigger circuit and the delay time by use of variable condensers at will. And then, this paper gives a series of photographs prepared to illustrate directly the effect of delay time τ on the wave form of output fluctuation by intensity modulation. Three explicit expressions of conditional probability density distribution for white noise, after passing a mean squaring circuit and an audio band-pass filter of arbitrary width, are experimentally derived in connection with an autocorrelation function of input noise. These are reasonably expressed in terms of Bessel-, Biased Γ -, and Γ -types of distribution.

In this case, the conditional probability distribution for the above output fluctuation is theoretically treated as a probability problem of "distance" in an N -dimensional function space with $N=2TW$ (W : frequency interval, T : time interval), where distance is taken as the mean squared fluctuation.

The experimental and theoretical results described in this paper are also applicable to the other fields of measurement on random phenomena, since the mean energy is a universal physical quantity.

1. 緒 言

本論文は、各時点における不規則なゆらぎの間にどのように多様な相関が横たわっているか、この相関効果を浮きぼりにした姿で反映する条件付確率分布（多変量結合分布のうち各1変量に関する周辺分布は相関効果を反映しない）の一観測方法にまず着目した後、具体的に白い不規則雑音波の二変量結合 energy 動揺に対する条件付確率分布を考察対象にとり、その実測

結果が理論的に導き出した条件付分布表示にいかにか合致するかをあわせ報告したものである。

雑音波を一般に時間や空間・周波数・波長定数などの位相的行路差がある2個以上の点で観察し、これら各点での相対的 energy 変動状態の差を定量的に調べるためには、条件付 energy 確率分布を知ることが重要な問題となる。本論文はこの問題に対する一解答ともなっている。

2. 輝度変調法による条件付確率分布の観測法

帯域幅を W に限定した白い雑音波の T 時間平均

* 昭和 40 年 11 月 5 日受付

** 福井大学工学部応用物理教室

Fig. 1 Connection diagram of experimental equipments.

Photo. 1 Experimental apparatus.

energy 動揺 $E(t)$ に着目し、二時点 t および $t+\tau$ における値 $E_1=E(t+\tau)$, $E_2=E(t)$ に関する条件付確率密度分布 $P(E_1|E_2)$ を特に考察対象にとる。この場合の $P(E_1|E_2)$ 表示は、前回り発表した二変量結合雑音強度分布 $P(E_1, E_2)$ 表示から理論的に導かれ、これを実験的検証に利用しうる。ここで energy 自体よりも、平均 energy すなわち Power に着目するのは、これが雑音波における実際的な物理量で、電気・熱・音・光といった種々の運動形態における普遍量でもあり、さらに観測という手段を経ることにより、微視的な形にせよ、すべての不規則変動がある種の平均操作をうけなければならないことなどの理由による。

Fig. 1 は実験回路の構成図で、Photo. 1 はその概観写真である。各部の動作原理をつぎに示す。

(a) 不規則波に thyatron noise を利用した雑音発生器の出力波を用い、これを、CR 選択増幅器の組み合わせからなる万能ろ波器によって周波数帯域幅 W に限定する。さらに、PK 形位相反転回路の後段で二つの variu 管の変曲大なる点に動作点を set した、いわゆる位相反転形自乗回路 (Fig. 2 参照) に加えた後、Bode 線図上から読みとった可変な積分時間 T をもつ積分回路にこれを通す。

(b) 自乗平均回路出力波を、synchroscope の垂直軸に入れると同時に、Fig. 3 の Schmitt trigger 回路にもそう入して、別に設定した E_2 level (調整可能) とこの出力波とが交差する機会を起点とした 2 進的電圧振幅弁別の方角波を作る。そして、Schmitt trigger 動作の適当な側へ自乗出力波が位置するように、増幅器を前置して正負反転させている。

(c) つぎに Schmitt trigger 回路からの方形出力波を微分し、その正側の trigger pulse を基準として遅延時間 τ だけ遅れた輝度変調用 pulse を作

Fig. 2 Phase inverter type squaring circuit.

Fig. 3 Schmitt trigger circuit.

Fig. 4 Phantastron (delay time circuit).

る。Fig. 4 に示した陰極結合形 phantastron の弛張充電時定数 CR により遅延時間を連続可変とし、phantastron の cathode 出力波形における τ 秒遅延

後の急激な充電立ち上がりで格子 pip 上昇部分を微分する。さらに、この微分 pulse に基づいての輝度変調動作が適当に行なわれるよう、位相反転や強い輝点を得るための増幅機能を後続させた。

(d) かくて、Braun 管面上においては、自乗平均回路の出力不規則波形上、あらかじめ別に設定固定した E_2 level を正のこう配で切る交差点から τ 秒遅れて生ずる輝度変調 spot のみの集団が観測され、写真撮影して条件付確率密度 $P(E_1|E_2)$ の統計的標本集団を得る (Fig. 5)。

Fig. 5 Output random fluctuation and position of intensity modulation spots.

Photo. 2 Input white noise.

Fig. 6 Input Gaussian distribution on the probability paper.

3. 実験装置の特性試験結果

まずなされねばならぬことは自乗回路への入力雑音波が Gauss 分布特性を示すかどうかの実験的確認である。つぎに、実験装置各部分の特性試験結果を列記する。

(a) Photo. 2 は方形波発振器出力に対する微分 pulse を用いて輝度変調をかけた入力雑音波形で、Fig. 6 では、Photo. 2 を拡大 trace しその level 軸を適当な個数の等区間に分割した後、各区間内における輝度変調 spot 数の読みとりから各 level 階級値に対する相対ひん度を正規確率紙上に plot した。入力雑音波に対して Gauss 分布特性がまず確認される。

Fig. 7 Characteristic curve of squaring circuit.

(b) Fig. 7 は位相反転形自乗回路の両対数方眼紙における特性試験結果で、自乗特性の良好さが見いだされる。

(c) Schmitt trigger 回路の波形整形動作は、自乗出力波の周波数帯域をじゅうぶん cover する 20 cps

Photo. 3 Input differential pulse and cathode output wave form of phantastron.

から 500 kc まで忠実である。

(d) Photo. 3 の trace は, Schmitt trigger の方形出力波に対する微分 pulse (上側の波形) と, これに基づく phantastron の陰極出力波における τ 秒間遅延特性との関係を示す。遅延時間は Fig. 4 のごとく切換え switch とバリコンの併用により 0.035 ms から 240 ms まで可変とする。この陰極出力波をさらに微分して反転増幅した後 oscilloscope の z 軸に加え輝度変調に用いる。

4. 測定誤差の原因と対策

(i) Fig. 1 の実験構成で分布形状を入力した Gauss 分布形から非 Gauss 分布形へと最も大きく変換させる要素は zero memory の自乗形非線形回路である。この部分からの誤差の発生を最小にすべく, Fig. 7 の特性以外に, 山と谷のそろった倍周波正弦波出力が試験入力正弦波の全帯域 20 cps から 20 kc にわたって一様に Braun 管上に出現するよう, Fig. 2 における 2 個の 6 BD 6 の cathode bias と位相反転回路を調整した。

(ii) 入力 Gauss 雑音波は, 万能ろ波器を用いその下限周波数を hum の影響をさけるべく 71 c/s にとり, また自乗回路や増幅器の高域半値周波数を考慮してその上限周波数を余裕を見積った 4.5 kc にとり, けっきょく, 雑音波の周波数帯域幅を $W=4.43$ kc に選んだ。しかし, これを DC から 4.5 kc までの白い帯域をもつ雑音波だとみなしても, 誤差の原因となる 71 c/s 以下の power は全 power の 1.6% に過ぎない。

(iii) 積分回路を用いる実験項目に対しては, 時定数の大きい通用の RC 積分回路を利用したため, 時定数より大きい周期をもつ自乗出力波の周波数成分に対しては忠実な平均演算特性を示さなくなり, やはり測定誤差の原因となる。この誤差の定量的評価を付録に示した。

(iv) Schmitt trigger 回路の波形整形動作は一般に hysteresis をもち, on と off になる trigger level 値にはわずかの差異があり誤差の原因となるが, 実験では on 側だけを問題とした。 $P(E_1|E_2)$ の標本集団としては Fig. 5 の E_2 level を正と負のこう配で切る交差を起点とした輝度変調 spot をつくるのが正確であるが, 考案対象となる $E(t)$ の不規則さいかによっては正こう配のみの場合でじゅうぶんである (理由は付録 2)。もちろん, 正負両こう配で E_2 level を切る交差を起点とした輝度変調 spot をこの実験装置でつくることも容易である。

(v) Schmitt trigger は立ち上がり電圧について

も, 真空管の e_g-i_p 特性曲線の形状に起因したある偏差をもっているもので, Fig. 3 の初段管にこの特性曲線の傾きの鋭い 6 CB 6 を用い, 陽極の負荷抵抗を種々変えて調整し, さらに初段管の cathode 抵抗を可変にして立ち上がりの最良点を見つけた。

(vi) 遅延時間 τ が大のときは, Fig. 5 で※印を付した個所のごとく, E_2 level と交差する機会を数えおとす場合もあるが, 時間内に二つ以上の交点が存在する確率は, 入力の周波数成分がもつ周期に比して, 小さな τ を採るときじゅうぶん小さく, 付録 2 にその根拠を与えた。

(vii) Fig. 1 において Schmitt trigger の方形出力波や phantastron の陰極出力波に対する微分 pulse を先鋭にすべく, CR 微分回路の時定数は入力波立ち上がり時間の約 1/10 に選んだ。

5. 条件付確率密度の観測結果に対する理論的考察

Photo. 4 は, Fig. 1 の実験系における出力波を輝度変調した実測写真で, 出力波の条件付確率密度分布 $P(E_1|E_2)$ に関する標本集合を与え, これに遅延時間 τ , したがって相関関数 $\rho_E(\tau)$ (定常確率過程では τ のみの関数) がどのように影響するかを示した。この

(a) $\tau=0.10$ ms, $E_2=0.23$ V

(b) $\tau=0.16$ ms, $E_2=0.23$ V

Photo. 4 Series of photographs prepared to illustrate directly the effect of delay time τ on the output wave form by intensity modulation (integral action time $T=1.06$ ms).

実測写真を拡大 trace し、縦の level 軸を等間隔に細分した後、各 level 区間内におちこんだ spot 数を数えあげれば^{5),6)}、出力波の $P(E_1|E_2)$ に対応したひん度分布曲線をえがくことができ、理論的に導き出した確率の分布曲線と比較検討できる。

5-1 $P(E_1|E_2)$ の理論的導出と実験的確認方法

同一の周波数帯域 W をもった互いに相関ある 2 個の white noise か、または 1 個の white noise の異なる

$$\left. \begin{aligned} P(E_1, E_2) &= \frac{1}{\Gamma(m) S_1 S_2 (1-\rho_E)} \exp\left\{-\frac{1}{1-\rho_E} \left[\frac{E_1}{S_1} + \frac{E_2}{S_2}\right]\right\} \left(\sqrt{\frac{E_1 E_2}{S_1 S_2 \rho_E}}\right)^{m-1} I_{m-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho_E}}{(1-\rho_E)} \sqrt{\frac{E_1 E_2}{S_1 S_2}}\right) (0 \leq \rho_E \leq 1) \\ P(E_1, E_2) &= \frac{1}{\Gamma(m) S_1 S_2 (1-\rho_E)} \exp\left\{-\frac{1}{1-\rho_E} \left[\frac{E_1}{S_1} + \frac{E_2}{S_2}\right]\right\} \\ &\quad \times \left(\sqrt{\frac{E_1 E_2}{S_1 S_2 (-\rho_E)}}\right)^{m-1} J_{m-1}\left(\frac{2\sqrt{-\rho_E}}{(1-\rho_E)} \sqrt{\frac{E_1 E_2}{S_1 S_2}}\right) (-1 \leq \rho_E \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (1)$$

ただし、

$$m = N/2 \simeq T \cdot W \left(\geq \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots (2)$$

$$S_h = \langle E_h \rangle / m \quad (h=1, 2) \quad \dots\dots (3)$$

であり、 ρ_E は E_1 と E_2 の相関係数を示す。この周

$$\begin{aligned} P(E_1|E_2) &= P(E_1, E_2) / P(E_2) \\ &= \frac{1}{(1-\rho_E) S} \left(\sqrt{E_1 / \rho_E E_2}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{1}{(1-\rho_E) S} (E_1 + \rho_E E_2)\right\} I_{m-1}\left(\frac{2}{(1-\rho_E) S} \sqrt{E_1 \rho_E E_2}\right) \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

(4) 式の分布はすでに発表したつぎの Bessel-分布形に書き改められる⁵⁾。

$$P(E_1|E_2) = \frac{m}{m_E - E_0} \left(\sqrt{E_1 / E_0}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{m(E_1 + E_0)}{m_E - E_0}\right\} I_{m-1}\left(\frac{2m}{m_E - E_0} \sqrt{E_1 E_0}\right) \quad \dots\dots (5)$$

ただし、

$$E_0 = \rho_E E_2, \quad m_E = \langle E_1 \rangle' \quad \dots\dots (6)$$

$$m = (\langle E_1 \rangle'^2 - (\rho_E E_2)^2) / \sigma'^2_{E_1},$$

$$S' = (1 - \rho_E) S = \frac{m_E - E_0}{m} \quad \dots\dots (7)$$

であり、ここに $\langle E_1 \rangle'$ や $\sigma'^2_{E_1}$ は $P(E_1|E_2)$ に関する平均値と分散を示す。したがって Bessel-分布に関する積率法からの母数推定法や分布形状の実験的確認方法などすでに発表した手法⁵⁾を、(4) 式または (5) 式の $P(E_1|E_2)$ にそのまま流用することができる。

$$\left. \begin{aligned} P(E_1|E_2) &= \frac{1}{\Gamma(m) S'^m} (E_1 - E_0)^{m-1} \exp\left\{-\frac{1}{S'} (E_1 - E_0)\right\} \quad (E_1 > E_0) \\ &= 0 \quad (E_1 \leq E_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (10)$$

$$m = (\langle E_1 \rangle' - (\rho_E E_2))^2 / \sigma'^2_{E_1}, \quad S' = (m_E - E_0) / m \quad \dots\dots (11)$$

で近似表示することができる。ただし、 E_0 と m_E は (6) 式そのものである。

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし、} \quad Y &\equiv \exp \frac{m E_1}{m_E - E_0} \cdot P(E_1|E_2), \quad X \equiv \xi^{m-1} \cdot I_{m-1}(\xi), \quad \xi \equiv \frac{2m \sqrt{E_1 E_0}}{m_E - E_0}, \\ K &\equiv \left(\frac{1}{2 E_0}\right)^{m-1} \exp\left\{-\frac{m E_0}{m_E - E_0}\right\} \cdot \left(\frac{m_E - E_0}{m}\right)^{m-2}, \quad E_0 \equiv \rho_E E_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (13)$$

る 2 時点での不規則変動に着目し、これを平均化時間 T をもつ自乗平均回路に通して、その出力 E_h ($h=1, 2$) の相対的な変動状態の差を調べるとき (E_h は Shannon の $N(=2TW)$ 次元信号空間²⁾ 内、Parseval 完全関係から球形和の形を表わされる)、結合出力分布 $P(E_1, E_2)$ がつぎの結合 Γ -分布表示となることを、すでに導いた⁴⁾。

一般分布 $P(E_2) \left(= \int_0^\infty P(E_1, E_2) dE_1\right)$ は Γ -分布で与えられ、特に同一出力波 $E(t)$ の 2 時点に E_1, E_2 をとるのであれば $S_1 = S_2 (\equiv S)$ となる性質に着目して、 E_2 を固定した条件付確率密度はつぎの表示をとる。

一般に、Bessel-分布・偏移 Γ -分布・ Γ -分布のおのおのに対する積率母関数⁵⁾を互いに比較して、Lévy の連続定理から、(5) 式の Bessel-分布は、(a) E_0 ($= \rho_E \cdot E_2$) がじゅうぶん小さいとき、 Γ -分布：

$$P(E_1|E_2) = \frac{1}{\Gamma(m) S'^m} E_1^{m-1} \exp\left\{-\frac{E_1}{S'}\right\} \quad \dots\dots (8)$$

$$m = (\langle E_1 \rangle' / \sigma'_{E_1})^2, \quad S' = m_E / m \quad \dots\dots (9)$$

で近似表示でき、(b) 積分時間 T を大きくとって m が大 (したがって S' が小) となると、偏移 Γ -分布：

これら分布形状の実験的確認方法に関してはすでに発表した⁵⁾、条件付確率密度分布 $P(E_1|E_2)$ への適用結果をつぎに列記しておく。

$$[\text{Bessel-分布}] \quad Y = KX \quad \dots\dots (12)$$

$$[\text{偏移 } \Gamma\text{-分布}] \quad Y = KX^m \quad \dots\dots(14)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} Y &\equiv (E_1 - E_0) P(E_1 | E_2), \\ X &\equiv (E_1 - E_0) \exp\left\{-\frac{E_1 - E_0}{m_E - E_0}\right\} \\ K &\equiv m^m / (m_E - E_0) \Gamma(m), \quad E_0 \equiv \rho_E E_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(15)$$

Γ -分布の実験的確認は (15) 式において $E_0 = 0$ とする.

5.2 自乗瞬時出力波の自己相関関数

white noise $f(t)$ の自乗瞬時値 $E(t) (=f^2(t))$ は, Fig. 1 で積分回路を取り除いた場合に輝度変調された姿で観測でき, この spot の標本集合から $E(t)$ の実験的な自己相関関数が算出される.

いま, $E_1 = f^2(t)$, $E_2 = f^2(t + \tau)$ とおき, E_1 と E_2 の相関係数 ρ_E は,

$$\rho_E(\tau) = \frac{1}{\sigma_{E_1} \sigma_{E_2}} \{ \langle f^2(t) f^2(t + \tau) \rangle - \langle f^2(t) \rangle \langle f^2(t + \tau) \rangle \} \quad \dots\dots(16)$$

で定義される. ここに σ_{E_i} は E_i の標準偏差である ($i=1, 2$). $f(t)$ と $f(t + \tau)$ の同時分布が相関係数 $\rho_f(\tau)$ をもつ二次元正規分布に従うことから, つぎの結合率が算出される.

$$\begin{aligned} \langle f^2(t) f^2(t + \tau) \rangle \\ = 2\rho_f^2(\tau) \langle f^2(t) \rangle \langle f^2(t + \tau) \rangle + \langle f^2(t) \rangle \langle f^2(t + \tau) \rangle \end{aligned} \quad \dots\dots(17)$$

$\sigma_{E_1} = \sigma_{E_2} (\equiv \sigma_E)$, $\langle f^2(t) \rangle = \langle f^2(t + \tau) \rangle$ の性質と, $\sigma_E^2 = \langle f^4(t) \rangle - \langle f^2(t) \rangle^2$ に対し $\tau=0$ とおいた (17) 式の表式を適用して得られる関係 $\sigma_E^2 = 2\langle f^2(t) \rangle^2$ を (16) 式に代入すれば,

$$\rho_E(\tau) = \rho_f^2(\tau) \quad (\geq 0) \quad \dots\dots(18)$$

の関係が得られる. 相関係数 ρ_E, ρ_f を τ の関数として考察するとき, これはそれぞれ分散値で規格化された $E(t), f(t)$ の自己相関関数そのものである. もし白色雑音 $f(t)$ の周波数帯域が区間 $[0, W]$ (4(ii) 参照) に限定されるならば, Wiener-Khintchine の定理¹⁾ から,

$$\rho_f(\tau) = \frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau} \quad \dots\dots(19)$$

の表示が算出される. (18), (19) 式から $\rho_E(\tau)$ はつねに正值を示し, τ 軸上,

$$\Delta\tau = 1/2W \quad \dots\dots(20)$$

の一定間隔ごととに無相関 ($\rho_E=0$) となり, Shannon の標本化定理²⁾ と密接に結びつく. 相関関数 $\rho_E(\tau)$ の値は, (16) 式の定義式にもとづくか, または $\lim_{E_2 \rightarrow 0} m_E = (1 - \rho_E) m_S$ の性質や一変量周辺分布に関する極限的性質 $\lim_{T \rightarrow \infty} P(E_1) = \delta(E_1 - m_S)$ (δ -分布) を, (7)

式 2 番目の式と関連させて実験的に算出することができる. また, $\rho_E(\tau)$ は m 値に無関係であるから, 積分回路をそう入した場合でも (18), (19) 式の関係は保たれる⁴⁾.

6. 観測結果と実験的検証

[A] 入力雑音の Gauss 分布特性の検定

Photo. 2 の輝度変調 spot からなる入力雑音波の標本集合 $\{x_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) が Gauss 分布特性に従うことをつぎの二つの統計的判定によって確認した.

(i) **K 統計量を用いた正規性の検定**⁸⁾ 観測した $n=215$ 個の標本値からまず,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 34, \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 = 123.2, \\ m_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^3 = -41.92 \quad \dots\dots(21) \end{aligned}$$

を算出し, これから K 統計量を算出する.

$$K_2 = nm_2 / (n-1) = 124.2,$$

$$K_3 = n^2 m_3 / \{(n-1)(n-2)\} = -42.5 \dots\dots(22)$$

母集団が Gauss 形るとき, 確率変量 $t = K_3 / \{\sqrt{K_2}\}^3$ は平均値がゼロ, 分散値が

$$\sigma_t^2 = 6n(n-1) / \{(n-2)(n+1)(n+3)\} \dots\dots(23)$$

の Gauss 分布でじゅうぶん近似されることが証明されており, (21), (22) 式から今の場合 $t = -0.0306$, $\sigma_t^2 = 0.0277$ となり, $|t|/\sigma_t = 0.0124$ である. 標準正規確率積分表から $P\{|t|/\sigma_t \geq 1.645\} = 0.10$ で, $0.0124 < 0.10$ であるから, 10% の危険率をもった広い棄却域を設けても母集団が Gauss 形であるとの仮説は採択されうる. さらにこの Gauss 性の忠実さは $P\{|t|/\sigma_t \geq 0.01253\} = 0.99$ の性質と照せばきわめて明白であろう.

(ii) **正規確率紙における正規性の判定** Fig. 6 の正規確率紙の縦座標は, 中央の 50% 目盛から $F(u)\%$ 目盛の位置まで実距離が次式で与えられる u cm ($u=0$ は 50% 目盛の点) にとつてある.

$$F(u) = 100 \cdot \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\langle u^2/2 \rangle} du \quad \dots\dots(24)$$

したがって実測した確率密度分布曲線 $P(x)$ について level x_i までの累積確率 y_i (%) を算出し, これを正規確率紙上に plot すれば縦軸 $y_i\%$ 目盛の位置は 50% 目盛の位置から, $y=100 \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\langle u^2/2 \rangle} du$ で算出される u_i cm の実距離にあるはずである. もし実測点 (x_i, y_i) が正規確率紙上ですべて同一直線 $u_i = ax_i + b$ 上にのるならば,

$$y = 100 \int_{-\infty}^x P(x) dx = 100 \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\langle u^2/2 \rangle} du$$

$$=100 \int_{-\infty}^{ax+b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

$$=100 \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} (1/a)} \exp\left\{-\frac{[x-(-b/a)]^2}{2(1/a)^2}\right\} dx$$

..... (25)

から、実測の $P(x)$ は平均値 $-(b/a)$ 、分散 $(1/a)^2$ の Gauss 分布に合致する。Gauss 形の適合性は確率紙上の直線性にかかっており、したがって、 y_i から正規確率積分表を用い算出した u_i 値と x_i 間に最小 2 乗法を適用する。Gauss の正規方程式とその係数行列式における対角要素の余因数を用い、残差の自乗和から算出した $u=ax+b$ の直線関係¹⁰⁾は、Fig. 6 の場合、

$$a=0.090 \pm 0.00052, b=-2.99 \pm 0.0184 \text{ (26)}$$

であり、 a, b の標準偏差の値から (u_i, x_i) 間の直線性すなわち母集団の Gauss 分布適合性がうなずける。ただし Gauss 分布の平均値は $-(b/a)=33.3$ 、標準偏差は $1/a=11.1$ で Fig. 6 のグラフ上から読みとった値と一致している。

〔B〕 出力波に対する理論分布曲線の実験的確認

不規則 energy 出力波の輝度変調写真に対する統計処理から、まず分布の母数 m_E, ρ_E (したがって固定した E_2 level を観測写真上における E_1 level の読みとりと同じ目盛で読みとることにより、 $E_0=\rho_E \cdot E_2$ が直ちに算出される)、 m などを算出して 5・1 における $P(E_1|E_2)$ の各表示に代入し、 E_1 流通とともにえがかせた各理論分布曲線を、実験的なひん度分布曲線と比較検討した結果はつぎのごとくである。ただし、特に Fig. 1 で積分回路を取り除いた自乗瞬時出力波に対しては、Gauss 分布をなす 1 変量の自乗分布が $m=1/2$ の Γ -分布に従い、母数 m が条件 level E_2 の存在に無関係であること⁵⁾から、あらかじめ m を $1/2$ に固定して理論分布式 $P(E_1|E_2)$ をえがき、積分回路がある場合のような積率法による m 算出の方法は採らなかった。〔(2) で $TW=1/2$ は不確定性関係を示す〕。確率密度曲線から累積確率分布 $\int_0^{E_1} P(E_1|E_2) dE_1$ の算出には planimeter を用いた。

(i) 積分回路を取り除いた場合 (m は $1/2$ に固定)

(a) Table 1 は条件付確率分布の輝度変調写真から実測したひん度分布と、この標本値から算出した m_E, ρ_E の値を $m=1/2$ とともに (5) 式に代入して求めた理論値 $P(E_1|E_2)$ (Bessel-分布) との比較を示す。

(b) Fig. 8 はこの graph 図示であり、Fig. 9 は累積ひん度分布での理論との一致を示す。理論分布曲線がなめらかにえがかれるよう、×印で Table 1 以

E_{1i}	f_i	$E_{1i} \cdot f_i$	$f_i / \sum f_i$ frequency distribution	$P(E_1 E_2)$ Bessel distribution
1	181	181	0.448 0	0.392 7
3	78	234	0.193 1	0.185 0
5	50	250	0.123 7	0.116 0
7	34	238	0.084 1	0.077 6
9	23	176	0.056 9	0.053 5
11	16	271	0.039 6	0.038 2
13	10	130	0.024 7	0.026 4
15	5	75	0.014 8	0.018 7
17	? 3	51	0.007 4	0.013 1
19	? 2	38	0.004 9	
21	? 1	21	0.002 4	
sum	404	1 611		

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2=2.5, \tau=0.08 \text{ ms}, m_E=\langle E_1 \rangle = \frac{\sum E_{1i} f_i}{\sum f_i} \simeq 4.0, \\ \rho_E=0.6, E_0=1.5 \end{array} \right.$$

Table 1 Experimental frequency distribution and calculation of Bessel distribution ($m=1/2$)

Fig. 8 Experimental frequency distribution and theoretical Bessel distribution ($m=1/2$, $\tau=0.08$ ms, $E_2=2.5$, $\rho_E=0.6$)

外の理論値も算出し、理論と実験の一致は良好である。

(c) (10), (11) 式で m が大のとき Bessel-分布が偏移 Γ -分布で近似されることを示したが、Fig. 10 は、 m が小 ($1/2$) のとき上の Bessel-分布がいかに偏移 Γ -分布 (10) で近似されにくいことを実証している。

(d) (8) (9) 式で $E_0(=\rho_E \cdot E_2)$ が小のとき Bessel-分布が Γ -分布で近似されることを示したが、Fig. 11 は、多くの実測ひん度分布曲線の中から ρ_E のじゅうぶん小さい場合を抽出し、これが (8) 式の Γ -分布でよく似されることを実証している。

(ii) 積分時間 $T=1.06$ ms の場合 (m は積率法

Fig. 9 Cumulative frequency distribution and Cumulative Bessel distribution ($m=1/2$, $\tau=0.08$ ms, $E_2=2.5$, $\rho_E=0.6$)

Fig. 10 Experimental frequency distribution and theoretical biased Γ -distribution ($m=1/2$, $\tau=0.08$ ms, $E_2=2.5$, $\rho_E=0.6$)

による)

(a) 条件付確率分布の実測ひん度分布(×印)と Bessel-分布表示(5)式との一致を、(12), (13)式の手法から両対数方眼紙上で確認した結果が Fig. 12 であり、理論との一致がまず直察される。Bessel 分布での適合性を、[A](ii) と全く同様、両対数方眼紙上 (X_i, Y_i) 間の直線(傾斜 45°)の適合性で判断するため、 $u_i = \log X_i$ と $v_i = \log Y_i$ 間に最小自乗法を適用し、直線関係 $v = au + b$ の係数 a, b に対する標準偏差¹⁰⁾ σ_a, σ_b から直線性の不確かさを定量的に算出する。Fig. 12 の data に対し正規方程式に基づく観測処理を行なった結果は、

$$a = 1.030 \pm 0.0468, \quad b = 1.511 \pm 0.1107 \quad \dots (27)$$

Fig. 11 Experimental frequency distribution and theoretical Γ -distribution ($m=1/2$, $\tau=0.16$ ms, $E_2=2.3$, $\rho_E=0.053$)

Fig. 12 Graphical representation of experimental frequency distribution ($T=1.06$ ms, $E_2=23$, $\tau=1$ ms, $\rho_E=0.088$, $E_0=2.04$, $m_E=25.04$, $m=5.7$)

であり、明白にこう配 1 の直線関係が見いだされ、母集団の Bessel 分布適合性がうなずける。

(b) Fig. 13 はこれが m 大のとき偏移 Γ -分布でも近似されることを (14), (15) 式の手法で実証している(分布の上り坂をたどる標本点は×印, 下り坂は●印)。

(c) Fig. 14 は、特に ρ_E がじゅうぶん小の場合の実測ひん度分布曲線をえらび、これが E_0 小において Γ -分布で近似されることを $E_0=0$ とした (14), (15) 式の手法で実証している。

(iii) 相関関数 $\rho_E(\tau)$ の実測曲線 ($m=1/2$) 遅延時間 τ を phantastron の弛張充電時定数 CR に

Fig. 13 Graphical representation of experimental frequency distribution ($T=1.06$ ms, $E_2=23$, $\tau=1$ ms, $\rho_E=0.088$, $E_0=2.04$, $m_E=25.04$, $m=5.7$).

Fig. 14 Graphical representation of experimental frequency distribution ($T=1.06$ ms, $E_2=23$, $\tau=5$ ms, $\rho_E=0.006$, $E_0=0.14$, $m_E=22.85$, $m=9.9$).

Fig. 15 Autocorrelation function ($m=1/2$, $W=4.43$ kc)

より種々変えた場合の各実測写真から $\rho_E(\tau)$ を算出し、 τ とともに plot したのが Fig. 15 である。実測値からの $\rho_E(\tau)$ (X : 実験値) はつねに正で、(18)、(19) 式から直ちに求まる理論式：

$$\rho_E(\tau) = \left(\frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau} \right)^2 \quad (\geq 0) \quad \dots\dots (28)$$

と一致した傾向を与えている。graph 上から読みとった $\rho_E(\tau)$ の τ 軸上相隣るゼロ間隔は 0.13 ms で、(20) 式に $W=4.5$ kc (4(ii) 参照) を代入して算出した $\Delta\tau \approx 0.11$ ms の理論値とよき一致をみせている。

7. 結 言

相異なる 2 時点間の相関効果を強く反映する条件付確率分布の 1 観測法として、Schmitt trigger と phantastron の組み合わせにより、別に固定した条件 level との交差点を起点として τ 秒遅延した輝度変調用 pulse をつくり、条件付確率分布の標本集合として Braun 管面上に輝度変調 spot の集合を実現させた。不規則波としては、特に帯域幅を限定した白い雑音波の energy 動揺をつくり、理論的な条件付確率分布とこの観測法による実測結果を比較検討した結果は、条件付確率分布の形状と相関関数形の両面においてよき一致を示している。

終わりに、日ごろご教示を措きまれぬ京大・理・高橋勲教授をはじめ、観測と討論に援助いただいた福地勲・山口静馬・青山敏保・川上秀彦の 4 氏に深謝の意を表する。

参考文献

- 1) N. Wiener: "Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series", Wiley, New York (1949)

oothing of Stationary Time Series", Wiley, New York (1949)

- 2) C. E. Shannon: Bell System Tech. J., **27**, 379 & 623 (1949)
- 3) S. O. Rice: Bell System Tech. J., **23**, 282 (1944) & 46 (1945)
- 4) 太田：計測自動制御学会第 3 回論文講演, 31/46(1964)
- 5) 太田：計測と制御, **3**, 8, 9/25 (1964)
- 6) 太田：応用物理, **33**, 9, 20/29 (1964)
- 7) M. Ōta: Proc. of the 7th Japan National Congress for App. Mech., 317/322 (1957)
- 8) 東京工大編：“統計工学ハンドブック”, 技報堂(1953)
- 9) 太田：第 10 回応用力学論文抄録集 IV, No. 410(1960)
- 10) 田中：応用数学—数値計算法, 横書店 (1959)

付録 1: RC 積分回路による平均演算

Fig. 1 で、積分回路 (impulse 応答 $h_1(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, ただし $\alpha \equiv 1/T$, $T=RC$) の出力 $E(t)$ は入力雑音波 $f(t)$ を用いてつぎのごとく表現される。

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^\infty f^2(t-\tau) h_1(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t f^2(\tau) h_1(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots (29) \end{aligned}$$

これと忠実な平均演算 $\int_0^\infty f^2(t-\tau) h_0(\tau) d\tau$ ($h_0(\tau) = \frac{1}{T}$ ($0 \leq \tau \leq T$); $h_0(\tau) = 0$ ($\tau < 0, \tau > T$)) との差異について検討する。impulse 応答 $h_1(t)$ と $h_0(t)$ にそれぞれ対応する伝達関数 $H_1(s) = 1/(1+Ts)$ と $H_0(s) = (1-e^{-Ts})/Ts$ の両者は、 $s=0$ (DC) の点と $Ts \gg 1$ の領域で一致する。したがって、DC 付近を除いた低周波域が両者の差異を特徴付けており、RC 回路へはいる不規則波のうちこの領域におちる低周波成分に対して $h_1(t)$ と $h_0(t)$ は互いに異なった応答を示し、

誤差の原因になる。つぎに定量評価する。

3 dB 減衰を許容すれば、周波数伝達関数 $H_1(j\omega)$ の bode 線図における折点周波数 $f_0=1/(2\pi T)$ ($T=RC$) が、 $Ts=1$ となり、 RC 積分回路の平均演算が不忠実となる下限周波数だと一応評価できる。しかし、低周波域のうちでも DC 成分は忠実な平均演算を与えるので誤差評価の対象には、 RC 回路への入力 $f^2(t)$ に関

$$G(f) = 4 \int_0^\infty \rho_f^2(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = 2 \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau} \right)^2 \cos 2\pi f\tau d\tau = \begin{cases} \frac{1}{W} \left(1 - \frac{|f|}{2W} \right), & |f| \leq 2W \\ 0, & |f| > 2W \end{cases} \quad \dots\dots (30)$$

で与えられる (Dirichlet 形積分)。ただし 4(ii) の考察から雑音波 $f(t)$ は方形帯域 $[0, W]$ ($W=4.5$ kc) をもつとみなした。

積分時定数 $T=1.06$ ms の RC 回路に対する折点周波数 f_0 は 150 c/s であり、他方、この回路への入力 power spectrum は周波数ゼロで $1/W$ から周波数 $2W$ でゼロになるまで直線的に減少する三角 spectrum をもつ。したがって RC 回路の平均演算が不忠実である入力周波数範囲 $[0, f_0]$ の power が全 power に対して占める誤差の割合は、相似三角形の面積の比が対応辺の長さの自乗比に比例する性質から、 $\{(2W)^2 - (2W - f_0)^2\} / (2W)^2 = 0.033$, すなわち 3.3 % に過ぎない。一般に f_0 すなわち T 大で、しかも万能ろ波器により W が大なるほど誤差が小さくなる。

付録 2: E_2 level での交差の仕方

Fig. 5 で E_2 level を正と負の両こうばいで切る交差を起点とした輝度変調 E_1 spot をつくるか、正こう

$$\int_0^\infty d\dot{E}_2 \int_{E_2 - \dot{E}_2 dt}^{E_2} dE_2 \int_{E_1}^{E_1 + dE_1} P(E_1, E_2, \dot{E}_2) dE_1 = dt dE_1 \int_0^\infty \dot{E}_2 P(E_1, E_2, \dot{E}_2) d\dot{E}_2 \\ = dt dE_1 P(E_2) P(E_1|E_2) \int_0^\infty \dot{E}_2 P(\dot{E}_2|E_1, E_2) d\dot{E}_2 = dt dE_1 P(E_2) P(E_1|E_2) \langle \dot{E}_2 \rangle_{E_1, E_2}^+ \quad \dots\dots (31)$$

で与えられ、 $\langle \dot{E}_2 \rangle_{E_1, E_2}^+$ は正こう配 $\dot{E}_2$ の条件付平均値であり、積分の第一平均値定理に留意した。もし $\rho(E_1, \dot{E}_2), \rho(E_2, \dot{E}_2)$ がじゅうぶん小ならば E_1, E_2 の関数である $\langle \dot{E}_2 \rangle_{E_1, E_2}^+$ は定数* となり、(31) 式は level E_2 を固定** して目的の条件付確率密度 $P(E_1|E_2)$ の情報を提供する。 $E_2=E(t)$ は $\tau=0$ とした $E_1=E(t+\tau)$ 値であるから $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ と $\rho(E_2, \dot{E}_2)$ の二つは前者のみの調査でじゅうぶんこの値が小さいか否かをつぎに調べる。まず (19) 式からつぎの表示を

入る DC 成分を除外した power spectrum を取り上げる。このことは、 $f^2(t)$ の自己相関関数 $\langle f^2(t)f^2(t+\tau) \rangle = \rho_E(\tau) \sigma_E^2 + \langle f^2(t) \rangle^2$ の代わりに $\rho_E(\tau) (= \rho_f^2(\tau))$ を用いることに対応し、(16), (17) 式から明らかである。Wiener-Khinchine の定理¹⁾ を適用して、 RC 回路入力のこの power spectrum は、

入配のみでの交差を起点とした E_1 spot をつくるかの差異は、 τ が小のとき E_1 spot が E_2 level の上下に分布するか、上側のみ局在するかとの差異となって現われる。この差異が現われるのは、 $\tau \rightarrow 0$ で E_2 と E_1 が効果的な相関 $\rho(E_1, E_2) (\equiv \rho_E)$ をもつようになるからよりは、主に $\tau \rightarrow 0$ で E_1 が E_2 level での傾斜 $\dot{E}_2$ と相関 $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ をもつようになるからで、 E_2 level をどこにとるかより、 E_2 level でどのようによぎるか、正こう配でか、負こう配でか、が問題となる。 τ の大いさや不規則波 $E(t)$ 自身の性質によって $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ がじゅうぶん小となるときは、正こう配のみでの交差を起点とした E_1 spot をつくってじゅうぶんである。多くの場合、変動の多様さを拘束するわくとしての帯域幅 W を広くとるほど E_1 と $\dot{E}_2$ 間の拘束もますます薄れゆくこと疑いない。つぎに以上の事実を 5・2 でのべた自乗瞬時出力波 $E(t) (= f^2(t))$ について証明する。

まず $E(t)$ が $(t, t+dt)$ 区間に E_2 level を正の傾斜で通った後、 E_1 と E_1+dE_1 の level 区間に滞在する確率は、容易に

入導き出しておく。

$$\rho_f'(\tau) = \left(\frac{\cos 2\pi W\tau}{\tau} - \frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau^2} \right) \quad \dots\dots (32)$$

$$\rho_f''(\tau) = \left[\left(\frac{2}{(2\pi W)^2 \tau^3} - \frac{1}{\tau} \right) \sin 2\pi W\tau - \frac{2 \cos 2\pi W\tau}{2\pi W\tau^2} \right] 2\pi W \quad \dots\dots (33)$$

一方、 $\langle f(t) \rangle = 0$ と規格化されない自己相関関数 $\Psi(\tau) \equiv \langle f(t)f(t+\tau) \rangle$ および関係：

$$\langle \dot{E}_2 \rangle = 2 \langle f(t)f'(t) \rangle = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \langle f(t)f(t+\tau) \rangle \Big|_{\tau=0} \\ = 2 \Psi(0) \rho_f'(0) = 0 \quad \dots\dots (34)$$

$$\langle E_1 \dot{E}_2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(t+\tau) E'(t) dt$$

* 分布は実験的には全標本数に対する百分比で与えられるから、 $\langle \dot{E}_2 \rangle_{E_1, E_2}^+$ が定数なら、確率の規格化条件から、この定数は分母子消える。

** 条件 level E_2 を固定するときは、(31) 式を $P(E_2)$ で割った表示に対応する。

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \left[E(t+\tau) E(t) \right]_0^T \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T E'(t+\tau) E(t) dt \right\} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \tau} \langle E(t+\tau) E(t) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \tau} \langle E_1 E_2 \rangle \\
&\quad \dots\dots (35)
\end{aligned}$$

を $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ の定義式に代入する。ここに (32) 式と

$$\begin{aligned}
\langle f^2(t) f'^2(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) f'(t) df(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \left[f^3(t) f'(t) \right]_0^T - \int_0^T (2f^2(t) f'^2(t) + f^3(t) f''(t)) dt \right\} \\
&= -2 \langle f^2(t) f'^2(t) \rangle - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \langle f^3(t) f(t+\tau) \rangle \Big|_{\tau=0} \quad \dots\dots (37)
\end{aligned}$$

から導かれる関係 $\langle f^2(t) f'^2(t) \rangle = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \langle f^3(t) f(t+\tau) \rangle$, ならびに相関 $\rho_f(\tau)$ をもつ二次元 Gauss 分布の結合積率 $\langle f^3(t) f(t+\tau) \rangle = 3 \Psi^2(0) \rho_f(\tau)$ を利用した。けっきょく,

$$\begin{aligned}
\rho(E_1, \dot{E}_2) &= \frac{1}{\sigma_{E_1} \sigma_{\dot{E}_2}} \langle E_1 \dot{E}_2 \rangle = -\frac{\sigma_E}{\sigma_{\dot{E}_2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_E(\tau) \\
&= \frac{-1}{\sqrt{-2\rho_f''(0)}} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_E(\tau) \quad \dots\dots (38)
\end{aligned}$$

を得る。(33) 式からの表示 $\sigma_f''(0) = -(2\pi W)^2$ と (18), (19) 式の $\rho_E(\tau)$ 値を用いて, いまの場合,

$$\begin{aligned}
\rho(E_1, \dot{E}_2) &\equiv \rho[E(t+\tau), E'(t)] \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}(\pi W\tau)^2} \left\{ \sin 4\pi W\tau - \frac{\sin^2 2\pi W\tau}{\pi W\tau} \right\} \\
&\quad \dots\dots (39)
\end{aligned}$$

の具体的表現が結果され, $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ は $\tau=0$ でゼロであり^{*1}, 大なる τ では $1/\tau^2$ に比例して急激に減少し, (39) 式の { } が小さな有界値に留まることから, 白色雑音波の帯域幅 W を大きくとって, ほとんど τ の全域にわたってこの相関をじゅうぶん小ならしめることができる。しかも τ と W はつねに積 $W\tau$ の

ノ $E(t)$ の有界性を用いた。さらに (17) 式 ($\tau=0$) から導いた $\sigma_E^2 = 2\Psi^2(0)$ と (34) 式を考慮して得られる関係:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\dot{E}_2}^2 &= \langle \dot{E}_2^2 \rangle = 4 \langle f^2(t) f'^2(t) \rangle = -4 \Psi^2(0) \rho_f''(0) \\
&\quad \dots\dots (36)
\end{aligned}$$

に注目する。ここに, $f(t)$ と $f'(t)$ の有界性を仮定!

ノ形で $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ に影響する。

この実験操作を正当化できる τ の範囲や誤差は, $\rho(E_1, \dot{E}_2)^{*2}$ をその τ の範囲内で工学的要求からどの程度に許容できるかによっていちおう評価でき, このカギとなる (39) 式の $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ を $W\tau$ とともにグラフ図示したのが Fig. 16 である。 $W\tau \geq 0.5$ の範囲で実験法がいちおう正当化できること明白に読みとれ, $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ がさらに多く許容されるのであれば τ の全域にわたる概略の評価 ($W\tau < 0.5$ を満たす成分周波数域の入力全帯域に対する比で % 誤差が見積もられる) も可能であり, この傾向は W が大なるほど顕著である。

いま一つ, $\tau \rightarrow 0$ すなわち $\rho_E(\tau)$ が 1 に近づくときは, 変形 Bessel 関数の漸近表示 $I_n(\tau) \sim e_z / \sqrt{2\pi z}$ を用い, (5) 式からつぎの近似表示が見いだされる。

$$\begin{aligned}
P(E_1 | E_2) &\simeq N(E_1; m_E, \sigma_E'^2) \\
&\quad \cdot (\text{平均 } m_E, \text{ 分散 } \sigma_E'^2 \text{ の正規分布}) \quad \left\{ \dots\dots (40) \right. \\
&\quad \left. \begin{aligned} \text{ただし, } m_E &= ms(-\rho_E) + \rho_E E_2, \\ \sigma_E'^2 &= ms^2(1-\rho_E)^2 + 2\rho_E E_2 s(1-\rho_E) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

τ がじゅうぶん近づくときは, $P(E_1 | E_2)$ の分布に関する個性的な種々の情報は圧縮されて, あらかじめ固

Fig. 16 Graphical representation of $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ [when $W\tau = n/2$ (n : positive integer), $\rho(E_1, \dot{E}_2) = 0$]

*1 $4\pi W\tau < 1$ のとき, $\rho(E_1, \dot{E}_2) \simeq \frac{\sqrt{2}}{3} (2\pi W\tau)$ の近似表示が可能である。

*2 E_1, E_2 間の相関には, 通常の一次相関 $\rho(E_1, \dot{E}_2)$ 以外に高次相関の配慮が必要である^{6), 7), 9)}。

定した E_2 level 付近に δ 関数的に集中し*, 研究対象である条件付確率の分布形状としての母数 m, s, ρ_E による個性的特徴も消えてゆく点に留意する必要がある。

付録 3: τ 時間内での交差点の数え落とし

$E(t)$ が E_2 level を正のこう配で横切る 1 秒間あたりの交差回数の希望値を算出して, 平均として遅延時間 τ 内に 2 個以上交差する機会 (Fig. 5 の※印) の確かに少ないことをつぎに示す. すでに, このような $E(t)$ と $E'(t)$ が無相関 ((39) 式で $\tau=0$) となるような波形 $E(t)$ について, 1 秒間に E_2 level を横切る (正, 負のこう配を問わぬ) 交差の期待数が次式で与えられることを発表している⁹⁾.

$$\begin{aligned} N(E_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\Psi_E''(0)) \cdot P(E_2) \\ &= \sqrt{-\frac{2}{\pi} \rho_E''(0) \cdot \sigma_E} P(E_2) \quad \dots\dots (41) \end{aligned}$$

ただし, $\Psi_E(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau) \rangle = (\rho_E(\tau)\sigma_E^2 + \langle E(t) \rangle^2)$ の関係を用い, ρ_E^2 は 1 変量の分布 $P(E)$ の分散値である. $P(E)$ は (1) 式の周辺分布としての Γ -分布⁴⁾ であるから, (41) 式は,

$$\begin{aligned} N(E_2) &= \sqrt{-\frac{2}{\pi} \rho_E''(0)} \frac{\sigma_E}{\Gamma(m)s^m} E_2^{m-1} \\ &\quad \times \exp\{-E_2/s\} \quad (s = \langle E \rangle/m) \quad \dots\dots (42) \end{aligned}$$

となる. (28) 式の $\rho_E(\tau)$ 値を 2 回微分 ($\rho_E''(0) = -8/3 \pi^2 W^2$) して (42) 式へ代入すれば,

$$\begin{aligned} N(E_2) &= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\pi}}{W} \frac{\sigma_E}{\Gamma(m)s^m} E_2^{m-1} \exp\{-E_2/s\} \\ &\quad \dots\dots (43) \end{aligned}$$

が結果される. $E(t)$ が Rayleigh 分布 ($m=1 \therefore s = \langle E \rangle$) の場合についてその order を評価しておこう. いま固定 level E_2 を平均値 $\langle E \rangle$ の値に取るとき, この level と $E(t)$ との毎秒の交差希望数は $1.04 W$, したがって平均の交差間隔は $0.961/W$ 秒で, ここに Γ -分布の積率法から $\sigma_E/\langle E \rangle = 1/\sqrt{m}$ (動揺率)⁵⁾ の関係が導かれることを利用した. 正のこう配でのみ $E_2 (= \langle E \rangle)$ level を切る交差の期待数は上の半分で, 平均交差間隔は $1.92/W$ 秒, $W = 4.5 \text{ kc}$ であるから 0.43 ms の平均交差間隔となる. 実験に用いた遅延時間の τ 値はこれより小さく, τ 時間内に 2 個以上交差する機会は明らかに小さい. また (43) 式から level

$$M = \begin{bmatrix} \langle X_1^2 \rangle & \langle X_1 Y_1 \rangle & \langle X_1 Y_2 \rangle & \langle X_1 X_2 \rangle \\ \langle Y_1 X_1 \rangle & \langle Y_1^2 \rangle & \langle Y_1 Y_2 \rangle & \langle Y_1 X_2 \rangle \\ \langle Y_2 X_1 \rangle & \langle Y_2 Y_1 \rangle & \langle Y_2^2 \rangle & \langle Y_2 X_2 \rangle \\ \langle X_2 X_1 \rangle & \langle X_2 Y_1 \rangle & \langle X_2 Y_2 \rangle & \langle X_2^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_E^2, & 0, & \sigma_E^2 \rho_E'(\tau), & \sigma_E^2 \rho_E(\tau) \\ 0, & -\sigma_E^2 \rho_E''(0), & -\sigma_E^2 \rho_E''(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E'(\tau) \\ \sigma_E^2 \rho_E'(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E''(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E''(0), & 0 \\ \sigma_E^2 \rho_E(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E'(\tau), & 0 & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (48)$$

E_2 を流通させたときの各 level における交差期待数はその level における分布密度の重みに応じて変化する.

$E(t)$ が (t_1, t_1+dt_1) 時区間に固定 E_0 level を正の傾斜で横切った後, 再び (t_2, t_2+dt_2) 時区間に同じ E_0 level を正の傾斜で横切る確率は, 厳密には S.O. Rice と同じ手法³⁾ を用いて,

$$dt_1 dt_2 \int_0^\infty d\dot{E}_1 \int_0^\infty d\dot{E}_2 \dot{E}_1 \dot{E}_2 P(E_0, \dot{E}_1, E_0, \dot{E}_2) (t_2 = t_1 + \tau) \quad \dots\dots (44)$$

から算出され, ここに $P(E_1, \dot{E}_1, E_2, \dot{E}_2)$ は 4 変量結合分布で, $E_i = E(t_i)$ ($i=1, 2$) は level E_0 値に固定し, $\dot{E}_i = E'(t_i)$ である. しかし結合分布 $P(E_1, \dot{E}_1, E_2, \dot{E}_2)$ の厳密な陽表示は導出が困難であり, $E(t)$ が Gauss 形定常確率過程をなす単純な場合のゼロ交差間隔においてすら, S.O. Rice⁹⁾ の言を借りて, 何人もまだ満足な解を与えていない.

交差点を数えおとす確率が小とともにどのように少なくなっていくか大略の評価を与えるため, 固定 level を平均値 $\langle E \rangle$ にとり, さらに結合 Γ -分布 (1) が m のいくらか大きい値に対し二次元正規分布で近似できることから⁴⁾, 特に動揺率の小さい (m 大) 不規則 energy 波形 $E(t)$ に着目した. すなわち $P(E_1, \dot{E}_1, E_2, \dot{E}_2)$ として四次元正規分布, 正負こう配の等量性から $\langle \dot{E}_1 \rangle = \langle \dot{E}_2 \rangle = 0$ と仮定して自然である.

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= E(t) - \langle E \rangle, \quad X_2 = E(t+\tau) - \langle E \rangle \\ Y_1 &= \frac{\partial E(t)}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial E(t+\tau)}{\partial t} \quad (\langle E'(t) \rangle = 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (45)$$

の変量 X_i, Y_i ($i=1, 2$) を採用すれば (44) 式の表示は,

$$dt_1 dt_2 \int_0^\infty Y_1 dY_1 \int_0^\infty Y_2 dY_2 P(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \Big|_{X_1=X_2=0} \quad \dots\dots (46)$$

を与え, S.O. Rice³⁾ と同一の手法を採用でき,

$$\begin{aligned} P(0, Y_1, 0, Y_2) &= \frac{|M|^{-(1/2)}}{4\pi} \exp \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{2|M|} (M_{22} Y_1^2 + 2 M_{23} Y_1 Y_2 \right. \\ &\quad \left. + M_{33} Y_2^2) \right\} \quad \dots\dots (47) \end{aligned}$$

であり, ここに M_{ij} は共分散 Matrix:

$$\begin{bmatrix} \sigma_E^2, & 0, & \sigma_E^2 \rho_E'(\tau), & \sigma_E^2 \rho_E(\tau) \\ 0, & -\sigma_E^2 \rho_E''(0), & -\sigma_E^2 \rho_E''(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E'(\tau) \\ \sigma_E^2 \rho_E'(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E''(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E''(0), & 0 \\ \sigma_E^2 \rho_E(\tau), & -\sigma_E^2 \rho_E'(\tau), & 0 & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (48)$$

* 正規分布はその分散がじゅうぶん小さくなるとき δ 関数形分布形状となる.

における (i, j) 要素の余因子である*。 σ_E^2 は $E(t)$ の分散であり、 $\rho_E(\tau)$ は (18), (19) 式で与えられた $E(t)$ の相関係数である。 (47) 式を (46) 式に代入し S.O.Rice と同一の算出過程を経て、 (46) 式はつぎの確率陽表現**となる³⁾。

$$\frac{1}{4\pi^2} dt_1 dt_2 \frac{|M|^{3/2}}{(M_{22}^2 - M_{23}^2)} (1 - H \cot^{-1} H) \left\{ \dots \dots (49) \right.$$

ただし、 $H = M_{23} [M_{22}^2 - M_{23}^2]^{-1/2}$

けっきょく、 $E(t)$ が正の傾斜で t_1 時点に $\langle E \rangle$ level を横切ることが知られているとき、再び正の傾斜で $(t_2, t_2 + dt_2) [\equiv (t_1 + \tau, t_1 + \tau + d\tau)]$ 区間内に同じ $\langle E \rangle$ level を横切る確率は再び S.O.Raice と同様なやり方³⁾で、

$$P(\tau) d\tau = \frac{d\tau}{2\pi\sigma_E^6 \sqrt{-\rho_E''(0)} \sqrt{M_{22}^2 - M_{23}^2}} \times (1 - \rho_E^2(\tau))^{-(2/3)} [1 - H \cot^{-1} H] \dots (50)$$

の陽表現となり、これは (48) 式と (18) 式から具体的に算出可能である。

しかし (50) 式の表現はまだ複雑であり $\tau \rightarrow 0$ における近似表現すら導出困難である。大略の評価のため、 $E(t)$ が平均値 $\langle E \rangle$ の回わりにしや断周波数 W の低

域ろ波器を通った白色雑音と同じ相関構造 ((18) 式から $E(t)$ の実際の相関はこれよりさらに少ない) でゆらぐ場合を例にとれば、S.O.Rice の表示 ($\tau \rightarrow 0$):

$$P(\tau) d\tau \doteq \frac{\tau}{30} (2\pi W)^2 d\tau \dots (51)$$

をそのまま流用しうる。ただし $t_1 = 0$ にとる。 (51) 式はもともと S.O.Rice³⁾ が zero level (いまの場合 $\langle E \rangle$ level に相当する) を、原点で正こう配で横切り、 τ 秒後負こう配で横切る場合の近似表現として導出したものであったが 2 回目に横切る傾斜が負の場合と正負任意の場合で $\tau \rightarrow 0$ のとき同一値になる彼の結論***、そして何より τ が小さくなればなるほど τ 秒後における働きが τ のゼロ近傍に影響を与えにくくなる性質から、1, 2 回目とも正こう配で横切る場合 (50) 式の近似表現もまた (51) 式で与えられる。けっきょく、 $E(t)$ が正傾斜で $\tau = 0$ 時点に $\langle E \rangle$ level を横切り、 τ 秒時間内に再び $\langle E \rangle$ level を正傾斜で横切る確率は、波形の動揺率が小さく、 W 以下の低域雑音と同じ相関構造で大略評価して、

$$\int_0^\tau P(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{60} (2\pi W\tau)^2 \dots (52)$$

すなわち、 τ の 2 乗に比例して急速に減衰してゆく。しかも評価はつねに (19), (39) 式と同様、 $W \cdot \tau$ の積の形で効く。

*** M.F.Campbell の実験的確認もあわせ示されている³⁾。

* 共分散 Matrix M は S.O.Rice³⁾ の手法で同様に導き出されるが、各行列要素に反映させた相関係数 $\rho_E(\tau)$ が white noise の相関係数 $\rho_f(\tau)$ と (18) 式の関係で結ばれる点が S.O.Rice の表現と異なっている。

** $\cot^{-1} H = \pi - \cot^{-1} (-H)$ の関係に留意³⁾。

寄 書 欄 に つ い て

会員相互の知識の交換のために、論文集には寄書欄を設けてあります。

新しい着想や学術上の所見、実験結果または論文集の論文に関する質問、討

論、意見など、なるべく短かくまとめて (0.5~2 ページ以内) ご投稿くださ

い。