こう配法による最適化制御系の安定*

寺 野 寿 郎**・塚 本 弥 八 郎**

Stability of the Optimizing Control Systems by Gradient Method

Toshiro TERANO and Yahachiro TSUKAMOTO

The Gradient Method is the most basic one among the many optimizing methods and has been studied rather theoretically. The reports of its practical applications are scarce, because there are many difficult problems which must be solved before applying it. There has been no kinetic analysis which shows the quantitative relations among the stability, the settling time, the effects of disturbances and the system-parameters such as the sampling interval, the process time lag, the height of test signal, the proportional gain of adjustment and so on.

This paper is concerned with the theoretical analysis, especially, for the stability problem.

It can be shown that the time lag in the process is a dominant factor on which the system stability depends, and that the stability also depends upon the initial condition since the system has an unstable limit cycle.

Finally some examples by analog simulation are given to examine the theoretical results.

1. 緒 言

連続プロセスの最適化制御にはすでにいろいろな方式^{1)~4)}が考えられているが、プラント効率がわずかに上昇すれば年間の経費節約が大きな額に達するような大規模なプラントではこう配法⁵⁾による最適化制御がひじょうに有効であると思われる。

こう配法は正確なプロセスモデルがわかっていない場合や、あるいはモデルが既知でも未知の外乱が加わるような系にも適用できるので確実さの点ですぐれている。しかし、これを実際のプロセスに応用しようとすると、理論面でも実際面でも多くの検討すべき問題が残っているのに気付く。

本論文はこう配法による最適化制御に伴う問題を理論的に検討したもので、特に対象となるプロセスに時間おくれのある場合に、おくれの大きさ、サンプリング周期、探索信号の大きさ、比例動作のゲイン定数、初期条件などが系の安定にどのような影響をおよぼすかを解析した。

ここで簡単のため2個のパラメータをもつプロセスを考え、その一つのパラメータは調節可能な操作量であるが他方は未知の外乱であるとする。プロセスの評価関数は定常状態ではこれらのパラメータの単峰性関

数であらわされ、過渡状態ではある時間おくれを伴うものとする。このような系は、すでに H. J. Kushner⁶⁾ や S. S. L. Chang⁷⁾ らによって解析され最適な制御動作を与える関係が見いだされているが、これらはプロセスのおくれが無視できる程度に小さいという仮定のもとで評価関数を計算している。

プロセスのおくれを無視するということは、実際には、探索や操作のサンプリング周期をプロセスの時定数に比べてじゅうぶん長くとるということを意味するが、これがあまり長いと山登りに時間がかかりすぎて、外乱に対する速応性が悪くなる。評価関数の傾斜の方向を探索するだけならば、一時的逆応答のないかぎりサンプリング間隔をいくら短くしてもよさそうに思えるが、実はプロセスにおくれがあると初期値が静特性曲線上にないために不安定になる危険が多い。このようにプロセスのおくれを考慮すると最適化制御におけるサンプリング周期、探索信号幅、調節器の比例ゲインなどはおくれの時定数や外乱の特性によって適当に選ばねばならないことがわかる。

2. 基 本 式

仮 定

まずつぎのような仮定をおく。

- (1) プロセス評価関数の特性は非線形の静特性と線形の動特性の直列結合として表わされる。

* 昭和 41 年 2 月 23 日受付

** 東京工業大学制御工学科

Fig. 1 Performance index

- (2) 評価関数は定常状態で円放物面で表わされる (Fig. 1).
- (3) 評価関数のおくれは線形微分方程式で表わされる.
- (4) 外乱の変化はサンプリング周期に比べてゆるやかである.
- (5) プロセスの外乱に対する動特性と操作量に対する動特性は同じである.
- (6) 評価関数の検出および調節動作にはおくれはない.

つぎにこれらの仮定の妥当性について検討する.

(1) の仮定はすべてのプロセスにあてはまるわけではないが、取り扱いの便宜上このように考えた。化学反応プロセスなどを除いてはだいたいこの仮定が満足されると思われる。

(2) の仮定は評価関数が単峰で、その頂点付近だけを問題にする場合はじゅうぶん妥当である。

(3) の仮定は通常のプロセスではつねに許される。

(4) の仮定はとうぜんであり、もしこの仮定が許されないとすれば外乱はノイズと見なされ制御はできない。

(5) および (6) の仮定は必ずしも必要でないが解析の簡単化のためにおいた。

本論文で用いたこの配法による制御動作はつぎのようものである。

まず調整可能なパラメータ x をステップ状に Δ だけ変化させ、これによる評価関数値の変化量を時間 T の後に検出する。つぎにその変化量に比例して x をステ

Fig. 2 Adjust procedure

Fig. 3 Block diagram

ップ状に調整しつぎの時間 T だけその状態を保つ。この動作は Fig. 2 に示すように時間 $2T$ ごとに繰り返される。調節動作はその探索の直前の評価関数値の差に比例するだけでなく、過去のいくつかの値の線形結合であってもよい。これは通常の制御動作の PD、あるいは PD^2 動作に対応する。

上述の仮定にしたがって制御系のブロック線図を作ると Fig. 3 のようになる。制御用計算機には数値計算部、論理演算部、メモリ、サンプラおよびホールドが含まれる。図中点線で囲った部分は制御対象で仮定により操作量 x と外乱 U の非線形関数であらわされる静特性から定常評価関数 η' が定まる。 η' が定まると線形伝達関数 $G(s)$ によるおくれを経て過渡的評価関数 η がきまる。ここで η' は最適化制御系で最大に保ちたい量であるが、われわれがプロセスの出力として実際検出できるのは η だけであって、 η' がどのようになるかはわからない。

記号

いま記号をつぎのように定める。

$A, B, C = \text{positive constants}$

$a_1, a_2, b_1, b_2 = \text{constants}$

$D = \exp(-T/T_p)$

$D_1 = \exp(L/T_p)$

$H_m = \text{a linear function of } Y_m' \text{ s}$

$K = \text{proportional gain of adjustment}$

$L = \text{dead time of process}$

$P = \text{D.C. Component of the input to } N(z)$

$Q = \text{Amplitude of sinusoidal oscillation}$

$x = \text{adjustable parameter}$

$x_n = \text{the value of } x \text{ at } n \text{ th sampling interval}$

$E = \text{amplitude of limit cycle}$

$G(z) = z\text{-transform of linear part}$

$N(z) = \text{discrete describing function of nonlinear part}$

$X_m = x_m + \Delta/2$

$Y_m = \eta_m - \eta_{m-1}$

$Y_m' = \eta_m' - \eta_{m-1}'$

$T = \text{sampling interval}$

T_p =time constant of process

U =disturbance

m, n =running indexes (positive integer)

z = z -transform variable= $\exp(2Ts)$

η =performance index (efficiency)

η' =performance index in steady state

Δ =test signal for seeking the peak

ϕ =phase difference between sampling instant and sinusoidal oscillation=0~1

基礎式

仮定式(2)から定常状態のプロセスの方程式はつぎのようになる。

$$\eta_m' + A(x_m - BU_m)^2 + CU_m^2 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

ここに A, B, C は正の定数で、また η' , x および U は η' の頂点が原点にくるように正規化してある。

プロセスの運動方程式はサンプリング時刻のみに注目すれば線形差分方程式に変換される。いまプロセスを二次おくれ系とすれば動特性は次式であらわされる。

$$\eta_m + b_1\eta_{m-1} + b_2\eta_{m-2} = a_1\eta_{m-1}' + a_2\eta_{m-2}' \quad \dots\dots(2)$$

ただし a_1, a_2, b_1, b_2 は定数。

(1), (2) 式はそれぞれ、プロセスの静特性と動特性をあらわし、両者から η' を消去すればプロセス特性が得られる。つぎに制御装置の式は、添字 m が偶数か奇数で異なり、 Δ を探索信号幅、 K を調節動作の比例ゲインとすれば、

$$x_{2n-1} - x_{2n-2} = \Delta \quad \dots\dots(3)$$

$$x_{2n} - x_{2n-2} = K(\eta_{2n} - \eta_{2n-1})/\Delta \quad \dots\dots(4)$$

(3) 式は頂点の探索動作をあらわし、(4) 式は調節動作をあらわしている。

(1)~(4) 式がここに取り扱う最適化制御系の基本方程式である。

3. 解 析

特性方程式

Y_m および Y_m' をつぎのように定義する。

$$Y_m = \eta_m - \eta_{m-1} \quad \dots\dots(5)$$

$$Y_m' = \eta_m' - \eta_{m-1}' \quad \dots\dots(6)$$

これらの新しい変数を用いて(1)式を書き直すと

$$Y_m' + A(x_m - x_{m-1})(x_m + x_{m-1} - 2BU_{m-1}) = 0 \quad \dots\dots(7)$$

なお、ここでは(4)の仮定にしたがって、 $U_m = U_{m-1}$ としてある。

いま Y_m の奇数番目の項を(2)式より消去すると

$$H_{2n+1} - b_1H_{2n} + b_2H_{2n-1} = Y_{2n+2} + (2b_2 - b_1^2)Y_{2n} + b_2^2Y_{2n-2} \quad \dots\dots(8)$$

ただし

$$H_m = a_1Y_m' + a_2Y_{m-1}' \quad \dots\dots(9)$$

(4), (7), (8), (9) 式から Y_m', Y_{2n} の項を消去すると、つぎのような X_{2n} に関する差分方程式を得る。

$$\begin{aligned} X_{2n+2} + \{AK(2a_1 - a_2 + a_1b_1) \\ + (2b_2 - b_1^2 - 1) - 2AKBU_{2n-1}(a_2 - a_1b_1)/\Delta\} X_{2n} \\ + \{AK(2a_1b_2 - 2a_2b_1 - a_2 + a_1b_1 - a_2b_2) \\ + (b_2^2 - 2b_2 + b_1^2) \\ + 2AKBU_{2n-1}(a_2 - a_1b_1)/\Delta \\ - 2AKBU_{2n-3}a_2b_2/\Delta\} X_{2n-2} \\ - \{AKa_2b_2 + b_2^2 - 2AKBU_{2n-3}a_2b_2/\Delta\} X_{2n-4} \\ - 2AKB\{a_1U_{2n} - (a_2 - a_1b_1)U_{2n-1} \\ + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot U_{2n-2} - a_2b_2U_{2n-3}\} \\ + (X_{2n}^2 - X_{2n-2}^2) \cdot AK \cdot (a_2 - a_1b_1)/\Delta \\ + (X_{2n-2}^2 - X_{2n-4}^2) AKa_2b_2/\Delta = 0 \quad \dots\dots(10) \end{aligned}$$

ただし上式で

$$X_m = x_m + \Delta/2 \quad \dots\dots(11)$$

とおいた。この方程式を解けば系の全挙動が明らかになるゆえ(10)式はいわばこの系の特性方程式である。しかし、これは非線形項をふくんでいるから解析的に解くのはひじょうに困難である。外乱 U の変動が無視できる程度に小さい場合は記述関数法⁸⁾⁹⁾あるいは位相面法¹⁰⁾により系の安定性が解析でき、また過渡状態のだいたいの様子もわかる。プロセスのおくれが高次のときは特性方程式はひじょうに複雑となる。しかし、おくれを一次と仮定してもプロセスの時間おくれが安定性におよぼす影響はじゅうぶん知ることができるので、以下の解析では、プロセスのおくれを一次おくれとむだ時間で近似し、かつ外乱がない場合について検討する。

このとき(2)式の係数はつぎのようになる。

$$a_1 = 1 - D_1D, \quad b_1 = -D, \quad a_2 = b_2 = 0$$

ただし $D = \exp(-T/T_p)$, $D_1 = \exp(L/T_p)$

また T は探索のサンプリング周期の $1/2$

T_p はプロセスおくれの時定数、

L はそのむだ時間である。

特性方程式(10)式はつぎのように簡単になる。

$$X_{2n+2} + \alpha X_{2n} + \beta X_{2n-2} + \gamma(X_{2n}^2 - X_{2n-2}^2) = 0 \quad \dots\dots(12)$$

ただし $\alpha = 2AK(1 - D_1D) - AKD(1 - D_1D) - 1 - D^2$

$$\beta = D^2 - AKD(1 - D_1D)$$

$$\gamma = AKD(1 - D_1D)/\Delta$$

安定の必要条件

(12) 式で表わされる系の安定問題を考えるのにまずその必要条件として線形な部分の安定条件を求めておく。線形差分方程式

$$X_{m+2} + \alpha X_{m+1} + \beta X_m = 0 \quad \dots (13)$$

の安定条件は、特性方程式

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

の根の絶対値が 1 より小さいことから求まる.

$$\therefore 1 + \alpha + \beta > 0, 1 - \alpha + \beta > 0, 1 - \beta > 0 \dots (14)$$

むだ時間がないときは、条件はつぎようになる.

$$1 + D^2 > AK(1 - D) \quad \dots (15)$$

これからたとえば $AK = 1.5$ のとき

$$1 > D > 0.28 \quad \therefore 0 < T/T_p < 1.27 \dots (16)$$

また $0 < AK \leq 1$ なら (15) 式はつねに満足される. 条件(15)式は系が安定するための必要条件であるが(12)式は非線形差分方程式であるからその安定性は係数の値だけでなく初期条件にも依存する. つぎにこれを考えよう.

非線形部の記述関数

X_m の絶対値が大きくなると (12) 式の非線形項はひじょうに大きくなる. したがって (12) 式であらわされる系は不安定なリミットサイクルを持つことが予想される. これを記述関数法で求めるために特性方程式を線形部と非線形部に分割してブロック線図で示すと, **Fig. 4** のようなサンプル値制御回路を得る. ただし, この図ではサンプリング周期を $2T$ として伝達関数を書いてある.

Fig. 4 Block diagram (1)

Fig. 5 Block diagram (2)

さらにこれを書き直すと **Fig. 5** のように線形部 $G(z)$ と, 乗算をふくんだ非線形部 $N(z)$ が直列結合した閉ループになる.

ここで非線形部 $N(z)$ の記述関数を考えよう. $N(z)$ の入出力信号をそれぞれ x_n, y_n とし, x_n がつぎのような正弦波であるとする.

$$x_n = P + Q \sin(4\pi T/T_c)(n + \phi) \quad \dots (17)$$

ただし, T_c はリミットサイクルの周期で, n は整数である. また ϕ はサンプリング周期とリミットサイク

ルの周期との間の位相差で 0 から 1 までの任意の値を取りうる. P は入力信号の直流成分で, Q は $N(z)$ の入口におけるリミットサイクルの振幅である.

このとき出力はつぎようになる.

$$\begin{aligned} y_n &= (x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n) \\ &= Q^2 \sin 4\pi T/T_c \cdot \sin(4\pi T/T_c)(2n + 2\phi + 1) \\ &\quad + 4PQ \sin 2\pi T/T_c \cdot \cos(4\pi T/T_c)(n + \phi + 1/2) \end{aligned} \quad \dots (18)$$

(18) 式の y_n は直流分を含まないから, 一巡ループを考えると x_n にも直流分はない. すなわち $P = 0$ である. したがって

$$y_n = Q^2 \sin 4\pi T/T_c \cdot \sin(4\pi T/T_c)(2n + 2\phi + 1) \quad \dots (19)$$

けっきょく, $N(z)$ の出力は入力 x_n の 2 倍の高調波のみとなる.

このように入出力信号の周波数が異なるときは一般に記述関数法は使用できないが, サンプル値系ではサンプル時点のみに着目すれば高調波を等価的に基本波と見なせる場合がある. まずリミットサイクルの周期 T_c が探索周期 $2T$ の偶数倍の場合を考えよう.

このときは $T_c = 4mT$, ($m = 1, 2, \dots$)

$\therefore \sin 4\pi T/T_c = 0$, すなわち $y_n = 0$ となって持続振動は存在しない.

つぎにリミットサイクルの周期が探索周期の 3 倍の場合には

$$T_c = 6T$$

$$\sin 4\pi T/T_c = \sqrt{3}/2$$

$$\therefore y_n = (\sqrt{3}/2) Q^2 \sin(2\pi/3)(2n + 2\phi + 1) \quad \dots (20)$$

Fig. 6 Output signal of $N(z)$

この場合にかぎり **Fig. 6** に示されるように (20) 式はつぎのような基本周波振動に書き直すことができる.

$$y_n = (\sqrt{3}/2) Q^2 \sin(2\pi/3)(n - 2\phi + 1/2) \quad \dots (21)$$

すなわち, この場合はリミットサイクルが存在しうる.

振動周期が探索周期の 5 倍以上の奇数倍の場合にはこのように高調波と等価な基本周波が存在しない. けっきょく, リミットサイクルが存在するときは, その

周期は必ず探索周期の3倍でなければならない。

(17) および (21) 式から記述関数はつぎのようになる。

$$\begin{cases} |N(z)| = \frac{\sqrt{3}}{2} B \\ \angle N(z) = 2\pi\phi - \pi/3 \end{cases} \quad \dots\dots (22)$$

ここに $\phi=0 \sim 1$ であるから、 $\angle N(z)$ は 300° から -60° までの任意の値をとれる。したがってゲイン条件さえ満足すればリミットサイクルは起こりうる。

このときの線形部のゲインを計算する。

$T/T_c=1/6$ から $\omega=\pi/3 T$ であるから

$$\begin{cases} z = e^{2sT} = e^{2\pi j/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z^{-1} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

したがって

$$|G(j\omega)_{\omega=\pi/3T}| = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta}} \quad \dots\dots (23)$$

(22) および (23) 式からリミットサイクルの振幅は

$$Q = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \alpha\beta - \alpha - \beta}}{r} \quad \dots\dots (24)$$

となる。

4. 安定限界

(24) 式から安定限界時の $Q(x_m)$ の初期値に相当、 D, A, AK などの関係を計算すると Fig. 7 の実線のようになる。斜線で示した部分が安定領域である。 $AK=1.5$ の曲線が途中で縦線で切れているのはこの点で (16) 式の条件にかかるからである。

この図によるとプロセスにおくれがない場合、すな

Fig. 7 Stability limit

わち $T_p=0$ のときには $AK < 1$ ならつねに安定だが、おくれがあると同じゲインでも初期値いかんでは不安定になることがわかる。またおくれが大きいと $AK > 1$ に選んでも初期値が頂上近傍にある場合（あるいは探索信号幅 A が大きい場合）には安定に頂上へ達しうることが示されている。これはおくれのために探索結果が実際よりもずっと少なく出てくるからである。

以上の結果を確かめるために数値例について、初期条件を変えて基本式を計算した結果を位相面上の軌跡として Fig. 8 に示す。図に四角に囲ってある線は (24) 式から求めたリミットサイクルの振幅の計算値で、初期条件がこの内側にあれば安定である。記述関数による安定限界がほぼ正しいことがわかる。

$AK=1, T/T_p=2$

Fig. 8 Trajectories on phase plane

5. アナログシミュレーション

以上の理論解を確かめるためアナログシミュレータによる実験を行なった。

基本式 (1)~(4) は Fig. 9 のような回路によってアナログ計算機で実現できる¹¹⁾。

プロセスの線形部と非線形部はアナログ計算機で組み、これに $H_1 \sim H_4$ のホールド回路を付加して制御動

S: switch, H: holder

Fig. 9 Analogue simulation

作をシミュレートさせる。ホールド回路の開閉は別に設けたパルス発振器によって行なう。

Fig. 9 のアナログ回路における制御動作を説明するとまず H_4 に X_{2n-2} がホールドされたところから始めると、 H_4 はつぎの $2T$ 時間 X_{2n-2} をホールドする。 T 後に η_m の値は η_{2n-1} となり、この値を S_1 でサンプリングしてつぎの $2T$ 時間 H_1 にホールドする。それと同時に S_2, H_2 が H_4 にホールドされている X_{2n-2} をサンプリングし $2T$ 時間ホールドする。これらの動作終了直後、 S_5 が閉じ Δ が X_{2n-2} に加えられ X_{2n-1} となる。 Δ が加えられてから T 時間後には η_m は η_{2n} となっているが H_1, H_4 には η_{2n-1}, X_{2n-2} がホールドされたままであるから、その瞬間に H_3 がサンプリングホールドすれば (4) 式を満足する X_{2n} が H_3 にたくわえられることになる。

その後 H_4 が X_{2n} をサンプリングしてつぎの $2T$ 時間ホールドし、それと同時に S_5 が開く、これらの一連の動作が繰り返される。また初期値は (1) 式で与えられる静特性曲線上にあるものとし、 H_3 に X_0 の値をホールドすることによって与えられる。

以上のアナログシミュレーションにより、調節器の比例ゲイン、サンプリング周期、初期値を変化させて得られた制御経過の例を Fig. 10 および Fig. 11 に示す。Fig. 10(A), (B) はほぼ持続振動状態にある二

Fig. 11 Performances of simulator (2)

つのケースを x_m について記録したものでまた (C), (D) は同一システムでも初期条件の違いにより、あるいは発散し、あるいは収束することを示す。

Fig. 11 は x_m と y_m について制御経過を X-Y レコーダに記録したもので、時間おくれのため η_m が静特性から大きくはずれる状況がよくわかる。

上述のようなシミュレーションを数多くのパラメータについて行なうと安定限界が求められる。Fig. 7 に記した各点は $AK=0.75, 1, 1.5$ の場合について実験的に求めた安定限界である。記述関数による理論とほぼ一致しているが、実測値のほうが全体的にやや小さい。これはリミットサイクルを正弦波の振幅で示したためと考えられる。

すなわち Fig. 10 の (a) (b) の場合の波形を見ても明らかに、正弦波の最大値とサンプル値の最大値とは必ずしも一致しない。したがって初期値は正弦波の振幅よりもやや小さい値となり上の結果が生じたのである。

6. 結 言

以上の解析および実験によりこう配法による最適化制御系を構成する場合に、プロセスのおくれを無視してサンプリング周期、探索信号幅および比例ゲインの大きさなどを決めると不安定になる危険が多く、おくれの特性を考慮してこれらのパラメータを適当に選定しなければならないことがわかった。

今後、さらに高次のおくれやその補償法について検討してゆく予定である。また外乱やノイズの影響を調べつつある。

このアナログシミュレーションによる実験は東工大大学院学生程塚、小池両君によるものである。また有益な意見をくださった森田助教授に感謝する。

(A) $AK=0.75, T/T_p=1.60, X/d=8.5$
 (B) $AK=1.0, T/T_p=2.3, X_0/d=-9.0$
 (C) $X_0/d=4.5, AK=1.0, T/T_p=0.9$
 (D) $X_0/d=5.0, \bullet$ initial condition
 Fig. 10 Performances of simulator (1)

文 献

- 1) D. G. Wilde: Optimum Seeking Methods (Prentice Hall Inc.-1964)
- 2) Y. T. Li & C. S. Draper: Principles of Optimizing Control System and an Application to the Internal Combustion Engine (ASME Publication-1951.9)
- 3) S. Fujii & N. Kanda: An Optimizing Control of Bioler Efficiency, Automatic and Remote Control, Proc. 2nd IFAC Congress p. 380
- 4) 近藤文治：最適化制御の動向，機学誌（1963年3月）p. 319
- 5) C. B. Tompkins: Method of Steep Descent, Modern Mathematics for the Engineers, Vol. 1, Chap. 18, (McGraw Hill-1956)
- 6) H. J. Kushner: Hill Climbing Methods for the Optimization of Multi-Parameter Noise Disturbed Systems, Trans. ASME (June, 1963) p. 157
- 7) S. S. L. Chang: Optimization of the Adaptive Function by z -Transform Method, Trans. AIEE (July, 1960) p. 223
- 8) C. K. Chow: Contactor Servomechanisms Employing Sampled Data, Trans. AIEE (March, 1954) p. 51
- 9) B. C. Kuo: Design of Relay Type Sampled Data Control Systems Using Discrete Describing Function, IRE, Convention Records (1962) p. 99
- 10) J. A. Aseltine, R. A. Nesbit: The Incremental Phase Plane for Nonlinear Sampled Data Systems, IRE Trans, AC-5, (Aug. 1960) p. 159
- 11) 小池常雄：最適化制御系のシミュレーション，東工大卒論（1966年3月）

Vol. 2 No. 2 (1966—6) 正誤表

＜伊沢・古田・大野・井藤・秋山：Binary Random Signal に
よる熱交換器の動特性試験＞

ページ	欄	行	誤	正
102	右	(11・a) 式右辺	$\cdots = \Phi^0_{x1x} g^*(\alpha)$	$\cdots = \Phi^0_{x1x}(0) g^*(\alpha)$
"	"	下 12	ただし， $\Phi^0_{x1x} g^*(\alpha)$	ただし， $\Phi^0_{x1x}(0) g^*(\alpha)$
103	"	Fig. 3, 4 中	3-way diaphragm valve	3-way diaphragm valve
104	"	Table 1	$N\omega$	N_{ω}
105	"	下 16	5. 実験	4. 実験
"	"	下 15	5.1 実験装置と試験条件	4.1 実験装置と試験条件
106	左	下 6	5.2 実験結果	4.2 実験結果
"	右	下 8	6. 検討	5. 検討
109	左	下 24	6.1 パルステスト法…	5.1 パルステスト法…
"	"	下 10	6.2 N と Δ について…	5.2 N と Δ について…
"	"	下 7	…満足すれば (17・a) 式…	…満足すれば (11・a) 式…
"	"	下 3	Table 2, 3 から 14.8 秒くらい…	Table 2, 3 から 17.1 秒くらい
"	右	上 1	め (17・a) 式のように…	め (11・a) 式のように…
"	"	上 4	見なせるので，(30) 式…	見なせるので (23) 式…
110	左	上 2	… (23) 式は (23)' 式の…	… (23) 式は (23)" 式の…
"	"	上 4	… (23)'	… (23)"
"	右	上 1	6.3 データ処理に…	5.3 データ処理に…
"	脚 注	上 1	$ R(j\omega) \triangleq \max_n \cdots \cdots$	$ R(j\omega) \triangleq \max \cdots \cdots$
"	"	上 2	$ R(j\omega) = \cdots$	$ R(i\omega) = \cdots$
"	"	下 3	と書ける． $G(i\omega) \cdots$	とすれば十分である． $G(i\omega) \cdots$
111	右	上 7	(31) 式のフーリエ変換を (31)' 式で…	(23) 式のフーリエ変換を (23)' 式で…