多変数フィードバック制御系の感度特性

梶原 宏之*・古田 勝久**

On Sensitivity Property of Multivariable Feedback Control Systems

Hiroyuki KAJIWARA* and Katsuhisa FURUTA**

This paper is concerned with the sensitivity problem for linear time-invariant multivariable feedback control systems. Based on the theory of perturbation bounds for pseudoinverse matrices, it is shown that the sensitivity property depends upon, not only the smallest singular value of the return difference matrix T , but also the condition number of T , i. e., the ratio of the largest singular value of T to the smallest singular value of T . In order to achieve lower sensitivity, the smallest singular value of T should be larger and the condition number of T should be smaller.

Keyword: sensitivity, robust stability, condition number

1. 緒 言

線形時不変多変数フィードバック制御系の設計に際して考慮すべき重要な仕様として、ロバスト安定性と低感度特性があり、これらはトレードオフの関係にあることが知られている。ロバスト安定性の必要十分条件については、Chen ら¹⁾によって加法的および乗法的パラメータ変動に対するものが得られている。いっぽう、多変数フィードバック制御系の感度特性については、まず、Curz ら²⁾によって比較感度法を用いて議論された。Safonov ら³⁾は、Curz らの結果は感度特性の評価において変動後のパラメータを含むこと、また、比較感度法はフィードバックパス上の後向き補償要素のパラメータ変動を考慮できないなどの問題点を指摘し、乗法的パラメータ変動に対してこれらの問題点を克服した議論を展開した。しかしながら、Safonov らの方法を加法的パラメータ変動に対して適

用するのは困難である。さらに、Wail ら⁴⁾は、乗法的パラメータ変動の場合のロバスト安定性と低感度特性との間のトレードオフの関係を論じたが、そこでは、選送差比行列の正則性が仮定されており、一般的とはいえない。また、Curz ら⁵⁾は、彼らの初期の議論を発展させロバスト安定性と低感度特性を同時に満足させるための十分条件を加法的および乗法的パラメータ変動に対して示している。

以上から、多変数フィードバック制御系の感度特性の議論においては、加法的パラメータ変動に対して、後向き補償要素のパラメータ変動を考慮した場合が不十分である。そこで、本論文では、多変数フィードバック制御系の感度特性について、連立一次方程式の解の誤差解析の理論⁶⁾を参考にして、上述の場合を考察する。第2章の準備のあと、第3章において、ロバスト安定性の十分条件を選送差行列のパラメータ変動に関する制約の形で示す。本論文では、この条件を満たす、すなわち、閉ループ系の安定性を保存する加法的パラメータ変動を考える。第4章において、多変数フィードバック制御系の相対的な感度特性は、選送差行列の最小特異値ばかりでなく、その条件数（最大特異値の最小特異値に対する比）にも依存することを示す。第5章では、乗法的パラメータ変動に基づいた従来の議論において、選送差行列の条件数という多変数系特有の要因が現われなかった理由について考察する。付録において、本論文で用いる行列の特異値とノルムに関する記法といくつかの性質を述べる。

2. 準 備

つぎの式で表わされる線形時不変多変数フィードバック制御系を考える。

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (1.1)$$

$$u(s) = r(s) - K(s)y(s) \quad (1.2)$$

ここで、 y は制御対象の出力を表わす p 次元ベクトル、 u は制御対象への入力を表わす m 次元ベクトル、 r は閉ループ系への入力を表わす m 次元ベクトルで

* 岡山大学経済学部 岡山市津島中 3-1-1

** 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Economics, Okayama University, Okayama

** Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received June 15, 1983)

(Revised September 10, 1983)

Fig. 1 Configuration of a feedback control system

ある。また、 G と K はそれぞれ制御対象とフィードバック補償要素を表わす伝達関数行列であり、プロパーな実係数有理関数を要素としてもつものとする。この閉ループ系のブロックダイアグラムを Fig. 1 に示す。

閉ループ系の伝達関数行列は、

$$G_c(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s) \quad (2.1)$$

$$= G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} \quad (2.2)$$

で与えられる。(2)式から、つぎの関係式を得る。

$$G(s) = T_1(s)G_c(s) \quad (3.1)$$

$$= G_c(s)T_2(s) \quad (3.2)$$

ただし、 T_1 と T_2 はそれぞれ出力端と入力端における還送差行列を表わし、

$$T_1(s) = I + G(s)K(s) \quad (4.1)$$

$$T_2(s) = I + K(s)G(s) \quad (4.2)$$

で与えられる。

さて、制御対象とフィードバック補償要素においてパラメータ変動が生じ、(3)、(4)式はつぎのように変化したとする。

$$\tilde{G}(s) = \tilde{T}_1(s)\tilde{G}_c(s) \quad (5.1)$$

$$= \tilde{G}_c(s)\tilde{T}_2(s) \quad (5.2)$$

$$\tilde{T}_1(s) = I + \tilde{G}(s)\tilde{K}(s) \quad (6.1)$$

$$\tilde{T}_2(s) = I + \tilde{K}(s)\tilde{G}(s) \quad (6.2)$$

ただし、変動後の各伝達関数行列はつぎのように表わされるものとする。

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad (7.1)$$

$$\tilde{K}(s) = K(s) + \Delta K(s) \quad (7.2)$$

$$\tilde{G}_c(s) = G_c(s) + \Delta G_c(s) \quad (7.3)$$

$$\tilde{T}_i(s) = T_i(s) + \Delta T_i(s) \quad (i=1, 2) \quad (7.4)$$

ここで、 ΔG 、 ΔK 、 ΔG_c 、 ΔT_i はそれぞれ G 、 K 、 G_c 、 T_i に対する加法的パラメータ変動分を表わし、プロパーな実係数有理関数を要素としてもつ行列である。(7)式を(5)、(6)式に代入して、つぎの関係式を得る。

$$\Delta G(s) - \Delta T_1(s) \cdot G_c(s) = (T_1(s) + \Delta T_1(s)) \Delta G_c(s) \quad (8.1)$$

$$\Delta G(s) - G_c(s) \Delta T_2(s) = \Delta G_c(s) \cdot (T_2(s) + \Delta T_2(s)) \quad (8.2)$$

$$\Delta T_1(s) = \Delta G(s) \cdot K(s) + \tilde{G}(s) \Delta K(s) \quad (9.1)$$

$$\Delta T_2(s) = K(s) \Delta G(s) + \Delta K(s) \cdot \tilde{G}(s) \quad (9.2)$$

本論文を通して、つぎの仮定をおく。

$$G_c \text{ は漸近安定} \quad (10.1)$$

$$G \text{ と } \Delta G \text{ は真にプロパー} \quad (10.2)$$

$$G, \Delta G, K, \Delta K \text{ は虚軸上に極をもたない} \quad (10.3)$$

$$n^+(\tilde{G}) = n^+(G), \quad n^+(\tilde{K}) = n^+(K) \quad (10.4)$$

ここで、 $n^+(\cdot)$ は伝達関数行列の重複度も含めた不安定な極の個数を表わす。これらの仮定はロバスト安定性の十分条件を導くために用いられる。

3. ロバスト安定性

還送差行列のパラメータ変動がどのような条件を満たすとき、パラメータ変動後の閉ループ系は漸近安定性を保つかについて考える。

ω を $-\infty$ から $+\infty$ まで動かすとき、

$$\det T_1(j\omega) = \det T_2(j\omega) \quad (11)$$

が複素平面上に描く軌跡を $\mathcal{N}$ で表わすことにする。

このとき、 G_c が漸近安定であるための必要十分条件は、 $\mathcal{N}$ が、

$$\text{原点を通らない} \quad (12.1)$$

$$n^+(G) + n^+(K) \text{ 回、反時計方向に原点を囲む} \quad (12.2)$$

を満足することである^{1), 8)}。

仮定(10.1)の下では、条件(12.1)より、

$$|\det T_i(j\omega)| > 0 \quad (i=1, 2) \quad (13)$$

が成り立つ。したがって、 $T_i(j\omega)$ は正則となり、与えられた加法的パラメータ変動分 $\Delta T_i(j\omega)$ に対して、

$$\delta_1 T_i(j\omega) = \Delta T_i(j\omega) \cdot T_i^{-1}(j\omega) \quad (i=1, 2) \quad (14.1)$$

$$\delta_2 T_i(j\omega) = T_i^{-1}(j\omega) \cdot \Delta T_i(j\omega) \quad (i=1, 2) \quad (14.2)$$

によって、常に乗法的パラメータ変動分を定義できる。 $\delta_1 T_i(j\omega)$ と $\delta_2 T_i(j\omega)$ を区別する必要がない場合は、単に $\delta T_i(j\omega)$ と表わすことにする。(14)式と(7.4)式から、

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(j\omega) &= (I + \delta_1 T_i(j\omega)) T_i(j\omega) \\ &= T_i(j\omega) (I + \delta_2 T_i(j\omega)) \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。

さらに、(付10)式から、任意の実数 $\varepsilon \geq 0$ に対して、つぎの式が成り立つことに注意する。

$$\underline{\sigma}(I + \varepsilon \delta T_i(j\omega)) \geq 1 - \varepsilon \|\delta T_i(j\omega)\| \quad (i=1, 2) \quad (16)$$

ここで、 $\underline{\sigma}(\cdot)$ と $\|\cdot\|$ はそれぞれ行列の最小特異値とスペクトルノルムを表わす。

つぎの定理を考える。

《定理1》「(2)～(9)式を考え、条件(10)を仮定する。このとき、 $\tilde{G}_c$ が漸近安定であるための十分条件は、還送差行列の乗法的パラメータ変動分(14)に

対して,

$$\|\delta T_i(j\omega)\| < 1 \quad (i=1, 2; \omega \geq 0) \quad (17)$$

が成り立つことである。

(証明) $i=1$ または 2 とする. (16) 式から, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ を満たす ε に対して,

$$\sigma(I + \varepsilon \delta T_i(j\omega)) \geq 1 - \|\delta T_i(j\omega)\| \quad (\omega \geq 0) \quad (18)$$

が成り立つ. したがって, 条件(17)から,

$$\sigma(I + \varepsilon \delta T_i(j\omega)) > 0 \quad (0 \leq \varepsilon \leq 1; \omega \geq 0) \quad (19)$$

を得る.

また, 仮定(10.1), (10.2), (10.3)と(9), (14)式から, $\delta T_i(j\omega)$ は真にプロパーとなり,

$$\sigma(I + \varepsilon \delta T_i(j\omega)) \rightarrow 1 \quad (|\omega| \rightarrow \infty) \quad (20)$$

が成り立つ. (19), (20)式を得たので, あとは, 文献 1) theorem 2 の証明と同様にして, この定理を証明できる. ■

次章では, ある定数 $M_i < 1$ に対して,

$$\|\delta T_i(j\omega)\| \leq M_i < 1 \quad (i=1, 2; \omega \geq 0) \quad (21)$$

が満足されるようなパラメータ変動を考える. このとき, 定理1から, $\tilde{G}_e$ は漸近安定となる. したがって, M_i は「安定余裕」の目安となる.

また, (21)式が成り立つならば, $\varepsilon=1$ の場合の(16)式から,

$$\sigma(I + \delta T_i(j\omega)) \geq 1 - M_i > 0 \quad (i=1, 2) \quad (22)$$

を得て, 命題(付4)より, $I + \delta T_i(j\omega)$ は正則となる. よって, (付9)式に注意して,

$$\|(I + \delta T_i(j\omega))^{-1}\| \leq (1 - M_i)^{-1} \quad (i=1, 2) \quad (23)$$

が導かれる.

4. 感度特性

閉ループ系の安定性が保たれる範囲内でのパラメータ変動 (条件(21)を満足するもの) に対して, どのような条件の下で, 閉ループ系の相対的な低感度特性が達成されるかを考える.

まず, スカラー系 ($m=p=1$) に対しフィードバック補償要素のパラメータ変動がない ($\Delta K=0$) 場合をとりあげ, 本論文のアプローチを明確にする. 古典制御理論では, 閉ループ系の「感度」は,

$$\frac{\partial \ln G_e}{\partial \ln G} = \frac{1}{1+GK} \quad (24)$$

によって定義される. これは,

$$\frac{\Delta G_e/G_e}{\Delta G/G} = \frac{1}{1+(G+\Delta G)K} \quad (25)$$

において, $\Delta G \rightarrow 0$ としたものに等しく, 無限微小変動に対するものである. ΔG がある大きさをもつ場合は, (25)式は変動後のパラメータ $\tilde{G}=G+\Delta G$ を含み, 評価しにくいことから, むしろ, (24)式と同じ値

を与える

$$\frac{\Delta G_e/\tilde{G}_e}{\Delta G/\tilde{G}} = \frac{1}{1+GK} \quad (26)$$

を採用することがある. (25)式と(26)式の相違点は, 変動分の規格化において, 変動前または変動後のパラメータを用いるかであるが, 感度の定義からして, 本来は変動前のパラメータで規格化を行うべきであろう. 実際, (25)式の右边を,

$$\begin{aligned} & (1+GK)^{-1} \cdot \{1+\Delta G \cdot K(1+GK)^{-1}\}^{-1} \\ & = T_1^{-1} \cdot (1+\delta T_1)^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

と分解したとき, 第一項は(24)式の右边となり, 第二項はロバスト安定性の条件に関係している. すなわち, ΔG がある大きさをもつ場合は, 変動後のパラメータで規格化することはロバスト安定性の感度特性へのかかわりを陰にかくすことになる.

そこで, 以下では, つぎの形の不等式

$$\frac{\|\Delta G_e(j\omega)\|}{\|G_e(j\omega)\|} \leq S \frac{\|\Delta G(j\omega)\|}{\|G(j\omega)\|} \quad (28)$$

を求めて, 相対的な感度特性を決定する係数 S に, 安定余裕にそのほかのどのような因子がかかっているかを検討する. そのために, (3)式を G と T_i が与えられたときの G_e についての行列方程式とみなし, 解の誤差解析という立場から, (28)式を導くことを考える.

つぎの定理を考える.

《定理2》「(2)~(9)式を考え, 条件(10), (21)を仮定する. このとき, $i=1, 2$ および $\omega \geq 0$ に対して, つぎが成り立つ.

$$\frac{\|\Delta G_e(j\omega)\|}{\|G_e(j\omega)\|} \leq S_{e,i} \left(\frac{\|\Delta G(j\omega)\|}{\|G(j\omega)\|} + \frac{\|\Delta T_i(j\omega)\|}{\|T_i(j\omega)\|} \right) \quad (29.1)$$

ただし,

$$S_{e,i} = (1 - M_i)^{-1} \cdot \text{Cond } T_i(j\omega) \quad (29.2)$$

ここで, Cond は行列の条件数を表わす.

(証明) $i=1$ の場合. (8.1)式と(15)式から,

$$\begin{aligned} \Delta G_e &= T_1^{-1}(I + \delta_1 T_1)^{-1}(\Delta G - \Delta T_1 \cdot G_e) \\ &= (I + \delta_2 T_1)^{-1} T_1^{-1}(\Delta G - \Delta T_1 \cdot G_e) \end{aligned} \quad (30)$$

が成り立つ. (30)式の両辺のノルムをとって,

$$\begin{aligned} \|\Delta G_e\| &= \|T_1^{-1}\| \|(I + \delta T_1)^{-1}\| \\ &\quad \times (\|\Delta G\| + \|\Delta T_1\| \|G_e\|) \end{aligned} \quad (31)$$

を得る. 両辺を $\|G_e\|$ で割って, (23)式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta G_e\|}{\|G_e\|} &\leq \frac{\|T_1\| \|T_1^{-1}\|}{1 - M_1} \left(\frac{\|\Delta G\|}{\|T_1\| \|G_e\|} + \frac{\|\Delta T_1\|}{\|T_1\|} \right) \\ &\leq \frac{\text{Cond } T_1 (\|\Delta G\| + \|\Delta T_1\|)}{1 - M_1 \|G\|} \end{aligned} \quad (32)$$

を得る. ここで, (3.1)式から得られる不等式

$$\|G\| \leq \|T_1\| \|G_c\| \quad (33)$$

と条件数の定義(付 11)を用いた。

$i=2$ の場合も、(8.2)式に基づいて、同様に示される。 ■

(29.1)式において、 ΔT_i は(9)式から ΔG 、 ΔK に依存するので、(29.1)式の右辺においてそれらを陽に出すことを試みる。

《定理 3》「(2)～(9)式を考え、条件(10)、(21)を仮定する。このとき、 $i=1, 2$ および $\omega \geq 0$ に対して、つぎが成り立つ。

$$\frac{\|\Delta G_c(j\omega)\|}{\|G_c(j\omega)\|} \leq S_i \frac{\|\Delta G(j\omega)\|}{\|G(j\omega)\|} + R_i \frac{\|\Delta K(j\omega)\|}{\|K(j\omega)\|} \quad (34.1)$$

ただし、

$$S_1 = (1 - M_1)^{-1} \cdot \text{Cond } T_1(j\omega) \cdot \|T_2^{-1}(j\omega)\| \quad (34.2)$$

$$S_2 = (1 - M_2)^{-1} \cdot \text{Cond } T_2(j\omega) \cdot \|T_1^{-1}(j\omega)\| \quad (34.3)$$

$$R_i = S_i \|\tilde{G}(j\omega)\| \|K(j\omega)\| \quad (34.4) \quad \text{「(証明) } i=1 \text{ の場合、(9.1)式と関係式}$$

$$I - KG_c = T_2^{-1} \quad (35)$$

を用いて、つぎの式を得る。

$$\Delta G - \Delta T_1 \cdot G_c = (\Delta G - \tilde{G} \Delta K \cdot G) T_2^{-1} \quad (36)$$

これと、(8.1)式と(15)式から、

$$\begin{aligned} \Delta G_c &= T_1^{-1} (I + \delta_1 T_1)^{-1} (\Delta G - \tilde{G} \Delta K \cdot G) T_2^{-1} \\ &= (I + \delta_2 T_1)^{-1} T_1^{-1} (\Delta G - \tilde{G} \Delta K \cdot G) T_2^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

が成り立つ。(37)式の両辺のノルムをとって、

$$\begin{aligned} \|\Delta G_c\| &= \|T_1^{-1}\| \|(I + \delta_1 T_1)^{-1}\| \\ &\quad \times (\|\Delta G\| + \|\tilde{G}\| \|\Delta K\| \|G\|) \|T_2^{-1}\| \end{aligned} \quad (38)$$

を得る。両辺を $\|G_c\|$ で割って、(23)式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta G_c\|}{\|G_c\|} &\leq \frac{\|T_1\| \|T_1^{-1}\|}{1 - M_1} \|T_2^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta G\|}{\|T_1\| \|G_c\|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|\tilde{G}\| \|\Delta K\| \|G\|}{\|T_1\| \|G_c\|} \right) \\ &\leq \frac{\text{Cond } T_1}{1 - M_1} \|T_2^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta G\|}{\|G\|} + \|\tilde{G}\| \|\Delta K\| \right) \end{aligned} \quad (39)$$

を得て、(34)式が成り立つ。

$i=2$ の場合も、(9.2)式と関係式

$$I - G_c K = T_1^{-1} \quad (40)$$

を用いて同様に示される。 ■

定理 3 に基づいて、多変数フィードバック制御系の相対的感度特性について考察する。まず、フィードバック補償要素のパラメータ変動分 ΔK が零の場合を考える。このとき、係数 S_1 と S_2 は相対的感度特性を決定する。

係数 S_1 は、三つの因子

$$(1 - M_1)^{-1} \quad (41.1)$$

$$\text{Cond } T_1(j\omega) = \sigma(T_1(j\omega)) / \underline{\sigma}(T_1(j\omega)) \quad (41.2)$$

$$\|T_2^{-1}(j\omega)\| = 1 / \underline{\sigma}(T_2(j\omega)) \quad (41.3)$$

からなる。どの因子も小さくなればなるほど S_1 は小さくなり、閉ループ系は相対的に低感度となる。

因子(41.1)は $M_1 (< 1)$ が大きくなればなるほど大きくなる。すなわち、安定余裕を増すという要求と低感度特性を達成するという要求は相反することが観察される。因子(41.3)を小さくすることは、入力端選送差行列 T_2 の最小特異値を大きくすることに等しい。

また、因子(41.2)を小さくすることは、出力端選送差行列 T_1 の最大特異値の最小特異値に対する比(条件数とよばれる)を小さくすることに等しい。

係数 S_2 を用いても同様のことがいえる。

したがって、閉ループ系の相対的な低感度特性を達成するためには、安定余裕を大きくとれないこと、また、入力端および出力端の選送差行列の最小特異値を大きくし、それらの条件数を小さくすればよいといえる。

さらに、フィードバック補償要素のパラメータ変動分 ΔK が零でない場合は、それが零の場合に比べて、(34.1)式の右辺が増大することから、フィードバック補償要素のパラメータ変動は望ましくないことが観察される。

5. 乗法的パラメータ変動

これまでの多変数フィードバック制御系の感度特性の研究においては、選送差行列の最小特異値が1より大であるならば閉ループ系は低感度であるという結果が得られている³⁾⁻⁵⁾。これは、選送差行列の最小特異値が感度特性の決定要因であることを示しているが、前章において、多変数系に対しては選送差行列の最大特異値と最小特異値との比もまた感度特性の決定要因であることを示した。以下では、乗法的パラメータ変動に対して、本論文の立場から従来の結果を導き、多変数系の場合の乗法的パラメータ変動のもつ特殊性について指摘する。

つぎの定理を考える。

《定理 4》「(2)～(9)式を考え、条件(10)、(21)を仮定する。さらに、 $\omega \geq 0$ に対して、 $\Delta G(j\omega)$ は乗法的パラメータ変動分 $\delta_1 G(j\omega)$ と $\delta_2 G(j\omega)$ により、

$$\Delta G(j\omega) = \delta_1 G(j\omega) \cdot G(j\omega) \quad (42.1)$$

$$= G(j\omega) \cdot \delta_2 G(j\omega) \quad (42.2)$$

のように表わされるとする。このとき、 $i=1, 2$ および $\omega \geq 0$ に対して、つぎが成り立つ。

$$\frac{\|\Delta G_c(j\omega)\|}{\|G_c(j\omega)\|} \leq S_{mi} \|\delta_i G(j\omega)\| + R_{mi} \frac{\|\Delta K(j\omega)\|}{\|K(j\omega)\|} \quad (43.1)$$

ただし,

$$S_{mi} = (1 - M_i)^{-1} \cdot \|T_i^{-1}(j\omega)\| \quad (43.2)$$

$$R_{mi} = S_{mi} \|\tilde{G}(j\omega)\| \|K(j\omega)\| \quad (43.3)$$

(証明) $i=1$ の場合. (9.1), (35), (42.1)式から,

$$\Delta G - \Delta T_1 \cdot G_c = (\delta_1 G - \tilde{G} \Delta K) G_c \quad (44)$$

を得る. これを, (8.1)式に代入し(15)式を用いて,

$$\Delta G_c = T_1^{-1}(I + \delta_1 T_1)^{-1}(\delta_1 G - \tilde{G} \Delta K) G_c \quad (45.1)$$

$$= (I + \delta_2 T_1)^{-1} T_1^{-1}(\delta_1 G - \tilde{G} \Delta K) G_c \quad (45.2)$$

が成り立つ. (45)式の両辺のノルムをとって,

$$\|\Delta G_c\| = \|T_1^{-1}\| \|(I + \delta T_1)^{-1}\| \times (\|\delta_1 G\| + \|\tilde{G}\| \|\Delta K\|) \|G_c\| \quad (46)$$

を得る. 両辺を $\|G_c\|$ で割って, (23)式を用いると, (43)式が成り立つ.

$i=2$ の場合も同様にして示される. ■

従来の結果との対応を明確にするために, つぎの系を考える.

《系》「定理4と同じ仮定をおく. $\omega \geq 0$ に対して, $\Delta K(j\omega) = 0$ とし, $\Delta G_c(j\omega)$ は乗法的パラメータ変動分 $\delta_1 G_c(j\omega)$ と $\delta_2 G_c(j\omega)$ により,

$$\Delta G_c(j\omega) = \delta_1 G_c(j\omega) \cdot G_c(j\omega) \quad (47.1)$$

$$= G_c(j\omega) \cdot \delta_2 G_c(j\omega) \quad (47.2)$$

のように表わされるとし, また, $G_c(j\omega)$ の正則性を仮定する (したがって, $m=p$ とする). このとき, $i=1, 2$ および $\omega \geq 0$ に対して, つぎが成り立つ.

$$\|\delta_i G_c(j\omega)\| \leq S_{mi} \|\delta_i G(j\omega)\| \quad (48)$$

ここで, S_{mi} は (43.2)式で与えられる.」

(証明) $i=1$ の場合. (47.1)式を (45)式に代入し, 右から G_c^{-1} をかけ, $\Delta K=0$ とおくと,

$$\delta_1 G_c = T_1^{-1}(I + \delta_1 T_1)^{-1} \delta_1 G \quad (49.1)$$

$$= (I + \delta_2 T_1)^{-1} T_1^{-1} \delta_1 G \quad (49.2)$$

を得る. (49)式の両辺のノルムをとって,

$$\|\delta_1 G_c\| = \|T_1^{-1}\| \|(I + \delta T_1)^{-1}\| \|\delta_1 G\| \quad (50)$$

を得る. (23)式を用いると, (48)式が成り立つ.

$i=2$ の場合も同様にして示される. ■

不等式(48)は乗法的パラメータ変動を用いた場合の従来の結果に相当する. (42)式と(47)式のように乗法的パラメータ変動分が変動前のパラメータにかけられているので, 係数 S_{mi} に安定余裕に関係した(23)式の右辺が現われている点が異なっているだけである. すなわち, (48)式は閉ループ系の感度特性は選送差行列の最小特異値によって決定されるという従来の主張を示している. ここで, なぜ選送差行列の条件数という多変数特有の要因が現われないのか, その理由を検

討してみる. それは, 条件数は, たとえば定理2の証明における(32)式の導出にみられるように, (28)式の両辺に示されるようなパラメータ変動率を用いるために現われるという事実に関係している. そこで, (42)式から得られる, つぎの不等式に注意する.

$$\frac{\|\Delta G(j\omega)\|}{\|G(j\omega)\|} \leq \|\delta_i G(j\omega)\| \quad (i=1, 2) \quad (51)$$

これは, 多変数系の場合, 一般には, 乗法的パラメータ変動分のノルムは(51)式の左辺のような通常の意味でのパラメータ変動率と一致しないことを示している. このことが従来の乗法的パラメータ変動を用いた場合に選送差行列の条件数が見落されていた理由と考えられる.

6. 結 言

本論文で得られた主要結果は定理3である. これに基づいて, 多変数フィードバック制御系の感度特性は選送差行列の最小特異値ばかりでなく, その条件数にも依存すること, そして, 低感度特性を達成するためには, 選送差行列の最小特異値を大きくし, その条件数を小さくすればよいことが示された. スカラー系の場合は条件数は1となることから, 選送差行列の最大特異値と最小特異値の比も考慮しなければならないことは, 多変数系であるがゆえに生じる特徴といえる.

参 考 文 献

- 1) M.J. Chen and C.A. Desoer: Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability of Linear Distributed Feedback Systems, International J. of Control, **35-2**, 255/267 (1982)
- 2) J.B. Cruz and W.R. Perkins: A New Approach to the Sensitivity Problem in Multivariable Feedback System Design, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-9-3**, 216/223 (1964)
- 3) M.G. Safonov, A.J. Laub and G.L. Hartmann: Feedback Properties of Multivariable Systems: the Rule and Use of the Return Difference Matrix, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26-1**, 47/65 (1981)
- 4) J.E. Wall, J.C. Doyle and C.A. Harvey: Tradeoffs in the Design of Multivariable Feedback Systems, 18th Annual Allerton Conf., 715/725 (1980)
- 5) J.B. Cruz, J.S. Freudenberg and D.P. Looze: A Relationship between Sensitivity and Stability of Multivariable Feedback Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26-1**, 66/74 (1981)
- 6) 有本: 数値解析(1), 50, コロナ社 (1981)
- 7) 伊理, 児玉, 須田: 特異値分解とその応用, 計測と制御, **21-8**, 763/772 (1982)
- 8) 児玉, 前田: 安定理論—システム設計の基礎, システムと制御, **26-3**, 135/144 (1982)
- 9) 木村: 多変数システム論—設計論の話題, システムと制御, **26-3**, 145/153 (1982)

《付 録》

「行列の特異値とノルムに関する記法といくつかの性質」⁷⁾

A を任意の $m \times n$ 次元複素行列とする. $p = \min(m, n)$ とおくと、 A の特異値を、

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_p(A) \geq 0 \quad (\text{付 1})$$

で表わす. 特に、最大特異値と最小特異値をそれぞれ

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A) \quad (\text{付 2.1})$$

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_p(A) \quad (\text{付 2.2})$$

で表わす.

A が正方の場合 ($m=n$),

$$|\det A| = \sigma_1(A) \cdots \sigma_m(A) \quad (\text{付 3})$$

が成り立ち、命題

$$\underline{\sigma}(A) > 0 \leftrightarrow |\det A| > 0 \leftrightarrow A \text{ は正則} \quad (\text{付 4})$$

が得られる.

A と B を適当なサイズの複素行列とすると、行列のスペクトルノルム $\|\cdot\|$ に関して、つぎが成り立つ.

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{付 5})$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{付 6})$$

$$|\sigma_i(A) - \sigma_i(B)| \leq \|A - B\| \quad (\text{付 7})$$

$$\|A\| = \bar{\sigma}(A) \quad (\text{付 8})$$

$$\|A^{-1}\| = 1/\underline{\sigma}(A) \quad (\text{付 9})$$

特に、(付 7) から、

$$\underline{\sigma}(A) \geq \underline{\sigma}(B) - \|A - B\| \quad (\text{付 10})$$

が成り立つ.

さらに、正則行列 A の条件数を

$$\text{Cond } A = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (\text{付 11})$$

で定義する. (付 8) と (付 9) から、

$$\text{Cond } A = \bar{\sigma}(A) / \underline{\sigma}(A) \quad (\text{付 12})$$

が成り立つ.