線形多入出力最適追従制御系 (S_c^*) の初期値補償器†

武 田 常 広*

Initial Value Compensator for the Linear Multi-Input-Output
Optimal Tracking Systems (S_c^*)

Tsunehiro TAKEDA*

1. はじめに

筆者らは先に、パラメータ変動や、定値外乱に対してもオフセットを生じない線形多入出力最適追従制御系 (以下 S_c^* と表記する) の設計法を、線形最適レギュレータ理論を拡張することにより提案した¹⁾。 S_c^* の設計法は磁気軸受の設計に適用され好結果をうるなど、実用性が確認されつつあり^{2), 3)}、 S_c^* の設計法の離散値系への拡張も試みられている⁴⁾。しかし、初期値が全て零でない場合、予想外に初期応答の乱れが大きくなり、 S_c^* の最適性への疑問が表明されている⁴⁾。本稿は、上記問題が古典制御理論におけるブロック線図の変換の手法で使われる初期値の考え方を流用したために起きたことであり、必ずしも最適性が失われている訳でないことと、初期値補償を施すことにより、上記問題を容易に解決できることを示すことが目的である。

2. S_c^* の設計法

まず、従来の設計法の骨子を要約する¹⁾。制御対象 S_0 は可制御・可観測で原点に零点をもたない

$$S_0 \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

で表わされるものとする。ここで、 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ は、それぞれ n , m , m 次のベクトル、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ は $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ の定数行列である ($n \geq m$)。 S_0 にステップ入力 ($\mathbf{r}$) が入った場合にオフセットなく“最適”に制御するために、入力成分ごとに一つの積分器をつけ、 $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$ を新たに操作量とするつぎの

$$\bar{S}_0 \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

$$\bar{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{C}} \equiv [\mathbf{C}, 0] \quad (6)$$

$\bar{S}_0$ を仮想的な制御対象と考える。オフセット零の条件より、 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ の平衡状態の値 $\bar{\mathbf{x}}_s$ は制御則に関係なく、

$$\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{Z}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{r} \quad (7)$$

$$\mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる。平衡状態の値を基準にして計った変数に添字 e をつけて表わすと、(7)式の関係より偏差に関する方程式がつぎのように得られる。

$$\bar{S}_0 \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_e(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}_e(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}_e(t) \\ \mathbf{y}_e(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}_e(t) \end{cases} \quad (9)$$

$$(10)$$

そこで、 $\bar{S}_0$ に対し、

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{y}_e^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{y}_e(t) + \mathbf{v}_e^T(t)\mathbf{R}\mathbf{v}_e(t)] dt \quad (11)$$

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$: $m \times m$ 正定対称行列

なる評価関数を設定すれば

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}(t) &= \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}}(t) + \bar{\mathbf{P}}(t) \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{P}}(t) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}}(t) \\ &\quad + \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{C}} \end{aligned} \quad (12)$$

$\bar{\mathbf{P}}(0) = 0$; $\bar{\mathbf{P}}(t)$: $(n+m) \times (n+m)$ 対称行列

の Riccati 方程式の定常解 $\bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{P}} > 0)$ を用いて、最適制御則は (13) 式と求まる。

$$\mathbf{v}_e(t) = -\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{x}}_e(t) \equiv -\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}}_e(t) \quad (13)$$

$\bar{\mathbf{K}}$: $m \times (n+m)$ 行列

逆に $\hat{S}_0 \rightarrow \bar{S}_0$ の変換をすると

$$\mathbf{v}(t) = -\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{r} \quad (14)$$

$$[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2] \equiv \bar{\mathbf{K}} \mathbf{Z}^{-1}; \quad \mathbf{K}_1: m \times n, \quad \mathbf{K}_2: m \times m \quad (15)$$

となる。(3), (4)式および定義から

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (17)$$

だから、(16), (17)式を(14)式へ代入して

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_2 (\mathbf{r} - \mathbf{y}(t)) \quad (18)$$

† 第23回自動制御連合講演会で発表 (昭 55・11)

* 製品科学研究所 茨城県筑波郡谷田部町東 1-1-4

* Industrial Products Research Institute, Tsukubagun, Ibaraki

(Received June 9, 1983)

(Revised September 7, 1983)

Keyword: optimal control, integral control, initial value, offset

をうる。ここで、新たに

$$\dot{z}(t) \equiv K_2(r - y(t)) \quad (19)$$

を定義し、(18)式の両辺を積分すると(20)式をうる。

$$\begin{aligned} u(t) &= -K_1 x(t) + z(t) + K_1 x(0) \\ &\quad - z(0) + u(0) \end{aligned} \quad (20)$$

3. 初期値特性を考慮した制御則

前節の設計法では最適レギュレータ理論を応用するために、 $\bar{S}_0$ において $u(t)$ を形式的に状態変数と解釈したが、(14)式以下の変換、特に(19)式での新たな状態変数 $z(t)$ の導入により、 $u(t)$ は状態変数から、本来の S_0 に対する操作量になった。よって、(20)式における $u(0)$ は設計パラメータであり、(11)式の評価関数と独立な規準によって決定しなくてはならない。ところが、変分法などにより、最適な $u(0)$ を求めることは容易ではなく、同時に解が初期値の関数になることが予想され実用的でもない。そこで、文献1では(1)古典制御理論におけるブロック線図の変換では初期値を全て零と考えるのが普通である、(2)操作量が初期値依存性をもつことは望ましくない、という理由から

$$u(t) = -K_1 x(t) + z(t) \quad (21)$$

の制御則を提案した。(21)式のような制御則を採用すると、 $\bar{S}_0$ において

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s(0) \\ \dot{u}_s(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(0) \\ -K_1 x(0) + z(0) \end{bmatrix} \quad (22)$$

なる初期値に対して最適に制御を施したことになる。よって、もし $x(0) = z(0) = 0$ ならば、初期値は $[x_s^T(0), u_s^T(0)]^T = -[x_s^T, u_s^T]^T$ となり、一般にそれほど大きな値でないので応答の姿は良くなる³⁾。しかし、評価関数の重み係数 R を小さくしたとき K_1 は大きくなるので⁶⁾、 $x(0) \neq 0$ の場合、 $-K_1 x(0)$ は大きな値となり整定時間は相対的に長くなり、評価関数値 $J = \bar{x}^T(0) \bar{P} \bar{x}_s(0)$ の値は大きくなる。それゆえ、最適性に対する疑問が生じてくる⁴⁾。異なった初期値に対して最適に制御している訳だから、(21)式は必ずしも最適性がなくなった訳ではないとも考えられるが、実用上不都合になる場合があることも事実である(注1)。そこで、

(注1) (19)式において、 $\dot{z}(t) = r - y(t)$ と定義すると、(22)式の第2行は $-K_1 x(0) + z(0) \rightarrow -K_1 x(0) + K_2 z(0)$ となる。 K_2 は極の相乗積に比例するので¹⁾、 R を小さくして設計したとき急激に大きくなり、(21)式の制御則を採用し、 $\bar{x}(0) \neq 0$ のとき、初期応答の乱れはさらに大きくなる。よって、(21)式の対策を取るときは(19)式の定義をするほうが望ましいが、(23)式のようにするときは(当然 $u(t) = -K_1 x(t) + K_2 z(t) + K_1 x(0) - K_2 z(0) + u(0)$)となる、上式のようにしても応答に関しては全く等しくなる。

Fig. 1 Block diagram of the optimal tracking systems (S_e^*) with initial value compensator

本論文は $u(0) = 0$ として、

$$u(t) = -K_1 x(t) + z(t) + K_1 x(0) - z(0) \quad (23)$$

を提案したい。その理由は以下のようなものである。

- (1) $\bar{S}_0$ における初期値は $[x^T(0) - x_s^T, -u_s^T]^T$ となり、一般にそれほど大きなものでないで、望ましい過渡応答が得られる。
- (2) 操作量の初期値は $u(0) = 0$ となり、 $t = 0$ において連続しており実用的である。
- (3) 文献3)のように、

$$u(t) = -K_1 x(t) + z(t) + K_1 x(0) - z(0) + u_s \quad (24)$$

とすれば、 $\bar{S}_0$ に対する初期値は $(x^T(0) + x_s^T, 0)^T$ となり、 $t = 0$ から最終の操作量を与えることから一見連応性を増すように思われるが、初期値 $x(0)$ の値によってはかえって整定時間が長くなることがある(注2)。しかも u_s は設定値に依存するのでフィードフォワード制御となる。

- (4) (23)式は初期値に依存する形式ではあるが、容易に実現できる。

(23)式を実現する S_e^* のブロック線図は Fig. 1 のようになる。系を起動するときのみ、ごく短時間、 α 点の値をサンプルし、その値を記憶して再び α 点でマイナス加算したものを操作量とする。とくにマイクロコンピュータで(23)式を実現する場合はきわめて容易である。

4. 設計例

筆者らが一貫して使ってきた二つの3次遅れ系が結

(注2) このことを簡単な1次遅れ系 ($A=a, B=1, C=1, r=1$) で例示して見よう。最終値は $\bar{x}_s = (1, -a)^T$ となる。ここで、

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}$$

とし、初期値を $x(0) = x_0$ と表記する。すると(23)式の制御則の場合の評価関数値 (J_1) は、 $J_1 = (x_0 - 1)^2 p_1 - 2a(x_0 - 1)p_2 + a^2 p_3$ となる。他方、(24)式の制御則の場合の評価関数値 (J_2) は、 $J_2 = (x_0 - 1)^2 p_1$ となる。よって、 $\Delta J \equiv J_1 - J_2 = -2ap_2(x_0 + 1) + a^2 p_3$ だから、初期値 x_0 の値によっては、 ΔJ は常に正にはなりえない。

Fig. 2 Step response of the optimal tracking system without initial value compensator; $r_1=0.5$, $r_2=1.0$; initial values: $x_1(0)=1.0$, $x_2(0)=0.0$ ($i=2\sim6$), $z_i(0)=0.0$ ($i=1,2$)

合した例題¹⁾で、(23)式の効果を示そう。速応性、条件付安定性の条件などから“最適”と考えられる2次形式の重み行列⁵⁾(注3)

$$Q = \begin{bmatrix} 1.052 & -0.229 \\ -0.229 & 1.000 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.432 & 0.987 \\ 0.987 & 1.379 \end{bmatrix} \cdot 6.93 \cdot 10^{-5}$$

を用いて設計した S_c^* が $x_1(0)=y_1(0)=1$, $x_2(0)=0$ ($i=2\sim6$), $z_i(0)=0$ ($i=1,2$) の初期値で $r=(0.5, 1.0)^T$ の設定値のときの応答を調べた。Fig. 2 には (21) 式の制御則を採用したときの応答を示し、Fig. 3 には (23) 式の制御則を採用したときの応答を示した。この S_c^* はかなりよく非干渉化されているため⁵⁾, y_2 には初期値の影響はほとんど出ていないが、 y_1 の応答の改善は著しい。また、操作量は $t=0$ で連続的变化をするという実用性があるばかりでなく、最小値の絶対値が $1/8$ 程度になっている。 $x_4(0)=y_2(0)=1$ のときもほぼ同様な特徴が見られ、特に $y_2(t)$ は初めから最終値にあるので、ほとんど変化しなかった。 $z_1(0)=1$ や $z_2(0)=1$ の場合は予想通り (21) 式と (23) 式による相異は応答にはほとんど現れなかった。

5. おわりに

初期値が零でない場合の応答を改善できる線形多入

(注3) 文献5) の Q , N は一部書き間違いであり、同論文(24)式 A_2^{-1} は A_1^{-1} , (25)式 H_1^* は H_1^{*-1} が正しい。

Fig. 3 Step response of the optimal tracking System with initial value compensator; set points and initial values are as same as the Fig. 2 case

出力最適追従系 (S_c^*) の構成法について論じた。最適制御則は、状態フィードバックと初期値に依存する定数項で構成されるが、容易に実現でき、ステップ入力に対しても $t=0$ で連続的に変化するという好ましい特徴をもつ。本稿で提案した修正は、 S_c^* の極配置、漸近性性質には全く影響を与えないので、それらの性質を用いて、系統的に評価関数の重み行列を選ぶことができるという利点を保持できる⁵⁾。なお、 K_1, K_2 の決め方は本論文の手法によらない方法も提案されているが、その場合も速応性を増した場合には本論文の提案する初期値補償器が必要になると思われる。ただし、系が平衡点にある場合、 $z(t)-K_1x(t)$ の値はほぼ打ち消し合っているので、設定値の変更のみの場合、初期値補償器の役割は大きくない。

本稿を書くにあたっては千葉大助教授美多勉氏に多くの示唆をいただいたことを記し、深謝します。

参考文献

- 1) 武田, 北森: 線形多入出力最適追従制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **14**-4, 359/364 (1978)
- 2) 松村, 小林, 秋山: 横軸受形磁気軸受の基本方程式と制御系設計, 電気学会論文誌C, **101**-6, 137/144 (1981)
- 3) 横田: 現代制御をエナメル線製造炉に適用—精度 $\pm 1^\circ\text{C}$, 炉内温度分布を実現, 日経メカニカル, 2月15日号, 70/77 (1982)
- 4) 美多, 向田: デジタル制御系における最適サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, **19**-3, 193/199 (1983)
- 5) 武田, 北森: 2次形式評価関数の重み行列の一決定法, 計測自動制御学会論文集, **17**-6, 631/639 (1981)