Chattering Controls を含む強変分アルゴリズムの一改善

井 前 譲*・箱 守 京次郎*

An Improved Strong-Variation Algorithm Involving Chattering Controls

Joe IMAE* and Kyojiro HAKOMORI*

1. はじめに

操作量拘束条件を含む最適制御問題に対し数値解法アルゴリズムは種々提案されているが¹⁾、その中で操作量の修正に際し強変分を用いるアルゴリズムは広範囲な拘束条件を扱うことができるため最近注目を集めており、アルゴリズムの収束性や数値計算に適した強変分構成法に関して研究がすすめられている^{2)~7)}。

筆者らは先に実用性を考慮した強変分構成法を考案して従来とは異なる強変分アルゴリズムを提案しその収束性について検討した⁷⁾。しかしながら部分問題として infimum の計算を含んでおり実際の計算に際しては近似計算式を採用せざるをえないという問題点を残していた。本論文では Armijo の方法⁸⁾を参考にして infimum 計算を含まない形の、より実用的な強変分アルゴリズムを提案しその収束性を証明する。

2. 問題の設定と仮定

制御対象の状態方程式、初期条件、評価関数がそれぞれ

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in R^n \quad (1)$$

$$J(u) = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t)) dt \quad (2)$$

で与えられるとする。このとき固定制御区間 $[t_0, t_1]$ 上で評価関数(2)式を最小にする最適制御問題を考える。ここに、操作量 $u(t)$ は $[t_0, t_1] \rightarrow U$ (R^r のコンパクトな部分集合)なる有界な可測関数であり、状態軌道 $x(t)$ は $u(t)$ を用いて(1)式より得られる $[t_0, t_1] \rightarrow R^n$ なる絶対連続な関数である。

[仮定] (i) $f: R^n \times R^r \rightarrow R^n$, $L: R^n \times R^r \rightarrow R^1$,

$G: R^n \rightarrow R^1$ かつそれらの微係数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial u$, $\partial L/\partial x$, $\partial L/\partial u$, $\partial G/\partial x$ はすべて連続である。

(ii) 任意の $x \in R^n$, $u \in U$ に対しある定数 $M_1 \in (0, \infty)$ が存在して次式が成立する。

$$|f(x, u)| \leq M_1(|x| + 1) \quad (3)$$

3. 強変分アルゴリズム

最適操作量を求めるための強変分アルゴリズムを、Armijo の方法⁸⁾を参考にして infimum 計算を含まない形で提案する。

<ステップ 0> 可測関数 $u^0: [t_0, t_1] \rightarrow U$, 定数 $M_2 \in [1, \infty)$, $M_3 \in (0, 1)$, 無限数列 $\{\eta_k\}_{k=0}^\infty$ を選ぶ。ただし $1 = \eta_0 > \eta_1 > \eta_2 > \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0$ とする。

<ステップ 1> $i = 0$ 。

<ステップ 2> $u^i(t)$ を用いて(1)式より状態軌道 $x^i(t)$ を求める。

<ステップ 3> $u^i(t)$, $x^i(t)$ を用いて(4)式を満足する随伴ベクトル $p^i(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) を求める。

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^i(t) &= - \left[\frac{\partial f(x^i, u^i)}{\partial x} \right]^T p^i(t) + \left[\frac{\partial L(x^i, u^i)}{\partial x} \right]^T \\ p^i(t) &= - \left[\frac{\partial G(x^i(t_1))}{\partial x} \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

<ステップ 4> 次式を満足する可測関数 $r^i: [t_0, t_1] \rightarrow U$ を求める。

$$H(x^i, r^i, p^i) = \max_{v \in U} H(x^i, v, p^i) \quad (a. e. t \in [t_0, t_1]) \quad (5)$$

ただし

$$H(x, u, p) = -L(x, u) + p^T f(x, u) \quad (6)$$

とする。

<ステップ 5> $H(x^i, r^i, p^i) = H(x^i, u^i, p^i)$ (a. e.) ならば終了。そのほかの場合はステップ 6へすすむ。

<ステップ 6> $k = 0$ 。

<ステップ 7> 文献7)に従って $\varepsilon \in (\eta_{k+1}, \eta_k]$, r^i, u^i によりつぎに示す(7)式を満足する操作量 $\tilde{u}_\varepsilon^i$ (Chattering Control) を構成する。

* 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai
(Received April 26, 1984)

(Revised June 28, 1984)

Key Words: optimal control, strong variation algorithm, chattering control

$$\left. \begin{aligned} |\hat{x}_i^i(t_1) - \hat{x}_i^i(t_1)| &\leq M_2 \varepsilon^2 \\ \left| \int_{t_0}^{t_1} \{L(\hat{x}_i^i(t), \tilde{u}_i^i(t)) - L(\hat{x}_i^i(t), u^i(t)) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon [L(\hat{x}_i^i(t), r^i(t)) - L(\hat{x}_i^i(t), u^i(t))] \} dt \right| \\ &\leq M_2 \varepsilon^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに $\hat{x}_i^i$ は $\tilde{u}_i^i$ を用いた (1) 式の解であり, $\hat{x}_i^i$ は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u^i(t)) \\ &\quad + \varepsilon [f(x(t), r^i(t)) - f(x(t), u^i(t))] \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

の解である.

ところで (7) 式を満足する $\tilde{u}_i^i$ の存在に関しては文献 9) の Appendix を参照されたい.

〈ステップ 8〉 つぎに示す (9) 式が成立するならば $u^{i+1} = \tilde{u}_i^i$ においてステップ 9 へすすむ. そのほかの場合は $k = k+1$ としてステップ 7 へもどる.

$$J(\tilde{u}_i^i) - J(u^i) \leq -\varepsilon M_3$$

$$\times \int_{t_0}^{t_1} [H(x^i, r^i, p^i) - H(x^i, u^i, p^i)] dt \quad (9)$$

〈ステップ 9〉 $i = i+1$ としてステップ 2 へもどる.

4. 収束定理と証明

《定理》 本アルゴリズムにより生成される無限関数列 $\{u^i\}_{i=0}^\infty$ と可測関数 $\bar{u}: [t_0, t_1] \rightarrow U$ に関して

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} |u^i(t) - \bar{u}(t)| dt = 0 \quad (10)$$

なる関係が成立するならば $\bar{u}(t)$ は最大原理 (11) 式を満足する.

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \max_{v \in U} H(\bar{x}, v, \bar{p}) \quad (a.e.) \quad (11)$$

ここに $\bar{x}$ は $\bar{u}$ を用いた (1) 式の解であり, $\bar{p}$ は $\bar{u}, \bar{x}$ を用いた (4) 式の解である.

《証明》 定理が成立しないとして矛盾を導く. 定理が成立しないと仮定するとつぎのような定数 $a > 0$, 可測関数 $\bar{u}: [t_0, t_1] \rightarrow U$ がそれぞれ存在する (たとえば文献 10) の p. 125 参照).

$$\int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) - H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})] dt = a \quad (12)$$

いまステップ 7 の ε を $\varepsilon(i, k)$ としてステップ 8 の (9) 式が成り立つときの ε を $\varepsilon(i, k_i)$ とおくと, 無限数列 $\{\varepsilon(i, k_i)\}_{i=0}^\infty$ に対しある定数 $\alpha_0 (0 < \alpha_0 < 1)$ が存在して

$$\alpha_0 \leq \varepsilon(i, k_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

が導かれる (詳細は付録参照).

よってつぎの関係式を得る.

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) = J(\tilde{u}_i^i(i, k_i)) - J(u^i)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\varepsilon(i, k_i) M_3 \int_{t_0}^{t_1} [H(x^i, r^i, p^i) \\ &\quad - H(x^i, u^i, p^i)] dt \quad (\because (9) \text{ 式}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\alpha_0 M_3 \int_{t_0}^{t_1} [H(x^i, r^i, p^i) - H(x^i, u^i, p^i)] dt \\ &\quad (\because (13) \text{ 式}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\alpha_0 M_3 \int_{t_0}^{t_1} [H(x^i, \tilde{u}, p^i) - H(x^i, u^i, p^i)] dt \\ &\quad (\because (5) \text{ 式}) \end{aligned}$$

$$= -\alpha_0 M_3 \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}, \tilde{u}, \bar{p}) - H(\bar{x}, u, \bar{p})] dt$$

$$- \alpha_0 M_3 \int_{t_0}^{t_1} [H(x^i, \tilde{u}, p^i) - H(x^i, u^i, p^i)$$

$$- H(\bar{x}, \tilde{u}, \bar{p}) + H(\bar{x}, u, \bar{p})] dt \quad (14)$$

ここに文献 7) の補題 2 において $\delta = a/2$ とおくことにより, また (12) 式を用いることにより

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) \leq -(\alpha_0 M_3 a)/2 \quad (i \geq i_1) \quad (15)$$

を得る. ただし i_1 は適当な定数である. このことは $|J(u^i)| \rightarrow \infty \quad (i \rightarrow \infty)$ を意味しており仮定 (ii) から導かれる $|J(u^i)|$ の有界性に矛盾する. よって定理は成立する.

5. おわりに

Armijo の方法を参考にして, 繰返し計算の過程で infimum の計算を含まない形の強変分アルゴリズムを提案しその収束性を検討した. なお, 本アルゴリズムにより生成される関数列 $\{u^i\}$ が有限個の場合, 繰返しの最終過程で得られた操作量は最大原理を満足する.

参考文献

- 1) E. Polak: A Historical Survey of Computational Methods in Optimal Control, SIAM Review, **15**-2, 553/584 (1973)
- 2) D. H. Jacobson and D. Q. Mayne: Differential Dynamic Programming, American Elsevier, New York (1970)
- 3) D. Q. Mayne and E. Polak: First-Order Strong Variation Algorithms for Optimal Control, J. O. T. A., **16**, 277/301 (1975)
- 4) J. Williamson and E. Polak: Relaxed Controls and Convergence of Optimal Control Algorithms, SIAM J. on Control, **14**-4, 737/756 (1976)
- 5) K. L. Teo and L. T. Yeo: On the Computational Methods of Optimal Control Problems, International J. System Sci., **10**-1, 51/76 (1979)
- 6) Z. S. Wu and K. L. Teo: First-Order Strong Variation Algorithms for Optimal Control Problems Involving Hyperbolic Systems, J. O. T. A., **39**-4, 561/587 (1983)
- 7) 井前, 箱守: 操作量拘束を含む最適制御問題に関する強変分を用いた数値解法アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **19**-11, 851/857 (1983)

- 8) 今野, 山下: 非線形計画法, 138/139, 日科技連出版社 (1978)
- 9) K. Makowski and L. W. Neustadt: Optimal Control Problems with Mixed-Control-Phase Variable Equality and Inequality Constraints, SIAM J. on Control, **12**-2, 184/228 (1974)
- 10) R. V. Gamkrelidze: On Some Extremal Problems in the Theory of Differential Equations with Applications to the Theory of Optimal Control, SIAM J. on Control, Ser. A, **3**-1, 106/128 (1965)

《付 録》

〈(13) 式の導出〉 いま, (13) 式が成立しないとする. このとき $\varepsilon(i_j, k_{i_j}) < \eta_j, i_{j+1} > i_j$ ($j=1, 2, \dots$) なる部分列 $\{\varepsilon(i_j, k_{i_j})\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する. $\varepsilon_j = \varepsilon(i_j, k_{i_j}-1)$ とおくとステップ 8 から次式を得る.

$$\frac{1}{\varepsilon_j} [J(\tilde{u}_{\varepsilon_j}^{i_j}) - J(u^{i_j})] + M_3 \int_{t_0}^{t_1} [H(x^{i_j}, r^{i_j}, p^{i_j}) - H(x^{i_j}, u^{i_j}, p^{i_j})] dt > 0 \quad (\text{A. 1})$$

上式の左辺を A とおいてつぎのように変形する.

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{\varepsilon_j} [J(\tilde{u}_{\varepsilon_j}^{i_j}) - J(u^{i_j})] - \frac{\partial G(x^{i_j}(t_1))}{\partial x} \delta x^{i_j}(t_1) \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L(x^{i_j}, u^{i_j})}{\partial x} \delta x^{i_j} + L(x^{i_j}, r^{i_j}) \right. \\ & \left. - L(x^{i_j}, u^{i_j}) \right] dt \\ & - (1-M_3) \int_{t_0}^{t_1} [H(\bar{x}, \tilde{u}, \bar{p}) - H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})] dt \\ & - (1-M_3) \int_{t_0}^{t_1} [H(x^{i_j}, \tilde{u}, p^{i_j}) - H(x^{i_j}, u^{i_j}, p^{i_j})] dt \\ & - H(\bar{x}, \tilde{u}, \bar{p}) + H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \int_{t_0}^{t_1} dt \\ & - (1-M_3) \int_{t_0}^{t_1} [H(x^{i_j}, r^{i_j}, p^{i_j}) - H(x^{i_j}, u^{i_j}, p^{i_j})] dt \end{aligned}$$

$$- H(x^{i_j}, \tilde{u}, p^{i_j})] dt \quad (\text{A. 2})$$

ここに $\delta x^{i_j}(t)$ は次式の解である.

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x}(t) = & \frac{\partial f(x^{i_j}(t), u^{i_j}(t))}{\partial x} \delta x(t) \\ & + f(x^{i_j}(t), r^{i_j}(t)) \\ & - f(x^{i_j}(t), u^{i_j}(t)) \\ \delta x(t_0) = & 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 3})$$

ところで, $\varepsilon(i_j, k_{i_j}) < \eta_j$ より $\varepsilon(i_j, k_{i_j}-1) \leq \eta_{j-1}$ が導かれて $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) がいえることに注意すると, 文献 7) の補題 1 において $\delta = [(1-M_3)a]/3$ とおくことにより (A. 4) 式を, また同文献の補題 2 において $\delta = a/3$ とおくことにより (A. 5) 式を得る.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon_j} [J(\tilde{u}_{\varepsilon_j}^{i_j}) - J(u^{i_j})] - \frac{\partial G(x^{i_j}(t_1))}{\partial x} \delta x^{i_j}(t_1) \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L(x^{i_j}, u^{i_j})}{\partial x} \delta x^{i_j} \right. \right. \\ & \left. \left. + L(x^{i_j}, r^{i_j}) - L(x^{i_j}, u^{i_j}) \right] dt \right| \\ & < [(1-M_3)a]/3 \quad (j \geq j_1) \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^{t_1} [H(x^{i_j}, \tilde{u}, p^{i_j}) - H(x^{i_j}, u^{i_j}, p^{i_j}) - H(\bar{x}, \tilde{u}, \bar{p}) \right. \\ & \left. + H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})] dt \right| < a/3 \quad (j \geq j_2) \quad (\text{A. 5}) \end{aligned}$$

したがって (A. 2) 式に, (A. 4), (12), (A. 5), (5) 式を適用して

$$\begin{aligned} A \leq & [(1-M_3)a]/3 - (1-M_3)a + [(1-M_3)a]/3 \\ = & -[(1-M_3)a]/3 < 0 \quad (j \geq \max\{j_1, j_2\}) \quad (\text{A. 6}) \end{aligned}$$

この結果は (A. 1) 式に反しており, (13) 式が成立しないとの仮定は否定される. よって (13) 式は成立する.