強変分を用いた不連続最適制御問題の数値解法[†]

井 前 讓*・箱 守 京次郎**

A Strong Variation Algorithm for Numerical Solutions of Discontinuous Optimal Control Problems

Joe IMAE* and Kyojiro HAKOMORI**

This paper presents a strong variation algorithm for solving optimal control problems whose dynamics are described by ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides.

It is proved that the accumulation points of the sequence of controls generated by the algorithm, if exist, satisfy maximum principle type necessary conditions for optimality. The major difficulties which arise from the existence of "separating hyperplanes" dividing the state space into subregions are that state trajectories do not necessarily exist on the whole time interval, and that adjoint variables may have the jump-discontinuities at hyperplane passing times. Both of the existence of state trajectories and jump-phenomena of adjoint variables are discussed in detail. Moreover, two examples with separating hyperplanes are shown to illustrate the effectiveness of the present algorithm.

Key Words: discontinuous optimal control, computational method, strong variation algorithm, control constraints

1. はじめに

制御対象を数式モデル化する際、状態空間を部分領域に適当に分割して各領域ごとに適切な状態方程式を選び、これらの複数個の状態方程式を用いてシステムを表現する手法がある。この場合に対する最適制御問題

題は不連続最適制御問題と呼ばれ今までに多くの研究が報告されている^{1)~9)}。

しかしながらこれらの研究の大部分は最適解の満足すべき必要条件に関するものであり、最適解を求めるための数値解法に関しては2, 3の報告がなされている程度である。不連続最適制御問題を扱う場合、分割超曲面を境にして状態方程式が異なるため取り扱いがより複雑となり特別な配慮が必要となる。田村⁷⁾は分割境界面を表わす関数をペナルティとして評価関数の中に組み込み、勾配関数を用いたアルゴリズムを提案してかつ計算例を示している。市川⁸⁾は分割超曲面により生じる随伴ベクトルの跳躍量に注意するならば最急降下法を適用することにより良好な結果が得られることを、具体例を用いて示している。しかしいずれの場合も、具体的な計算例は示されているもののアルゴリズムの収束性や操作量の拘束条件に関して十分な議論はなされておらず、実用上問題が残されていた。

さて通常の最適制御の分野においては操作量拘束条件を含む場合、いろいろな数値解法アルゴリズムが提案されている⁹⁾。中でも、操作量修正方法として強変分を用いるアルゴリズムは一般的な拘束条件を扱うことができるものとして最近注目を集めており、強変分の実用的な構成法やアルゴリズムの収束性に関する研究が盛んである^{10)~12)}。筆者らは本論文に先立ち、実用性と収束性の両方を考慮した強変分によるアルゴリズムを提案して具体例によりその有効性を検討した¹³⁾。本論文では筆者らが提案したアルゴリズムを、操作量拘束条件を含む不連続最適制御問題に対し適用可能な形に拡張することを目的とする。

以下、2章では問題の定式化を行う。3, 4章ではアルゴリズムを提案し、本アルゴリズムにより生成される無限関数列の極限関数は最大原理を満足することを証明する。その際、超曲面が存在するために生じる

[†] 第20回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭56・7)

* 秋田県工業技術センター 秋田市新屋町字砂奴寄 4-1

** 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

* Akita Prefectural Institute of Industrial Technology, Akita

** Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

(Received November 15, 1983)

(Revised March 21, 1984)

諸問題に関し詳細に検討している。5 章では本アルゴリズムを実際にプログラミングして例題により計算を実行し、本アルゴリズムが実用的であることを示す。

2. 問題の記述

超曲面 $g_k(x)=0 (k=1, 2, \dots, l)$ により状態空間 R^n が部分領域 $X_k (k=1, 2, \dots, l, X_k$ は開集合, $\bar{X}_k$ 閉集合, $U_{k=1} \bar{X}_k = R^n$) に有限分割され、それぞれの領域において状態方程式が

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_k(x(t), u(t)), x(t) \in X_k, \\ u(t) &\in U \subset R^r, k=1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (1)$$

で表わされるとする。初期条件を

$$x(t_0) = x_0 \in X_1 \quad (2)$$

として評価関数

$$J(u) = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L_{1,2,\dots,l}(x(t), u(t)) dt \quad (3)$$

を固定制御区間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ において最小にする最適制御問題を考察する。

ここに、操作量 $u(t) (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ は断片連続関数であり、状態軌道 $x(t) (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ は $u(t)$ を用いて、(1), (2) 式により得られる絶対連続な解を部分領域ごとに順次接続したものである。また $L_{1,2,\dots,l}(x, u) = \sum_{k=1}^l L_k(x, u) e_k(x)$ であり、 $e_k(x)$ はつぎの性質をもつ特性関数である。

$$e_k(x) = \begin{cases} 1 & (x \in X_k) \\ 0 & (x \notin X_k) \end{cases}, k=1, 2, \dots, l \quad (4)$$

関数 $f_k, L_k, g_i, G (k=1, 2, \dots, l; i=1, 2, \dots, l-1)$ に関してつぎの仮定をおく。

【仮定】(i) $f_k: R^n \times R^r \rightarrow R^n, L_k: R^n \times R^r \rightarrow R^1, g_i: R^n \rightarrow R^1, G: R^n \rightarrow R^1$ かつそれらの微係数 $\partial f_k / \partial x, \partial f_k / \partial u, \partial L_k / \partial x, \partial L_k / \partial u, \partial g_i / \partial x, \partial G / \partial x$ はすべて連続である。

(ii) 任意の $x \in R^n, u \in U$ (U はコンパクト集合) に対し、 k に無関係なある定数 $M_1 \in (0, \infty)$ が存在して次式が成立する。

$$|f_k(x, u)| \leq M_1(|x| + 1) \quad (5)$$

3. アルゴリズムと最大原理

3.1 アルゴリズム

(ステップ 0) 断片連続関数 $u^0: [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \rightarrow U$, 定数 $M_2 \in [1, \infty), M_3 \in (0, 1)$ を選ぶ。

(ステップ 1) $i=0$ 。

(ステップ 2) $u^i(t)$ を用いて (1), (2) 式より状態軌道 $x^i(t)$ を求める。

(ステップ 3) $u^i(t), x^i(t)$ を用いて (6) 式を満足す

る随伴ベクトル $p^i(t) (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ を求める。ただし $p^i(t)$ は $[\bar{t}_0, t_{m_1}], [t_{m_1}, t_{m_2}], \dots, [t_{m_s}, \bar{t}_1]$ 上で絶対連続であり、時刻 $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_s}$ において跳躍条件 (7) を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^i(t) &= - \left[\frac{\partial f_{1,2,\dots,l}(x^i, u^i)}{\partial x} \right]^T p^i(t) \\ &\quad + \left[\frac{\partial L_{1,2,\dots,l}(x^i, u^i)}{\partial x} \right]^T \\ p^i(\bar{t}_1) &= - \left[\frac{\partial G(x^i(\bar{t}_1))}{\partial x} \right]^T \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [p^i(t_{m_j}^-)]^T &= [p^i(t_{m_j})]^T + [p^i(t_{m_j})]^T F_{n_j+1}^{n_j}(t_{m_j}; x^i, u^i) \\ &\quad \times \frac{\partial g_{m_j}(x^i(t_{m_j}))}{\partial x} [D_{n_j}^{m_j}(t_{m_j}; x^i, u^i)]^{-1} \\ j &= 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (7)$$

ここに状態軌道 x^i は部分領域を $X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_s+1} (m_1, m_2, \dots, m_{s+1}, n_1, n_2, \dots, n_s \in \{1, 2, \dots, l\})$ の順に、また分割超曲面を $g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_s}$ の順に通過するものとし、超曲面通過時刻をそれぞれ $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_s}$ とする。さらに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{1,2,\dots,l}(x, u)}{\partial x} &= \sum_{k=1}^l \frac{\partial f_k(x, u)}{\partial x} e_k(x) \\ \frac{\partial L_{1,2,\dots,l}(x, u)}{\partial x} &= \sum_{k=1}^l \frac{\partial L_k(x, u)}{\partial x} e_k(x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_g^i(\tau; x, u) &= f_a(x(\tau), u(\tau^+)) \\ &\quad - f_b(x(\tau), u(\tau^-)) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_g^i(\tau; x, u) &= [\partial g_a(x(\tau)) / \partial x] \\ &\quad \times f_b(x(\tau), u(\tau^-)) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u(\tau^+) &= \lim_{\downarrow} \tau u(t) \\ u(\tau^-) &= \lim_{\uparrow} \tau u(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。

(ステップ 4) (12) 式を満足する断片連続関数 $r^i: [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \rightarrow U$ を求める。

$$\begin{aligned} H_{1,2,\dots,l}(x^i(t), r^i(t), p^i(t)) \\ = \max_{v \in U} H_{1,2,\dots,l}(x^i(t), v, p^i(t)) \\ (t \in \{r^i(t) \text{ の連続点の集合} \} \setminus \\ \{ \text{超曲面の通過時刻} \}) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし $\{\cdot\} \setminus \{\cdot\}$ は差集合を意味し、

$$\begin{aligned} H_{1,2,\dots,l}(x, u, p) \\ = \sum_{k=1}^l [-L_k(x, u) + p^T f_k(x, u)] e_k(x) \end{aligned} \quad (13)$$

である。

(ステップ 5) $H_{1,2,\dots,l}(x^i, r^i, p^i) = H_{1,2,\dots,l}(x^i, u^i, p^i)$ ならば $u^j = r^j = u^i (j \geq i)$ として終了する。その他の場合はステップ 6 へすすむ。

(ステップ 6) 与えられた $\varepsilon \in [0, 1]$ に対し、3.2 節で述べる方法により $\tilde{u}_\varepsilon^i(t)$ を構成して (14) 式を満足する $u^{i+1}(t)$ を求める。

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) \leq M_\varepsilon [\inf_{\varepsilon \in I^i} (J(\tilde{u}_\varepsilon^i) - J(u^i))] \quad (14)$$

ここに、 $I^i = \{\varepsilon \in [0, 1] \mid \tilde{u}_\varepsilon^i(t) \text{ は (15) 式を満足する}\}$ である。

(ステップ7) $i = i + 1$ としてステップ2へすすむ。

3.2 $\tilde{u}_\varepsilon^i(t)$ の構成法

Gamkrelidze¹⁴⁾により提案された Chattering Controls の考え方を参考にして強変分 $\tilde{u}_\varepsilon^i(t)$ を構成する。構成方法は文献13)とほとんど同様である。詳細は文献を参照されたい。ただし本論文においては制御区間は $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ であり、 I_α はつぎの(15)式が満足されるように調整されなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \text{[条件]} \quad & \text{(i)} \quad |\dot{x}_\varepsilon^i(\bar{t}_1) - \dot{x}_\varepsilon^i(\bar{t}_0)| \leq M_2 \varepsilon^2 \\ & \text{(ii)} \quad \left| \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \{L_{1,2,\dots,i}(\dot{x}_\varepsilon^i(t), \tilde{u}_\varepsilon^i(t)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - L_{1,2,\dots,i}(\dot{x}_\varepsilon^i(t), u^i(t)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varepsilon [L_{1,2,\dots,i}(\dot{x}_\varepsilon^i(t), r^i(t)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - L_{1,2,\dots,i}(\dot{x}_\varepsilon^i(t), u^i(t))] \right\} dt \right| \leq M_2 \varepsilon^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに $\dot{x}_\varepsilon^i(t)$ は操作量として $\tilde{u}_\varepsilon^i(t)$ を用いた(1), (2)式の解であり、 $\dot{x}_\varepsilon^i(t)$ は初期条件(2)のもとで

$$\dot{x}_\varepsilon^i(t) = f_k(x_\varepsilon^i(t), u^i(t)) + \varepsilon E_k(t; x_\varepsilon^i) \quad (16)$$

により得られる解である。ただし $k=1, 2, \dots, l$ に対して

$$E_k(t; x) = f_k(x(t), r^i(t)) - f_k(x(t), u^i(t)) \quad (17)$$

である。

3.3 最大原理

本アルゴリズムの収束性に関してつぎの定理を得る。

《定理》 本アルゴリズムにより生成される関数列 $\{u^i\}$, $\{r^i\}$ ($i=1, 2, \dots$) と断片連続関数 $\bar{u}, \bar{r} : [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \rightarrow U$ に関して

$$\text{(i)} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} |u^i(t) - \bar{u}(t)| dt = 0 \quad (18)$$

$$\text{(ii)} \quad \bar{t}_k (k=1, 2, \dots, l-1) \text{ において適当な } i_0 \text{ と } T_k = [\bar{t}_k', \bar{t}_k''] (\bar{t}_k' < \bar{t}_k < \bar{t}_k'') \text{ が存在し、} \bar{u}(t), \bar{r}(t), u^i(t), r^i(t) (i \geq i_0) \text{ は } T_k \text{ 上で連続であり、}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in T_k} |u^i(t) - \bar{u}(t)| = 0 \quad (19)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{t \in T_k} |r^i(t) - \bar{r}(t)| = 0 \quad (20)$$

$$\text{(iii)} \quad k=1, 2, \dots, l-1 \text{ に対して}$$

$$D_k^k(\bar{t}_k; \bar{x}, \bar{u}) \neq 0 \quad (21)$$

$$D_{k+1}^k(\bar{t}_k; \bar{x}, \bar{u}) \neq 0 \quad (22)$$

$$D_{k+1}^k(\bar{t}_k; \bar{x}, \bar{r}) \neq 0 \quad (23)$$

であり、かつ(21)～(23)式の左辺は同符号なる関係が成立するならば $\bar{u}(t)$ は不連続最適制御問題の最大原理¹⁵⁾を満足する。

$$\begin{aligned} & H_{1,2,\dots,i}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \\ & = \max_{v \in U} H_{1,2,\dots,i}(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \\ & \quad (t \in \{\bar{u}(t) \text{ の連続点の集合}\} \setminus \\ & \quad \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{l-1}\}) \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、 $\bar{x}(t)$ は $\bar{u}(t)$ に対する(1), (2)式の解であり、 $\bar{p}(t)$ は $\bar{u}(t), \bar{x}(t)$ に対する(6), (7)式の解である。また、 $\bar{x}(t)$ は部分領域を $X_1, X_2, \dots, X_l$ の順に、分割超曲面を $g_1, g_2, \dots, g_{l-1}$ の順に通過するものとし、超曲面通過時刻を $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{l-1}$ とする。

4. アルゴリズムの収束性

定理の証明に入る前に変動軌道 $\dot{x}_\varepsilon^i(t), \dot{x}_\varepsilon^i(t)$ について検討を行う。すなわち、ある適当な i_1, ε_1 に対し $\dot{x}_\varepsilon^i(t), \dot{x}_\varepsilon^i(t) (i \geq i_1, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1)$ が全区間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ で存在してかつ(15)式を満足することを示す。このことは本アルゴリズムのステップ6において、 ε が十分零に近いならば、(15)式を満足する $\tilde{u}_\varepsilon^i(t)$ が必ず構成可能であることを示しており、定理を証明するうえで重要である。

4.1 $\dot{x}_\varepsilon^i(t)$ と $\dot{x}_\varepsilon^i(t)$ の存在

まず初めに、部分領域 X_1 において(15)式を満足する $\dot{x}_\varepsilon^i(t), \dot{x}_\varepsilon^i(t)$ が存在することを示す。

いま、 X_1 における状態方程式が全空間で成り立つとする。このとき X_1 における状態軌道 $\dot{x}(t) (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ は文献16)の定理 II. 4.1 により適当な区間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_1^*]$ に延長できる。すなわち、

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u(t)), \quad x(\bar{t}_0) = x_0 \quad (25)$$

を満足する解 $x_1(t)$ が $[\bar{t}_0, \bar{t}_1^*]$ 上で存在する。ただし $x(t) = \dot{x}(t) (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1])$ であり、 $\bar{t}_1 < \bar{t}_1^*$ である。また文献16)の定理 II. 4.3 により

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u^i(t)) + \varepsilon E_1(t, x), \quad x(\bar{t}_0) = x_0 \quad (26)$$

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), \tilde{u}_\varepsilon^i(t)), \quad x(\bar{t}_0) = x_0 \quad (27)$$

をそれぞれ満足する解 $\dot{x}_1(t), \dot{x}_1(t)$ が $[\bar{t}_0, \bar{t}_1^*]$ 上で存在する。

ここで $x_1(t)$ と $\dot{x}_1(t)$ に関してつぎのことがいえる。任意の $\delta > 0$ に対し i_2, ε_2 が存在して

$$\begin{aligned} & |x_1(t) - \dot{x}_1(t)| < \delta \\ & (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1^*], i \geq i_2, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (28)$$

が成立する。また $\dot{x}_1(t), \dot{x}_1(t)$ に関しては、スカラー変数 $x_0(t)$

$$x_0(t) = \int_{\bar{t}_0}^t L_1(x(\theta), u(\theta)) d\theta \quad (29)$$

を導入して状態空間を $(n+1)$ 次元に拡張し、 $\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x^T(t))^T, \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, u) = (L_1(x, u), f_1^T(x, u))^T$ とおくことによりつぎのことが導かれる。すなわち、

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u^i(t)) + \varepsilon [f_1(x(t), r^i(t)) - f_1(x(t), u^i(t))] \quad (30)$$

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), \tilde{u}_i^i(t)) \quad (31)$$

に関して文献17)のAppendixと同様にGamkrelidze¹⁴⁾の lemma 4.1 に注意することによりつぎのような i_3, ε_3 が存在する. すなわち, $t \in [\bar{t}_0, t_1^*]$, $i \geq i_3, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ に対して

$$\left\{ \begin{aligned} |\bar{x}_1(t) - \hat{x}_1(t)| &\leq M_2 \varepsilon^2 \\ \left| \int_{\bar{t}_0}^t [L_1(\bar{x}_1, \tilde{u}_i^i) - L_1(\bar{x}_1, u^i) - \varepsilon (L_1(\bar{x}_1, r^i) - L_1(\bar{x}_1, u^i))] d\theta \right| &\leq M_2 \varepsilon^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

である.

さて, つぎに $X_{k-1} (k \geq 2)$ において (15) 式を満たす $\hat{x}_{k-1}(t), \bar{x}_{k-1}(t)$ の存在が証明されたとして X_k について考察する.

いま X_k の状態方程式が全空間で成り立つとして,

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), \bar{u}(t)), x(\bar{t}_{k-1}) = \bar{x}(\bar{t}_{k-1}) \quad (33)$$

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u^i(t)) + \varepsilon E_k(t, x),$$

$$x(\bar{t}_{k-1}) = \hat{x}_{k-1}(\bar{t}_{k-1}) \quad (34)$$

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), \tilde{u}_i^i(t)), x(\bar{t}_{k-1}) = \bar{x}_{k-1}(\bar{t}_{k-1}) \quad (35)$$

を満足する解をそれぞれ $x_k(t), \hat{x}_k(t), \bar{x}_k(t)$ とするとき, X_1 の場合と同様の考察により適当な区間 $[\bar{t}_{k-1}^*, t_k^*]$ で存在することが導かれる. ただし, $\bar{t}_{k-1}^* < \bar{t}_{k-1}$, $\bar{t}_k < t_k^* (k=l)$ のときに限り $\bar{t}_k = t_k^*$, また $\bar{t}_{k-1}, \bar{t}_{k-1}$ は $\hat{x}_{k-1}(t), \bar{x}_{k-1}(t)$ が超曲面 $q_{k-1}(x) = 0$ を横切る時刻とする. ここで $x_k(t), \hat{x}_k(t), \bar{x}_k(t)$ に関してつぎのことがいえる. 任意の $\delta > 0$ に対し i_4, ε_4 が存在して

$$\left\{ \begin{aligned} |x_k(t) - \hat{x}_k(t)| &< \delta \quad (t \in [\max\{\bar{t}_{k-1}, \bar{t}_{k-1}\}, t_k^*], \\ i &\geq i_4, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_4) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

であり, また適当な i_5, ε_5 に対して

$$\left\{ \begin{aligned} |\bar{x}_k(t) - \hat{x}_k(t)| &\leq M_2 \varepsilon^2 \\ \left| \int_{T^*} [L_k(\bar{x}_k, \tilde{u}_i^i) - L_k(\bar{x}_k, u^i) - \varepsilon (L_k(\bar{x}_k, r^i) - L_k(\bar{x}_k, u^i))] d\theta \right| &\leq M_2 \varepsilon^2 \quad (T^* = [\max\{\bar{t}_{k-1}, \bar{t}_{k-1}\}, t_k^*], i \geq i_5, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_5) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

が成立する.

以上より $\hat{x}_k(t), \bar{x}_k(t) (k=1, 2, \dots, l)$ を順次接続することにより, ε が十分零に近いならば (15) 式を満足する変動軌道 $\hat{x}_i^i(t), \bar{x}_i^i(t)$ が全空間において存在することが示された. ただし十分小さな ε, i^{-1} に対して変動軌道の超曲面通過回数は超曲面のそれぞれに関し 1 回のみであること, また $\varepsilon, i^{-1} \rightarrow 0$ に対して $|\bar{t}_j - \hat{t}_j|, |\bar{t}_j - \hat{t}_j| \rightarrow 0 (j=1, 2, \dots, l-1)$ であることが (19) ~ (23) (28), (32), (36), (37) 式などにより導かれることに注意する必要がある.

4.2 $\hat{x}_i^i(t)$ と $x^i(t)$ の関係

つぎに $\hat{x}_i^i(t), x^i(t)$ の関係を補題 1 の形で明らかにしておく. この補題は補題 2 の証明において重要である.

[補題 1] つぎのような定数 $M_4 (< \infty)$ が存在する. すなわち任意の $\delta > 0$ に対し i_6, ε_6 が存在して $i \geq i_6, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_6$ ならば

$$\left| \frac{\hat{x}_i^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| < \delta \quad (t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_i] \setminus \bar{I}) \quad (38)$$

$$\left| \frac{\hat{x}_i^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| < M_4 \quad (t \in \bar{I}) \quad (39)$$

が成立する. ここに $\delta x^i(t)$ は $[\bar{t}_0, t_i], \dots, [t_{i-1}^*, \bar{t}_i]$ の各区間で絶対連続な (40) 式を満足する解であり, 時刻 $t_i^*, t_{i-1}^*, \dots, t_{i-1}^*$ において跳躍条件 (41) を満足する.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \dot{x}^i(t) &= \frac{\partial f_k(x^i, u^i)}{\partial x} \delta x^i(t) + E_k(t; x^i), k=1, 2, \dots, l \\ \delta x^i(\bar{t}_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \delta x^i(t_k^*) &= \delta x^i(t_k^{*-}) + F_k^{k+1}(t_k^*; x^i, u^i) \\ &\times \frac{\partial g_k(x^i(t_k^*))}{\partial x} \delta x^i(t_k^{*-}) [D_k^k(t_k^*; x^i, u^i)]^{-1}, \\ k &= 1, 2, \dots, l-1 \end{aligned} \quad (41)$$

また $t_k^*, \bar{t}_k$ は $x^i(t), \hat{x}_i^i(t)$ が $q_k(x) = 0$ を通過する時刻であり, $\bar{I} = \cup_{k=1, 2, \dots, l-1} [\bar{t}_k^*, t_k^*], t_k^* = \max\{t_k^*, \bar{t}_k\}, t_k^* = \min\{t_k^*, \bar{t}_k\}$ とする.

(証明) まず初めに X_1 について考察する. $\hat{x}_1^i(t), x^i(t), \delta x^i(t) (t \in [\bar{t}_0, t_m^*])$ に関して次式が成立する.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\hat{x}_1^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bar{t}_0}^t |f_1(\hat{x}_1^i, u^i) - f_1(x^i, u^i) \\ &\quad - \frac{\partial f_1(x^i, u^i)}{\partial x} [\hat{x}_1^i(\theta) - x^i(\theta)]| d\theta \\ &\quad + \int_{\bar{t}_0}^t \left| \frac{\partial f_1(x^i, u^i)}{\partial x} \right| \left| \frac{\hat{x}_1^i(\theta) - x^i(\theta)}{\varepsilon} - \delta x^i(\theta) \right| d\theta \\ &\quad + \int_{\bar{t}_0}^t |E_1(\theta; \hat{x}_1^i) - E_1(\theta; x^i)| d\theta \end{aligned} \quad (42)$$

$|(\hat{x}_1^i(\theta) - x^i(\theta))/\varepsilon|$ の有界性, 平均値の定理¹⁶⁾, Gronwall の不等式により次式が得られる. すなわち任意の $\delta > 0$ に対し i_7, ε_7 が存在して

$$\left| \frac{\hat{x}_1^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| < \delta \quad (t \in [\bar{t}_0, t_m^*], i \geq i_7, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_7) \quad (43)$$

である.

つぎに $X_{k-1}(k \geq 2)$ において次式が成立すると仮定する。すなわち任意の $\delta > 0$ に対し i_8, ε_8 が存在して

$$\left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| < \delta \quad (t \in [t_M^{k-2}, t_m^{k-1}],$$

$$i \geq i_8, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_8) \quad (44)$$

とする。ただし $t_M^k = \bar{t}_0$ である。この仮定のもとに X^k における $\hat{x}_\varepsilon^i(t), x^i(t), \delta x^i(t)$ の関係式を導く。

$\hat{x}_\varepsilon^i(t), x^i(t), \delta x^i(t)$ に関し次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| \\ & \leq |\delta x^i(t_m^{k-1}) - \delta x^i(t_{k-1}^i)| \\ & \quad + \left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(t_m^{k-1}) - x^i(t_m^{k-1})}{\varepsilon} - \delta x^i(t_m^{k-1}) \right| \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{k-1}^i}^{t_{k-1}^i} |f_k(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i) - f_{k-1}(x^i, u^i) \\ & \quad - F_{k-1}^k(t_{k-1}^i; x^i, u^i)| d\theta \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{k-1}^i}^{t_M^{k-1}} |f_{k-1}(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i) - f_k(x^i, u^i) \\ & \quad + F_{k-1}^k(t_{k-1}^i; x^i, u^i)| d\theta \\ & \quad + \int_{t_m^{k-1}}^{t_{k-1}^i} |E_k(\theta; \hat{x}_\varepsilon^i)| d\theta + \int_{t_{k-1}^i}^{t_M^{k-1}} |E_{k-1}(\theta; \hat{x}_\varepsilon^i)| d\theta \\ & \quad + |F_{k-1}^k(t_{k-1}^i; x^i, u^i)| \left| \frac{(t_{k-1}^i - t_m^{k-1} + t_{k-1}^i - t_M^{k-1})}{\varepsilon} \right. \\ & \quad \left. - F_{k-1}^k(t_{k-1}^i; x^i, u^i) \left[\frac{\partial g_{k-1}(x^i(t_{k-1}^i))}{\partial x} \right] \right. \\ & \quad \left. \times \delta x^i(t_{k-1}^i) [D_{k-1}^k(t_{k-1}^i; x^i, u^i)]^{-1} \right| \\ & \quad + |\delta x^i(t_M^{k-1}) - \delta x^i(t_{k-1}^i)| \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_M^{k-1}}^t |f_k(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i) - f_k(x^i, u^i) \\ & \quad - \frac{\partial f_k(x^i, u^i)}{\partial x} (\hat{x}_\varepsilon^i(\theta) - x^i(\theta))| d\theta \\ & \quad + \int_{t_M^{k-1}}^t \left| \frac{\partial f_k(x^i, u^i)}{\partial x} \right| \left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(\theta) - x^i(\theta)}{\varepsilon} - \delta x^i(\theta) \right| d\theta \\ & \quad + \int_{t_M^{k-1}}^t |E_k(\theta; \hat{x}_\varepsilon^i) - E_k(\theta; x^i)| d\theta \quad (45) \end{aligned}$$

ところで $(t_{k-1}^i - t_m^{k-1} + t_{k-1}^i - t_M^{k-1})/\varepsilon$ に関しては、 $t_{k-1}^i \geq t_{k-1}$ の場合と $t_{k-1}^i < t_{k-1}$ の場合に分けて考えることにより次式が導かれる。任意の $\delta > 0$ に対して i_9, ε_9 が存在し

$$\left| \frac{t_{k-1}^i - t_m^{k-1} + t_{k-1}^i - t_M^{k-1}}{\varepsilon} - \frac{\partial g_{k-1}(x^i(t_{k-1}^i))}{\partial x} \delta x^i(t_{k-1}^i) \right.$$

$$\left. \times D_{k-1}^k(t_{k-1}^i; x^i, u^i) \right| < \delta (i \geq i_9, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_9) \quad (46)$$

である。よって (44), (46) 式, 平均値の定理¹⁶⁾, Gronwall の不等式を用いると (45) 式より次式を得る。すなわち任意の $\delta > 0$ に対し i_{10}, ε_{10} が存在して

$$\left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} - \delta x^i(t) \right| < \delta$$

$$(t \in [t_M^{k-1}, t_m^k], i \geq i_{10}, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{10}) \quad (47)$$

が成立する。

したがって (43), (44), (47) 式より補題の (38) 式が導かれる。

補題の (39) 式に関しては $\delta x^i(t)$ が有界であるから $(\hat{x}_\varepsilon^i(t) - x^i(t))/\varepsilon$ の有界性を示せば十分である。 $g_k(x) = 0 (k=1, 2, \dots, l-1)$ におけるその有界性は仮定 (ii), (38), (46) 式に注意するならば次式より導かれる。

$$\left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(t) - x^i(t)}{\varepsilon} \right| \leq \left| \frac{\hat{x}_\varepsilon^i(t_m^k) - x^i(t_m^k)}{\varepsilon} \right|$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_m^k}^{t_M^k} |f_k(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i) - f_{k+1}(x^i, u^i)| d\theta$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_m^k}^{t_M^k} |f_{k+1}(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i) - f_k(x^i, u^i)| d\theta$$

$$+ \int_{t_m^k}^{t_M^k} |f_k(\hat{x}_\varepsilon^i, r^i) - f_k(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i)| d\theta$$

$$+ \int_{t_m^k}^{t_M^k} |f_{k+1}(\hat{x}_\varepsilon^i, r^i) - f_{k+1}(\hat{x}_\varepsilon^i, u^i)| d\theta$$

$$\leq (\text{Const.}) + (\text{Const.}) \frac{|t_M^k - t_m^k|}{\varepsilon}$$

$$+ (\text{Const.}) |t_M^k - t_m^k| \quad (48)$$

以上より補題 1 は証明された。

4.3 定理の証明

証明は文献 13) と同様の方針で行う。ただし分割超曲面が存在するため跳躍条件に関する考察が必要となる。

定理が成立しないと仮定すると次式を満足する断片連続関数 $\tilde{u}: [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \rightarrow U$ と正数 α が存在する。

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} [H_{1,2,\dots,i}(\bar{x}(t), \tilde{u}(t), \bar{p}(t))$$

$$- H_{1,2,\dots,i}(\bar{x}(t), \tilde{u}(t), \bar{p}(t))] dt = 3\alpha \quad (49)$$

ここでつぎの二つの補題を用意する。

[補題 2] 適当な i_{11}, ε_{11} が存在し、 $i \geq i_{11}, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{11}$ に対して次式が成立する。

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} [J(\tilde{u}_\varepsilon^i) - J(u^i)] - \frac{\partial G(x^i(\bar{t}_1))}{\partial x} \delta x^i(\bar{t}_1) \right.$$

$$- \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \left[\frac{\partial L_{1,2,\dots,i}(x^i(t), u^i(t))}{\partial x} \delta x^i(t) \right.$$

$$+ L_{1,2,\dots,i}(x^i(t), r^i(t))$$

$$\left. \left. - L_{1,2,\dots,i}(x^i(t), u^i(t)) \right] dt \right| < \alpha \quad (50)$$

[補題 3] 適当な i_{12} が存在し、 $i \geq i_{12}$ に対して次式が成立する。

$$\left| \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} [H_{1,2,\dots,i}(x^i, \tilde{u}, \bar{p}^i) - H_{1,2,\dots,i}(x^i, u^i, p^i)] \right.$$

$$-H_{1,2,\dots,i}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + H_{1,2,\dots,i}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})]dt| < a \quad (51)$$

(補題 2, 3 の証明) 付録 1 参照.

以上の準備のもとに次式が導かれる. すなわち適当な i_{13}, ε_{13} が存在して

$$J(\bar{u}_{\varepsilon_{13}}^i) - J(u^i) \leq -a\varepsilon_{13} \quad (i \geq i_{13}) \quad (52)$$

である (付録 2 参照).

さて (14), (52) 式により

$$\begin{aligned} J(u^{i+1}) - J(u^i) &\leq M_3 \left[\inf_{\varepsilon \in I^i} (J(\bar{u}_{\varepsilon}^i) - J(u^i)) \right] \\ &\leq M_3 [J(\bar{u}_{\varepsilon_{13}}^i) - J(u^i)] \\ &\leq -M_3 a \varepsilon_{13} \quad (i \geq i_{13}) \end{aligned} \quad (53)$$

が導かれるが, この結果は $|J(u^i)| \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty)$ を示しており, 仮定 (ii) から導かれる $|J(u^i)|$ の有界性に矛盾する. ゆえに定理は証明された.

5. 数値計算

本論文で提案したアルゴリズムを実際にプログラミングし, 状態空間が 2 分割されている例題 2 題に適用してその有効性を確かめる.

本章で扱う例題は, 最短時間制御問題としてすでに最適解が得られている問題を終端時刻固定かつ終端点自由なる問題として見直したものである. 評価関数としては以下に示す (57), (61) 式を用い, 最適軌道の終端点が原点となるように設定されている. 3 章の定理 (iii) および (ii) は, 分割超曲面に対し状態軌道は接することなく通過しなければならないことを, また操作量は通過時連続でなければならないことをそれぞれ意味しており, それらを考慮して最適解を選んでいる.

本例題では分割超曲面が存在するためにすべり状態の生じる可能性がある. 状態軌道が超曲面を 5 回以上横切る場合にはすべり状態が生じたものと見なし, ε を変更して軌道を変動させた後計算をやり直した. (14) 式の I^i の定義はすべり状態の生じる ε を除くことができることを示している. (14) 式の infimum の計算と (15) 式の条件 (i), (ii) のチェックに関しては文献 13) にしたがった. すなわち infimum の近似計算式として計算効率が良くとされている擬最適化手法¹⁸⁾を用い, また x_1^i, x_2^i を十分に近づけた後に条件 (i), (ii) のチェックを行った. 詳細は文献 13) を参照されたい.

数値計算には東北大学大型計算機センターの ACOS シリーズ 77/700 を使用し, 微分・積分計算には同センター作成のライブラリーから, 4 次のルンゲ・クッ

Fig. 1 Index of performance versus iteration number (example 1)

タ・ギル法 (TDFRKG), シンプソン法 (TINTP) を利用した.

[例題 1 (クーロン摩擦のある場合)]⁸⁾

分割超曲面は $x_2 = 0$ とする. 状態方程式, 初期条件, 操作量拘束条件がそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) - 0.2 \quad (x_2 > 0 \text{ の場合}) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) + 0.2 \quad (x_2 < 0 \text{ の場合}) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$x_1(0) = 1.35, \quad x_2(0) = 0.6 \quad (55)$$

$$-1 \leq u \leq 1 \quad (56)$$

で与えられ, 評価関数

$$J(u) = x_1^2(3) + x_2^2(3) \quad (57)$$

を制御区間 $[0, 3]$ で最小にする問題を考える.

最初に与える操作量として $u^0(t) = -0.5$ を選び, 制御区間 $[0, 3]$ のきざみ数を 300 とした. 状態軌道が超曲面を通過するときにはすべり状態と跳躍条件 (7) に注意して計算を行ない, 5 回の繰返し計算の後に評価関数値が 0.243×10^{-2} へ減少した時点で計算を打ち切った (最適評価関数値は零). このとき計算に要した時間は約 12 秒であり, すべり状態は 1 回だけ現れた. 評価関数値の減少の状態を Fig. 1 に示す.

[例題 2 (粘性摩擦とクーロン摩擦のある場合)]⁶⁾

状態方程式, 初期条件, 操作量拘束条件, 評価関数がそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) - 0.2 \quad (x_2 > 0) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) + 0.2 \quad (x_2 < 0) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$x_1(0) = 1.468, \quad x_2(0) = 0.75 \quad (59)$$

$$U = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\} \quad (60)$$

$$J(u) = x_1^2(3.7) + x_2^2(3.7) \quad (61)$$

Fig. 2 Index of performance versus iteration number (example 2)

Fig. 3 Computed solutions compared with optimal solutions (example 2)

で与えられる場合を考える。制御区間は $[0, 3.7]$ ，分割超曲面は例題 1 と同じである。

制御区間のきざみ数は 500，最初に用いる操作量は $u^0(t)=1$ とした。例題 1 同様すべり状態と跳躍条件に注意して計算を行い，9 回の繰返しの後に評価関数値が 0.905×10^{-3} へ減少したので計算を終了した（最適評価関数値は零）。このとき計算時間は約 12 秒であった。評価関数値の変化の状態を Fig. 2 に，得られた操作量と状態軌道を Fig. 3 に示す。

6. おわりに

操作量に拘束条件が課せられた場合の不連続最適制御問題に関して操作量修正において強変分を用いた数値解法アルゴリズムを提案し，本アルゴリズムにより生成される無限関数列の極限関数は不連続最適制御問題の最大原理を満足することを証明した。さらに異なる操作量拘束条件のもとで，状態空間が 2 分割された

例題 2 題に対し本アルゴリズムを適用してその実用性を確認した。

参考文献

- 1) ポントリヤーギン，他：最適過程の数学的理論，総合図書（1967）
- 2) L. D. Berkovitz: Variational Method in Problems of Control and Programming, J. of Math. Anal. Appl., **3**, 154/169 (1961)
- 3) V. V. Velichenko: Optimal Control Problems for Equations with Discontinuous Right-hand Sides, Automation and Remote Control, **27-7**, 20/30 (1966)
- 4) 増淵，嘉納：系の拘束条件と評価関数が断片的に異なる最適制御について，日本機械学会講演論文集，**191**，53/56 (1968)
- 5) 市川，田村：不連続性のある最適問題，日本機械学会論文，**37**-294，286/293 (1971)
- 6) 嘉納：不連続最適制御問題，日本機械学会誌，**72**-607，1034/1042 (1969)
- 7) 田村：不連続性のある最適制御問題の計算法，計測自動制御学会論文，**8**-5，600/605 (1972)
- 8) 市川：不連続性のある最適制御問題の数値解法，日本機械学会論文，**41**-349，2598/2604 (1975)
- 9) E. Polak: A Historical Survey of Computational Methods in Optimal Control, SIAM Review, **15**-2，553/584 (1973)
- 10) E. Polak and D. Q. Mayne: First-Order Strong Variation Algorithms for Optimal Control Problems with Terminal Inequality Constraints, J. O. T. A., **16**，303/325 (1975)
- 11) K. L. Teo and L. T. Yeo: On the Computational Methods of Optimal Control Problems, International J. of System Sci., **10**-1，51/76 (1979)
- 12) Z. S. Wu and K. L. Teo: First-Order Strong Variation Algorithms for Optimal Control Problems Involving Hyperbolic Systems, J. O. T. A., **39**-4，561/587 (1983)
- 13) 井前，箱守：操作量拘束を含む最適制御問題に関する強変分を用いた数値解法アルゴリズム，計測自動制御学会論文，**19**-11，851/857 (1983)
- 14) R. V. Gamkrelidze: On Some Extremal Problems in the Theory of Differential Equations with Applications to Theory of Optimal Control, SIAM J. on Control, Ser. A, **3**-1，106/128 (1965)
- 15) 井前，箱守：微分可能性を仮定しない不連続最適制御問題の必要条件，計測自動制御学会論文，**20**-4，281/287 (1984)
- 16) J. Warga: Optimal Control of Differential and Functional Equations, Academic Press (1972)
- 17) K. Makowski and L. W. Neustadt: Optimal Control Problems with Mixed Control-Phase Variable Equality and Inequality Constraints, SIAM J. on Control, **12**-2，184/228 (1974)
- 18) S. L. S. ジャコビ，J. S. コワリク，J. T. ピゾ（関根訳）：非線形最適化問題の反復解法，培風館（1976）

《付 録》

（付録 1）補題 2，3 の証明

文献 13) の補題 1 の証明方針と同様に証明を行えば

(50) 式が得られる. ところで超曲面が存在するために生じる証明上の問題点は, 4.2 節で証明された補題 1 を用いることにより解決される.

また文献 13) の補題 2 の証明方針と同様に証明を行えば (51) 式が導かれる. この際も超曲面の存在に注意をはらう必要がある.

(付録 2) (52) 式の導出

補題 2, 3 を適用することにより次式が成立する.

すなわち適当な $\varepsilon'_{i_3}, i'_{i_3}$ が存在して $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'_{i_3}, i \geq i'_{i_3}$ に対し

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} [J(\bar{u}^i) - J(u^i)] \\ & \leq \frac{\partial G(x^i(\bar{t}_i))}{\partial x} \delta x^i(\bar{t}_i) + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_i} \left[\frac{\partial L_{1, \dots, i}(x^i, u^i)}{\partial x} \delta x^i \right. \end{aligned}$$

$$\left. + L_{1, \dots, i}(x^i, r^i) - L_{1, \dots, i}(x^i, u^i) \right] dt + a \quad (\because \text{補題 2})$$

$$\begin{aligned} & = - \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_i} [H_{1, \dots, i}(x^i, r^i, p^i) \\ & \quad - H_{1, \dots, i}(x^i, u^i, p^i)] dt + a \\ & \leq - \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_i} [H_{1, \dots, i}(x^i, \bar{u}, p^i) \\ & \quad - H_{1, \dots, i}(x^i, u^i, p^i)] dt + a \quad (\because (12) \text{ 式}) \\ & \leq - \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_i} [H_{1, \dots, i}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \\ & \quad - H_{1, \dots, i}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})] dt + 2a \quad (\because \text{補題 3}) \\ & \leq -a \quad (\because (49) \text{ 式}) \end{aligned}$$

である. したがって (52) 式が成立する.