不安定なむだ時間系の安定化制御†

市川 邦彦*

Stabilizing Control of Unstable Plant with Delay

Kunihiko ICHIKAWA*

It is well known that any controllable finite dimensional plant, whether it is stable or not, can always be stabilized. Smith's method has long been regarded as useful for the control of the plant with delay. As is known, Smith's method is valid only for the stable plant; the reason is explained in this paper from the view point of unstable pole zero cancellation. Instead, the control scheme based on the calculated value of $x(t+L)$ using the parameter values of the plant achieves finite pole assignment regardless of the plant stability.

The frequency domain pole assignment technique for the finite dimensional plant is applied to the control of the unstable plant with delay in this paper. Quite the same result as finite pole assignment could not be obtained, but it is demonstrated that the unstable plant with delay cannot always be stabilized according to the relation between the magnitude of unstable poles and delay time. Stability region depicted in the gain-delay plane is presented for the case when there exists only one unstable pole. Simulation result shows that the unstable plant with delay is controlled with satisfactory stability by the proposed design method.

Key Words: delay time system, control system design, stability

1. ま え が き

有限次元系は不安定であっても極配置法によって安定化制御が容易にできるのみでなく、閉ループ系伝達

関数を希望伝達関数に合わせるという、いわゆる exact model matching も可能である。これらの制御を行うのには状態フィードバックが基本的なものである。たとえ状態が直接測定できなくても、入出力から状態を推定することができるので、状態フィードバックはきわめて意義の大きい手法である。さらに、実際には周波数領域手法を用いることにより、極配置や exact model matching は簡単に解決することができる¹⁾。

むだ時間系の状態は、集中系部分の状態 $x(t)$ と、 $u(\tau)$, $t-L \leq \tau \leq t$ という時間関数からなり、その次元は無限大である。時間領域において、これらの状態をフィードバックすることによって、いわゆる有限極配置ができることが知られているが^{12), 13)}、周波数領域における有限極配置法はいまだ知られていない。本論文では全面的に周波数領域法を用いる。というのは、周波数領域法は集中定数系では状態空間法を完全にカバーするだけでなく、設計計算の手間が少なく、実際の装置も簡単となるからである。第2節ではスミス法について簡単に述べ、第3節では状態空間法について簡単に述べる。第4節では安定化制御のための設計法について述べ、第5節では、不安定極が1個のときに、安定化制御のために取りうるゲインの範囲を示し、第6節に設計例とシミュレーション結果を示す。

2. ス ミ ス 法

むだ時間を有するプラントを

$$t(s) = gr(s) / [p(s)e^{Ls}] \quad (1)$$

で表わす。ここに $r(s)$ および $p(s)$ はそれぞれ m 次および n 次モノック多項式とし、 $0 \leq m \leq n-1$ とする。 $r(s)$ と $p(s)$ は互いに素とし、 $p(s)$ が不安定多項式である場合を考える。ここでは e^{Ls} を分母においたが、 e^{-Ls} として分子においてもよい。しかし、(1)式の表現では、プラントは n 個の有限な極と、無限個の左無

† 第22回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭58・7)

† 第26回自動制御連合講演会で発表 (昭58・11)

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7-1

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received Decemer 23, 1983)

(Revised May 15, 1984)

Fig. 1 Control system for the plant with delay based on Smith's method

限遠方の極をもつプロパー系として表わされている点で好ましい。

むだ時間系のフィードバック制御に関して、スミス法は非常に優れており²⁾、これに基づいた研究が多くある^{3)~7)}。しかしながら、スミスの方法は、渡部・伊藤もすでに指摘しているところであるが^{8),9)}、以下に述べるように不安定なむだ時間系には適用できない。スミス法による制御系は Fig. 1 に示される。その閉ループ伝達関数は

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_c(s)gr(s)p^{-1}(s)}{1 + G_c(s)gr(s)p^{-1}(s)} e^{-Ls} \quad (2)$$

であって、スミスのいうとおり、むだ時間要素がループの外に追い出される。しかし、(2)式は、Fig. 1 のコントローラに用いる $p(s)$ と、プラントの $p(s)$ がまったく等しいときにしか成り立たない。コントローラは人為的に構成するものであるから、この両者をまったく等しくさせることは不可能である。 $p(s)$ が安定多項式のときには、この両者のずれは、(2)式にわずかな誤差を与えるだけで実用上の支障は生じない。しかし、 $p(s)$ が不安定のときには、いわゆる不安定な極零相殺となってしまう、Fig. 1 の制御系は不安定となり、まったく実用に耐えない。渡部・伊藤はスミス法を一般化したプロセス・モデルを開発したが⁹⁾、それでも本来的にはプラントが安定なことを必要としている。そして渡部・伊藤はその対策として、安定な近似モデルを用いることを提唱している⁹⁾。しかし、この研究では、それとは別のアプローチに基づく安定化を考える。

3. 状態空間手法

むだ時間をもつ、1入力1出力線形時不変系の状態空間表現には2通りある。はじめに、むだ時間が入力側にある場合を考える。状態空間表現は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t-L) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで $x(t)$ は集中定数系部分の状態であり、たとえ

直接測定できなくても、 $u(t-L)$ と $y(t)$ を入力として Luenberger 観測器によって推定できるので、 $x(t)$ が直接測定できるものと仮定した状態フィードバックの議論は妥当である。いま、 $u(t-L)$ を、つぎの式が満足されるように決めたと仮定する。

$$u(t-L) = f^T x(t) + v(t-L) \quad (4)$$

ここに、 $v(t)$ は新しい外部入力である。そうすると、閉ループ系の運動は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + bf^T)x(t) + bv(t-L) \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

で表わされる。よく知られているように、 $\{A, b\}$ が可制御のとき、 $A + bf^T$ の固有値の任意配置が可能である。

ところで、(4)式は制御法則として用いることはできない。 $u(t-L)$ はすでに過去に存在していた信号で、それを(4)式のように指定することは不可能であるばかりでなく、無意味だからである。そこで、 L だけずらせて

$$u(t) = f^T x(t+L) + v(t) \quad (6)$$

としよう。そうすると、今度は未来値 $x(t+L)$ を用いなければならないことになる。そこで、 $x(t+L)$ をつぎの式で予測することにする^{6),12),13)}。

$$x(t+L) = e^{AL}x(t) + \int_{t-L}^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (7)$$

これによって、いわゆる有限極配置ができることが示されている。このとき制御法則は

$$u(t) = f^T e^{AL}x(t) + \int_{t-L}^t f^T e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (8)$$

となり、状態 $\{x(t), u(\tau) (t-L \leq \tau \leq t)\}$ のフィードバックによって極配置が達成されていることを示している。しかし、これと同じ結果を純粋に周波数領域で達成することはできない。

4. 周波数領域における安定化制御

4.1 むだ時間がない場合

簡単に、周波数領域における極配置法による安定化制御の方法を紹介しておく¹⁾。プラントは(1)式で表わされており、 $L=0$ とする。すなわち、 $t(s) = gr(s)p^{-1}(s)$ 。つぎの補題1はよく知られている。

[補題1] 任意の $n-1$ 次多項式 $f(s)$ に対し、つぎの3条件を満足する多項式 $q(s)$, $k(s)$, $h(s)$ が存在する。

- 1) $q(s)$ は漸近安定多項式
- 2) $k(s)p(s) + h(s)gr(s) = q(s)f(s)$ (9)
- 3) $k(s)q^{-1}(s)$ および $h(s)q^{-1}(s)$ がプロパー。

この補題の適用に当たって、 $q(s)$ は任意の $n-1$ 次モノニック安定多項式に選ぶことができる。そして $q(s)f(s)$

Fig. 2 Exact model matching system for the finite dimensional plant

は $2n-2$ 次多項式であって、 $k(s)$ および $h(s)$ はそれぞれ $n-2$ 次および $n-1$ 次多項式として唯一つにきまる。したがって、 $k(s)q^{-1}(s)$ は強プロパーであり、 $h(s)q^{-1}(s)$ はプロパーである。

周波数領域における極配置は、状態空間表現を用い Luenberger 観測器+状態フィードバックを行うのと同価であって、つぎの補題によって与えられる¹⁾。

【補題 2】 つぎの制御法則により、閉ループ伝達関数が $gr(s)/[p(s)-f(s)]$ と等しくなるような極配置が達成される。

$$u(s) = \frac{k(s)}{q(s)}u(s) + \frac{h(s)}{q(s)}y(s) + v(s) \quad (10)$$

補題 1 と 2 によって安定化制御が実行できる。すなわち、閉ループ系特性多項式として希望する任意の n 次モニック多項式を $p_d(s)$ とするとき、 $f(s)$ を $p(s) - p_d(s)$ と定める。 $q(s)$ を任意の $n-1$ 次モニック安定多項式とし、(9)式を満足する $n-2$ 次多項式 $k(s)$ と $n-1$ 次多項式 $h(s)$ を求め、(10)式の制御法則を用いて閉ループ系を構成する。閉ループ系の伝達関数は $gr(s)p_d^{-1}(s)$ となる。ここで、 $n-1$ 次多項式 $q(s)$ は、結果には陽に現れないが、これは Luenberger 観測器(ただし最小次元のもの)の特性多項式に相当している。この場合の制御系のブロック線図を Fig. 2 に示す。

4.2 むだ時間がある場合

前小節で述べた多項式代数法の理論を流用するため、多項式 $k(s)$ と $h(s)$ とは(9)式によって定めるものとする。制御法則(8)を用いたときと同じ効果、すなわち有限極配置を周波数領域で達成しようとするとき、 $p(s)$ を分母とするダイナミクスが導入されてしまい、プラントが定常のときにしか適用できないという難点がある。そこで、つぎの式を満足するような制御法則があるものと考えてみよう。

$$u(s)e^{-Ls} = \frac{k(s)}{q(s)}u(s)e^{-Ls} + \frac{h(s)}{q(s)}y(s) + u(s)e^{-Ls} \quad (11)$$

(9), (11)式より

$$q(s) \frac{p(s)-f(s)}{p(s)} u(s)e^{-Ls} = q(s)v(s)e^{-Ls} \quad (12)$$

をうる。したがって

Fig. 3 A control system for the plant with delay

$$y(s) = \frac{q(s)gr(s)}{[p(s)-f(s)]q(s)}v(s)e^{-Ls} \quad (13)$$

を得る。 $q(s)$ は安定多項式であるから、これを約してさしつかえなく、所望の極配置が達成されることがわかる。ところで、(11)式の制御法則は実行不可能である。(11)式の制御法則を時間領域で表わすと

$$u(t-L) = \frac{k(p)}{q(p)}u(t-L) + \frac{h(p)}{q(p)}y(t) + v(t-L) \quad (14)$$

である。ただし、 p は微分演算子。制御法則は、過去の制御入力を指定してはならない。それゆえ、 L だけずらせて

$$u(t) = \frac{k(p)}{q(p)}u(t) + \frac{h(p)}{q(p)}y(t+L) + v(t) \quad (15)$$

とすれば、今度は未来値 $y(t+L)$ を必要とする。これを計算または人工回路によって $gr(p)p^{-1}(p)u(t)$ として求めてはならないことは前節で述べた。それゆえ、ふたたび(14)式に戻るが、問題は $u(t-L)$ が $k(p)q^{-1}(p)u(t-L) + h(p)q^{-1}(p)y(t) + v(t-L)$ に等しくなるような制御法則を見出すことである。たとえば

$$u(t) = G \{ k(p)q^{-1}(p)u(t-L) + h(p)q^{-1}(p)y(t) + v(t-L) - u(t-L) \} \quad (16)$$

として、 $G \rightarrow \infty$ としてみよう。もし、左辺の $u(t)$ が有限値であるならば、右辺の括弧内が 0 となり、(14)式が成立することになる。しかし、以下に示すように $G \rightarrow \infty$ とすると、閉ループ系は不安定になる。(9)式と(16)式より、閉ループ系伝達関数を計算してみると

$$y(s) = \frac{Ggr(s)}{p(s)e^{Ls} + G[p(s)-f(s)]}v(s)e^{-Ls} \quad (17)$$

となる。その特性多項式(無限次)は

$$p(s)e^{Ls} + Gp_d(s) \quad (18)$$

となる。ここで Fig. 3 の制御系を考えよう。その特性多項式はちょうど(18)式である。 G の値を 0 から ∞ まで変化させたとき、閉ループ特性根が複素平面上にどのように運動するかは、むだ時間系の根軌跡¹⁰⁾に基づいて十分に理解できる。

仮に、 $L=0$ の場合は、閉ループ極は n 個の $p(s)$ の零であり、零は n 個の $p_d(s)$ の零である。 $p(s)$ が不安定であっても、 G を大きくすれば、 n 個の根は、それぞれ n 個の零の付近に位置し、閉ループ系は安定となる。しかし、むだ時間があると、極は上記の極のほか左無限遠方に無限個生じ、根軌跡の分岐の数は無数となる。これら無数の分岐はすべて右無限遠方に去る

ので、 G をある値以上に大きくすれば閉ループ系は必ず不安定になる。したがって、(16)式の制御法則を用い、 G をきわめて大きくして(14)式を実現するという事は不可能である。(16)式の制御法則は、 G をある値 G_H 以下でなければ使用できない。

一方、有限極、すなわち $p(s)$ の零が不安定なときには、これらから出発する根軌跡上の特性根が左半平面に入るためには、 G をある値 G_L 以上にしなければならない。 $G_L < G_H$ のときには、 G を $G_L < G < G_H$ のようにとることによって安定化制御が可能である。しかし $G_L > G_H$ のときには、閉ループ系を安定ならしめる G は存在しない。つぎに、(16)式を修正した積分形制御法則について述べる。

4.3 積分形制御法則

$u(t-L)$ と $k(p)q^{-1}(p)u(t-L)+h(p)q^{-1}(p)y(t)+v(t-L)$ と $u(t-L)$ との差を小さくする制御方式として積分制御（リセット動作）が考えられる。それは、 $u(t)$ を

$$u(t) = \frac{G}{p} \left\{ \frac{k(p)}{q(p)} u(t-L) + \frac{h(p)}{q(p)} y(t) + v(t-L) - u(t-L) \right\} \quad (19)$$

として決定するものである。しかし、ここでは、これよりさらに簡単な結果を引き出しうるつぎの制御法則を用いることにする。

$$u(t) = \frac{G}{p+\lambda} \left\{ \frac{k(p)}{q(p)} u(t-L) + \frac{h(p)}{q(p)} y(t) + v(t-L) - u(t-L) \right\}, \lambda > 0 \quad (20)$$

以下、 λ および G の定め方について考察する。この制御法則を用いたとき、閉ループ系特性多項式は、(18)式の代りに

$$p_d(s)(s+\lambda)e^{Ls} + Gp_d(s) \quad (21)$$

となる。そうすると有限極は $p(s)$ の零の他に $s=-\lambda$ がある。

いま、 $p(s)$ が 1 個の不安定零を有し、他の $n-1$ 個の零は安定とする。このとき $p(s)$ は

$$p(s) = p_1(s)(s-\lambda_1), \lambda_1 > 0 \quad (22)$$

と書ける。ただし、 $p_1(s)$ は安定多項式である。いま、 $p_d(s)$ として、 $p_1(s)$ はそのまま受けつぎ、さらにもう一つの安定な零をもつものを用いる。すなわち

$$p_d(s) = p_1(s)(s+\sigma_1), \sigma_1 > 0 \quad (23)$$

とする。このとき、有限極根軌跡は $s=\lambda_1$ と $s=-\lambda$ から出発し、 $s=-\sigma_1$ に終るものの外、実軸上を左無限遠方に去るものとなる。さらに、 $\lambda=\sigma$ と選ぶと、有限極根軌跡の分岐は 1 本になり、 $s=\lambda_1$ から出発して、実軸上を左無限遠方に去るものである。すなわち、このときの閉ループ特性多項式は

$$p_d(s) \{(s-\lambda_1)e^{Ls} + G\} \quad (24)$$

であって、その安定性は $(s-\lambda_1)e^{Ls} + G$ のみに支配されている。

この有限極根軌跡上の特性根が、ちょうど原点に来る時の G はつぎの式より求められる。

$$-\lambda_1 + G = 0 \quad (25)$$

すなわち $G=\lambda_1$ である。すなわち、 $G > \lambda_1$ において有限極は安定領域に入る。このとき、 L が小ならば、むだ時間に起因する特性根（共役の対のものが無数にある）はまだ左半平面にあり、閉ループ系は安全である。これら無数の根軌跡分岐のうち、実軸に最も近い一対の分岐上の特性根が常に右方に先行しており、 G を増加するとともに右半平面に入るのは、これらの一対の共役特性根である。 L が大きいときには、有限極が安定領域に入ったとき、すでに、これら一対の共役特性根は右半平面に入っており、閉ループ系を安定ならしめる G は存在しないことになる。したがって、 L に応じて、閉ループ系を安定ならしめる G の範囲があることになる。次節では、 G の安定範囲を調べる。

5. ゲインの安定範囲

前節の終りで考えたシステムの安定性は、Fig. 4 のシステムの安定性と等価である。その特性多項式は

$$(s-\lambda_1)e^{Ls} + G \quad (26)$$

である。このままでは、 λ_1 と L の 2 つのパラメータに対応した安定限界における G を求めなければならないので、無次元化をする。

$$s/\lambda_1 = s', \lambda_1 L = L', G/\lambda_1 = G' \quad (27)$$

とおけば、つぎの特性多項式について解析すればよいことになる。

$$(s'-1)e^{L's'} + G' \quad (28)$$

このように特性方程式が超越方程式となる場合の安定解析には種々の方法が考えられており¹¹⁾、特に 11) の D 分解法によって解析できるが、ここでは文献 10) に述べられているむだ時間系の根軌跡の考察に基づいた計算法を示す。

下のほうの安定限界は、すでに述べたように $G'=1$ である。上のほうの安定限界を求めよう。上のほうの安定限界というのは、むだ時間に起因する実軸に最も

Fig. 4 A control system with characteristic polynomial $(s-\lambda_1)e^{Ls} + G$

Fig. 5 Stability region in L' - G' plane

近い一対の共役特性根が虚軸上にある場合である。すなわち、 $s' = \pm j\omega'$ にある。よって

$$(j\omega' - 1)e^{j\omega' L'} + G' = 0 \quad (29)$$

これより、つぎの式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \omega' \cos \omega' L' - \sin \omega' L' &= 0 \\ G' &= \cos \omega' L' + \omega' \sin \omega' L' \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ω' は

$$\tan \omega' L' = \omega' \quad (31)$$

より求まる。ここでは $\omega' L'$ が $\pi/2$ 以下の場合の根のみが問題である。Fig. 5 は L' - G' 平面上に求めた安定領域である。

6. 設計例とシミュレーション

つぎのプラントが与えられているとする。

$$t(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-1)e^{0.1s}}$$

すなわち $p_1(s)$ は $s+3$ である。そこで $p_d(s)$ を $(s+3)(s+1)$ に選ぶ。よって $f(s) = (s+3)(s-1) - (s+3)(s+1) = -2s-6$ 。 $q(s)$ を $s+5$ と選ぶ。よって、多項式 $k(s)$ と $h(s)$ を定めるための方程式は

$$k(s)(s+3)(s-1) + h(s)(s+2) = (s+5)(-2s-6)$$

であって、これより

$$k(s) = 2$$

$$h(s) = -4s - 12$$

と求まる。 σ_1 は 1 であり、 λ を σ_1 に等しくとれば簡単であるが、もし λ が σ_1 より小となると、根軌跡の形状が著しく悪くなるので、 λ を 1.5 にとった。 G の値は 10 とした。そうすると、制御法則は

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -1.5u(t) + 10 \left\{ \frac{2}{p+5} u(t-0.1) + \frac{-4p-12}{p+5} y(t) \right. \\ & \left. + v(t-0.1) - u(t-0.1) \right\} \end{aligned}$$

ということになるが、このままでは、ステップ応答の定常値は 0.784 となる。特に定位置定常偏差を生じないように、制御法則をつぎのように変更した。

Fig. 6 Step response of stabilizing control system

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -1.5u(t) + 10 \left\{ \frac{2}{p+5} u(t-0.1) + \frac{-4p-12}{p+5} y(t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{0.784} v(t-1) - u(t-1) \right\} \end{aligned}$$

Fig. 6 はそのステップ応答を示す。閉ループ系がまったく安定に制御されていることがわかる。

7. むすび

不安定なむだ時間プラントを安定に制御する一つの方法を示した。一般にむだ時間の大きさと、不安定極の兼ね合いで、必ずしも安定化制御ができないことを指摘した。不安定極が 1 個の場合に、閉ループ系を安定に制御するために取りうるゲインの範囲を明確に与えた。なお、いわゆる有限極配置を周波数領域で達成することは、つぎの課題とし、近くその成果を発表する予定である。

参考文献

- 1) W.A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag (1974)
- 2) O.J. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, ISA J. **6**-2, 28/33 (1959)
- 3) 沢野: むだ時間を含む系のある制御法についての研究, 自動制御, **7**-3, 122/127 (1960)
- 4) 沢野: むだ時間を含む無定形制御対象の制御, 自動制御, **7**-5, 248/254 (1960)
- 5) 渡部・伊藤: むだ時間をもつ制御対象に対するプロセス・モデル制御系の定常性, 計測自動制御学会論文集, **15**-2, 199/204 (1979)
- 6) 伊藤・渡部: むだ時間をもつシステムの制御—Smith 法の復活—, システムと制御, **26**-8, 479/488 (1982)
- 7) 渡部・伊藤: Smith 法の外乱に対する制御特性の改善, 計測自動制御学会論文集, **19**-3, 187/192 (1983)
- 8) 渡部・伊藤: むだ時間を含む系に対する Smith 法の制御構造, 電気学会論文誌, **C97**-9, 165/172 (1977)
- 9) K. Watanabe and M. Ito: A Process-Model Control for Linear Systems with Delay, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26**-6, 1261/1269 (1981)
- 10) 市川: むだ時間系の根軌跡, 自動制御, **3**-5, 137/143 (1964)
- 11) El'sgol'ts: Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments (translated), Holden-Days (1966)
- 12) A. Manitius and A.W. Olbrot: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-24**-4, 541/553 (1979)
- 13) T. Furukawa and E. Shimemura: Predictive Control for Systems with Time Delay, International J. of Control, **37**-2, 399/412 (1983)