不規則変動係数を含む ARX モデルに基づく最適適応制御†

石 原 正*・有 賀 信 雄**・阿 部 健 一*・竹 田 宏*

Optimal Adaptive Control Based on an ARX Model with Randomly Varying Coefficients

Tadashi ISHIHARA*, Nobuo ARUGA**, Ken-ichi ABE* and Hiroshi TAKEDA*

Adaptive control of systems described by an ARX (autoregressive system with exogenous input) model with randomly varying coefficients and d delays in the input is considered. The variation of each coefficient in the model is assumed to consist of white noise process and coloured noise process modelled as the output of a linear shaping filter. The optimal estimation of the state of the shaping filter is possible by using the Kalman filter algorithm. Two simple optimal adaptive control algorithms are derived. One is an algorithm obtained by determining the control input so that the d step ahead optimal prediction of the output coincides with a reference output, and the other is obtained by minimizing a quadratic cost function consisting of the d step ahead output error and the control input at each time step. It is shown that these optimal adaptive controls require the moments of the *a posteriori* probability distribution of the state of the shaping filter up to d and $d+1$ respectively. By omitting the higher moments from the optimal algorithms, suboptimal algorithms are obtained. Simulation results are presented to compare the performance of the optimal and the suboptimal algorithms with that of the self tuning regulator of Åström and Wittemark.

Keyword: adaptive control, randomly varying coefficient, Bayesian approach

1. はじめに

線形確率系の適応制御問題は応用上きわめて重要であり、現在までに数多くの研究がなされている。これ

らの研究は未知係数を単なる未知一定定数として扱う立場と既知の確率分布に従う確率変数として扱う立場の2つに大別できる。前者の代表的なものが ARMAX モデルに対して Åström ら^{1),2)}により提案された Self Tuning Regulator (STR) である。STR では適当な条件のもとで漸近的最適性が保証されることが明らかにされているが^{3)~6)}、過渡状態における最適性は保証されない。また、STR は緩慢な係数変動に対しては、推定アルゴリズムに簡単な修正を加えることにより追従できるものとされているが、その修正法は経験的なものであり、係数の急激な不規則変動に対して十分追従できないことが起りうる。一方、後者の場合には、過渡状態における適応制御問題を、適当な評価関数を導入することにより、ベイズ最適化問題として定式化でき、過渡状態における最適性を考慮した適応制御アルゴリズムを構成できる。この構成法は統計的性質既知の不規則変動係数を含む系に対して容易に拡張できる。このようなベイズ最適化問題に対する最適制御は原理的には係数の事後確率分布を用いて求められるが、ARMAX モデルに対しては係数の事後確率分布を正確に計算することは困難であり、何らかの近似を導入する必要がある。しかし、未知一定係数あるいは1階の確率差分方程式で記述される不規則変動係数を含む ARX モデルに対しては、正規性の仮定のもとで、係数の事後確率分布は正規分布となり、その平均値および共分散行列は Kalman フィルタを用いて計算できることが知られている。このような係数の推定器が用いられることを前提とし、Åström ら⁷⁾は入力に1時刻のむだ時間を含む ARX モデルに対して、1時刻先の出力の2乗平均誤差を評価関数とする最適化問題を解くことにより、係数の最適推定値のみならず、その誤差共分散行列をも利用する cautious⁸⁾な適応制御アルゴリズムが得られることを示している。また、Wieslanders ら⁹⁾は2時刻のむだ時間を含む系に対して同様のアルゴリズムを導いている。係数に関する

† 第25回自動制御連合講演会で発表 (昭57・11)

* 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

** 日本アイ・ビー・エム(株)藤沢研究所 藤沢市桐原町1

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

** Nippon IBM Fujisawa Laboratory, Fujisawa

(Received May 23, 1983)

(Revised September 12, 1983)

る事前情報が得られるときには、これらの適応制御アルゴリズムは過渡状態において STR よりも良好な制御成績を与えることが期待されるが、より一般的な不規則変動係数およびむだ時間を含む系に対する考察はなされていない。

本論文では、バイズの立場から、白色過程と線形シェーピングフィルタの出力である有色過程との和で表わされる不規則変動係数を含み、入力に d 時刻 (d は自然数) のむだ時間を含む ARX モデルで記述される系の最適適応制御について考察する。変動係数の白色成分は経済システムなどのモデル化に必要であることが指摘されているが¹¹⁾、この点を考慮した適応制御に関する研究はほとんどなされていない。以下、2章で、対象とする系を明らかにし、シェーピングフィルタの状態の最適推定および予測を Kalman フィルタを用いて行えることを示す。3章では d 時刻先の出力を予測する最適予測器を構成し、これを用いた最適適応制御について考察する。4章では d 時刻先の出力誤差と制御入力からなる2次評価関数を最小とする最適適応制御について考察する。5章では3、4章で導いた適応制御と STR との過渡状態における制御成績の比較をシミュレーションにより行い検討を加える。

2. 問題の設定

不規則変動係数および d 時刻のむだ時間を含むつぎのような1入力1出力 ARX モデルを考える。

$$\begin{aligned} y(t) = & - \sum_{i=1}^N a_i(t)y(t-i) \\ & + \sum_{i=0}^M a_{N+1+i}(t)u(t-d-i) + e(t), \\ & t=1, 2, \dots \quad (1) \end{aligned}$$

ここで、係数 $\{a_i(t), i=1, 2, \dots, N+M+1\}$ は白色成分および既知の線形シェーピングフィルタの出力として表わされる有色成分からなる不規則変動係数とする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + (I-A)\bar{x} + w(t) \\ a_i(t) &= c_i x(t) + v_i(t), i=1, 2, \dots, N+M+1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$, $\bar{x} \in R^n$, $w(t) \in R^n$, $v_i(t) \in R$ である。 $x(0)$ は正規性確率変数であり、つぎの統計量に従うものとする。

$$E[x(0)] = \bar{x}(0|0), \text{Cov}[x(0)] = \Sigma(0|0) \quad (3)$$

また、 $w(t)$, $e(t)$ および

$$v(t) \triangleq [v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N+M+1}(t)]' \quad (4)$$

は互いに独立で $x(0)$ とともに独立な正規性白色過程であり、つぎのような統計量に従うものとする。

$$\left. \begin{aligned} E[w(t)] &= 0, \text{Cov}[w(t)] = Q \\ E[e(t)] &= 0, \text{var}[e(t)] = q \\ E[v(t)] &= 0, \text{Cov}[v(t)] = R \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで $Q \geq 0$, $q > 0$, $R \geq 0$ である。(1)(2)式で表わされる系は確率的双線形系の一つと考えることができる。種々のシステムがこのような確率的双線形系としてモデル化できることが知られている¹⁰⁾。

(2)式における $\bar{x}$ は A が安定な行列のとき、 $x(t)$ の定常分布の平均値を表わす。また、(2)式は $Q=0$, $\bar{x}=0$ として適当な A を選ぶことにより、初期状態 $x(0)$ が未知な種々の確定的関数をも表わすことができる。

$A=I$, $Q=0$, $R=0$ および

$$c_i = [0, \dots, \underset{\leftarrow i \rightarrow}{0}, 1, 0, \dots, 0] \quad (6)$$

とすれば、従来扱われている未知一定係数を含む ARX モデル⁷⁾ となる。

t 時刻において制御入力の決定に利用できるオンライン入出力データを $\mathcal{Z}_t$ で表わす。すなわち

$$\mathcal{Z}_t \triangleq \{\mathcal{Z}_0; y(1), y(2), \dots, y(t); u(0), \dots, u(t-1)\} \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 \triangleq & \{y(1-N), y(1-N+1), \dots, \\ & y(0), u(1-d-M), \dots, u(-1)\} \end{aligned} \quad (8)$$

は既知であるものとする。

不規則変動係数を含む AR モデルの場合¹³⁾と同様の議論により、(2)式の状態 $x(t)$ の条件付確率密度関数 $p[x(t)|\mathcal{Z}_t]$ は正規分布密度関数となり、その平均値 $\hat{x}(t|t)$ および共分散行列 $\Sigma(t|t)$ はつぎのような Kalman フィルタアルゴリズムにより求められることが容易に確かめられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t|t-1) + k(t)[y(t) - \phi'(t)C\hat{x}(t|t-1)] \\ \hat{x}(t|t-1) &= A\hat{x}(t-1|t-1) + (I-A)\bar{x} \\ k(t) &= \Sigma(t|t)C'\phi(t)[\phi'(t)R\phi(t) + q]^{-1} \\ \Sigma(t|t) &= \Sigma(t|t-1) - \Sigma(t|t-1) \cdot \\ & \quad C'\phi(t)[\phi'(t)C\Sigma(t|t-1) \cdot \\ & \quad C'\phi(t) + \phi'(t)R\phi(t) + q]^{-1} \cdot \\ & \quad \phi'(t)C\Sigma(t|t-1) \\ \Sigma(t|t-1) &= A\Sigma(t-1|t-1)A' + Q \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $\phi(t)$ および C はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned} \phi(t) \triangleq & [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-N), \\ & u(t-d), u(t-d-1), \dots, u(t-d-M)]' \end{aligned} \quad (10)$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N+M+1} \end{bmatrix} \quad ((N+M+1) \times n \text{ 行列}) \quad (11)$$

$\mathcal{Z}_t$ に基づく $x(t+k)$ ($k=1, 2, \dots$) の最適予測値

$x(t+k|t)$ およびその誤差共分散行列 $\Sigma(t+k|t)$ は $x(t|t)$, $\Sigma(t|t)$ を初期値としてつぎの関係式から求められる。

$$x(t+l|t) = A x(t+l-1|t) + (I-A)\bar{x}, \quad l=1, 2, \dots, k \quad (12)$$

$$\Sigma(t+l|t) = A \Sigma(t+l-1|t) A' + Q, \quad l=1, 2, \dots, k \quad (13)$$

以上の設定のもとで、出力 $\{y(t)\}$ を既知の規準出力 $\{y^*(t)\}$ に追従させるような適応制御問題を考える。

3. 最適適応出力予測器制御

制御対象の出力を既知の規準出力に近づけるような制御を行う最も簡単な方法は、むだ時間だけ先の出力を予測する予測器を構成し、出力の予測値が規準出力と等しくなるような制御入力を用いることである。Clarke ら¹²⁾は、このような制御を出力予測器制御 (Output Predictor Control) と名付けている。Åström ら¹⁾の STR は直接法に基づく適応的出力予測器制御であるといえる。

本章では、(1)~(5)式で記述される不規則変動係数を含む ARX モデルに対して最適な適応予測器を構成できることを示し、この予測器を用いた間接法に基づく最適適応出力予測器制御を導く。

t 時刻までに得られている入出力データ $\mathcal{Z}_t$ に基づく $y(t+d)$ の 2 乗平均予測誤差を最小とする最適予測値 $\hat{y}(t+d|t)$ は周知のように

$$\hat{y}(t+d|t) = E[y(t+d) | \mathcal{Z}_t] \quad (14)$$

で与えられる。(14)式右辺の条件付期待値は、前章の Kalman フィルタから得られる $x(t|t)$, $\Sigma(t|t)$ を用いて以下のように求められる。

$y(t+k) (1 \leq k \leq d)$ は $\{y(t-i), i=0, 1, \dots, N-1\}$, $\{u(t-i), i=d-k, d-k+1, \dots, M+d-1\}$ および $\{e(t+i), i=1, 2, \dots, k\}$ を用いてつぎのように書くことが帰納法により容易に確かめられる¹³⁾。

$$\begin{aligned} y(t+k) = & - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t, k) y(t+1-i) \\ & + \sum_{i=0}^{M+k-1} \alpha_{N+1+i}(t, k) u(t+k-d-i) \\ & + \sum_{i=1}^k \beta_i(t, k) e(t+i) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、明らかに

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i(t, 1) &= \alpha_i(t+1) \\ \beta_i(t, 1) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$k \geq 2$ のとき、 $\{\alpha_i(t, k), i=1, 2, \dots, N+M+k\}$ は $\{\alpha_i(t, l), i=1, 2, \dots, N+M+k, l=1, 2, \dots, k-1\}$ および $\{\alpha_i(t+k), i=1, 2, \dots, N+M+1\}$ を用いてつぎの関係

式から求められる。

$$\alpha_i(t, k) = \begin{cases} a_{t+i-1}(t+k) - \sum_{j=1}^{k-1} a_j(t+k) \alpha_i(t, k-j), & i=1, 2, \dots, N-k+1 \\ - \sum_{j=1}^{k-1} a_j(t+k) \alpha_i(t, k-j), & i=N-k+2, \dots, N \end{cases} \quad (17)$$

$$\alpha_{N+1}(t, k) = a_{N+1}(t+k) \quad (18)$$

$$\alpha_{N+1+i}(t, k) = \begin{cases} a_{N+1+i}(t+k) - \sum_{j=1}^i a_j(t+k) \alpha_{N+1+i-j}(t, k-j), & i=1, 2, \dots, k-1 \\ a_{N+1+i}(t+k) - \sum_{j=1}^{k-1} a_j(t+k) \alpha_{N+1+i-j}(t, k-j), & i=k, k+1, \dots, M \\ - \sum_{j=1}^{k-1} a_j(t+k) \alpha_{N+1+i-j}(t, k-j), & i=M+1, \dots, M+k-1 \end{cases} \quad (19)$$

また、 $\{\beta_i(t, k), i=1, 2, \dots, k\}$ はつぎの関係式から求められる。

$$\beta_i(t, k) = \begin{cases} a_i(t+k) \sum_{j=1}^{k-i} \beta_j(t, k-j), & i=1, 2, \dots, k-1 \\ 1, & i=k \end{cases} \quad (20)$$

したがって、 $\mathcal{Z}_t$ に基づく $y(t+d)$ の最適予測値は (15)式において $k=d$ として両辺の条件付期待値を取ることにより、つぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+d|t) = & - \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i(t, d) y(t+1-i) \\ & + \sum_{i=0}^{M+d-1} \hat{\alpha}_{N+1+i}(t, d) u(t-i) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、

$$\hat{\alpha}_i(t, d) \triangleq E[\alpha_i(t, d) | \mathcal{Z}_t], \quad i=1, 2, \dots, N+M+d \quad (22)$$

である。(17)~(19)式から明らかなように、(22)式で与えられる最適予測器係数の算出には $x(t)$ の事後分布の d 次までのモーメントが必要となる。

前章で示したように、 $x(t)$ の事後分布は正規分布となるため、3 次以上のモーメントは 2 次以下のモーメントを用いて求められる。したがって、 $d \geq 3$ の場合の最適予測器係数も $x(t|t)$ および $\Sigma(t|t)$ を用いて求められるが、 d が大きくなるほど、最適予測器係数の算出には多くの計算が必要となる。

出力 $\{y(t), t=d, d+1, \dots\}$ を既知の規準出力 $\{y^*(t), t=d, d+1, \dots\}$ に近づける最適適応出力予測器制御は、(21)式で与えられる d 時刻先最適予測器を用いて以下のように求められる。(21)式はつぎのように書け

る。

$$\hat{y}(t+d|t) = \phi'(t)\hat{\theta}(t,d) + \hat{a}_{N+1}(t,d)u(t) \quad (23)$$

ここで、

$$\hat{\theta}(t,d) \triangleq [\hat{a}(t,d), \dots, \hat{a}_N(t,d), \hat{a}_{N+2}(t,d), \dots, \hat{a}_{N+M+d}(t,d)]' \quad (24)$$

$$\phi(t) \triangleq [-y(t), -y(t-1), \dots, -y(t+1-N), u(t-1), \dots, u(t-M-d+1)]' \quad (25)$$

である。したがって、 $\hat{y}(t+d|t) = y^*(t+d)$ とする最適適応出力予測器制御 $u_N^*(t)$ はつぎのように求められる。

$$u_N^*(t) = -\frac{1}{\hat{a}_{N+1}(t,d)} [\phi'(t)\hat{\theta}(t,d) - y^*(t+d)] \quad (26)$$

この最適適応出力予測器制御は係数の事後分布の d 次までのモーメントに依存する。したがって、 $d=1$ のときには $x(t)$ の最適推定値 $\hat{x}(t|t)$ のみに依存して定まり、共分散行列 $\Sigma(t|t)$ には依存しない。しかし、 $d \geq 2$ のときにはこの適応制御は $\hat{x}(t|t)$ のみならず $\Sigma(t|t)$ にも依存して定まり cautious⁸⁾ な適応制御となる。

$d \geq 2$ の場合、準最適適応出力予測器制御として、 $x(t)$ の事後分布の 2 次以上のモーメントを省略して得られる準最適予測器を用いたものを考えることができる。

(26)式において、 $\hat{a}_{N+1}(t,d)$ が非常に小さな値を取るときには数値計算上の問題が生ずる。その場合、たとえば、 ε を適当な正数として、 $|\hat{a}_{N+1}(t,d)| < \varepsilon$ のときには、(26)式における $\hat{a}_{N+1}(t,d)$ を ε で置き換えるようなアルゴリズムを用いればよいと考えられる。

4. 2 次評価関数の最小化

未知一定係数を含み、入力に 1 時刻あるいは 2 時刻のむだ時間を含む ARX モデルに対しては、出力の 2 乗平均誤差を最小化することにより cautious な適応制御が求められることが知られている^{7),9)}。本章では (1)~(5) 式で記述される不規則変動係数を含み、入力に d 時刻のむだ時間を含む ARX モデルに対して、 d 時刻先の出力誤差の 2 乗平均と制御入力の 2 乗との和からなる評価関数を最小化することにより cautious な適応制御を導く。

t 時刻に $u(t)$ が最小とすべき評価関数をつぎのように定義する。

$$J_d(t) \triangleq E \{ [y(t+d) - y^*(t+d)]^2 | \mathcal{Z}_t \} + ru^2(t) \quad (27)$$

ここで、 $r \geq 0$ である。(27)式の最小化は以下のように

に容易に行うことができる。まず、(15)式をつぎのように書く。

$$y(t+d) = \phi'(t)\theta(t,d) + \alpha_{N+1}(t,d)u(t) + \epsilon_d(t) \quad (28)$$

ここで、 $\phi(t)$ は (25) 式で定義され、

$$\theta(t,d) \triangleq [\alpha_1(t,d), \dots, \alpha_N(t,d), \alpha_{N+2}(t,d), \dots, \alpha_{N+M+d}(t,d)]' \quad (29)$$

$$\epsilon_d(t) \triangleq \sum_{i=1}^d \beta_i(t,d)e(t+i) \quad (30)$$

である。評価関数 $J_d(t)$ は (23) 式で与えられる $y(t+d)$ の最適予測値および予測誤差分散 $\sigma_y(t+d|t)$ を用いてつぎのように書ける。

$$J_d(t) = [\hat{y}(t+d|t) - y^*(t+d)]^2 + \sigma_y(t+d|t) + ru^2(t) \quad (31)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sigma_y(t+d|t) &\triangleq E \{ [y(t+d) - \hat{y}(t+d|t)]^2 | \mathcal{Z}_t \} \\ &= \phi'(t)\Theta(t,d)\phi(t) + 2\gamma'(t,d)\phi(t)u(t) \\ &\quad + \delta(t,d)u^2(t) + q(t,d) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Theta(t,d) &\triangleq \text{Cov} [\theta(t,d) | \mathcal{Z}_t] \\ \gamma(t,d) &\triangleq \text{Cov} [\theta(t,d), \alpha_{N+1}(t,d) | \mathcal{Z}_t] \\ \delta(t,d) &\triangleq \text{var} [\alpha_{N+1}(t,d) | \mathcal{Z}_t] \\ q(t,d) &\triangleq \text{var} [\epsilon_d(t) | \mathcal{Z}_t] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(23)、(32)式を(31)式に用いると、 $J_d(t)$ を最小とする最適制御 $u_N^*(t)$ はつぎのように求められる。

$$u_N^*(t) = -\frac{1}{r + \hat{a}_{N+1}^2(t,d) + \delta(t,d)} \{ [\hat{a}_{N+1}(t,d)\hat{\theta}'(t,d) + \gamma'(t,d)\phi(t) - y^*(t+d)\hat{a}_{N+1}(t,d)] \} \quad (34)$$

前章で示したように $\hat{\theta}(t,d)$ の算出には $x(t)$ の事後分布の d 次までのモーメントが必要である。また、(33)式から $\gamma(t,d)$ の算出には $x(t)$ の事後分布の $d+1$ 次までのモーメントが必要であることがわかる。結局、(34)式で与えられる最適制御の算出には $x(t)$ の事後分布の $d+1$ 次までのモーメントが必要となる。しかし、 $x(t)$ の事後分布は正規分布となるため、3 次以上のモーメントは 2 次までのモーメントを用いて表わされる。したがって (27) 式で与えられる評価関数を最小とする最適制御は cautious な適応制御となるが、 d が大きいほど、多くのオンライン計算が必要となる。計算量の少ない準最適制御として、(33)式に現れる 2 次以上のモーメントをすべて省略したものを考えることができる。このことは各係数の最適予測値を将来の真の係数の値であるとみなして制御を決定することを意味し、 $A=I$, $Q=0$, $R=0$ の場合には、いわゆる Certainty Equivalence 制御⁸⁾ と呼ばれるものと一致する。また、 $r=0$ のときには、この準最適制御は、前章で提案した準最適適応出力予測器制御と一致す

る。

5. シミュレーション

本章では、最適適応出力予測器制御，2次評価関数を最小とする最適制御およびそれぞれの高次モーメントを省略して得られる準最適制御と STR との過渡状態における制御成績の比較をシミュレーションにより行った結果を報告する。

対象とする系はつぎのような2次系である。

$$y(t) = -x_1(t)y(t-1) - x_2(t)y(t-2) + x_3(t)u(t-2) + e(t) \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha x_1(t) + (1-\alpha)\bar{a} + w(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) \\ x_3(t+1) &= x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

この系では $d=2$ であるので、最適適応出力予測器制御の算出には事後分布の2次までのモーメントが必要であり、2次評価関数を最小とする最適制御の算出には3次までのモーメントが必要である。

以下、2つの例を取り上げるが、いずれの場合も

$$\left. \begin{aligned} q &= \text{var}[e(t)] = 0.01 \\ \hat{x}(0|0) &\triangleq [\hat{x}_1(0|0), \hat{x}_2(0|0), \hat{x}_3(0|0)]' \\ &= [0.8, 0.8, 2.0]' \\ \Sigma(0|0) &= \text{diag}[0.4, 0.4, 0.4] \\ y(-1) &= y(-2) = 0 \\ u(-1) &= u(-2) = 0 \\ y^*(t) &= 1.0, t=2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

とし、 $x(0)$, $\{e(t)\}$, $\{w(t)\}$ をそれぞれの統計量に従う正規乱数を用いて発生させ、50 サンプルについて平均を取った。STR を用いた場合のシミュレーションではゲイン $x_3(0)$ は既知とし、2時刻先予測器の3個の係数を初期推定値を $\hat{x}_1(0|0)$, $\hat{x}_2(0|0)$ を真値とみなして計算される予測器係数、初期分散行列を対角要素を100とした対角行列、忘却係数を $\lambda(0 < \lambda \leq 1)$ とした最小2乗法¹⁴⁾により推定した。

[例 1] $\alpha=1$, $\text{var}[w(t)]=0$

この例では(37)式の3個の係数はサンプルごとには異なるものの、時間的には変動しない。Table 1 に最適および準最適適応出力予測器制御と $\lambda=1$ とした STR を用いた場合の $t=20$ までの出力誤差および制御入力²の2乗平均値の累積を示す。最適適応出力予測器制御と準最適適応出力予測器制御を用いた場合の出力誤差の差はそれほど大きなものではないが、STR を用いた場合の出力誤差はかなり大きいことがわかる。

Fig. 1 にある同一乱数例に対する出力の推移、Fig. 2 に出力誤差の2乗平均値の累積値の推移を示す。これらの図からわかるように、STR を用いた場合、4~6 時刻に大きなオーバーシュートが生じている。

Table 1 Comparison of the adaptive output predictor control algorithms (Example 1)

Algorithm	Accumulated Mean Square Output Error	Control Energy
Optimal Output Predictor Control	1.87	53.12
Suboptimal Output Predictor Control	2.01	54.67
STR ($\lambda=1.0$)	4.63	59.44

Fig. 1 Outputs obtained by applying the adaptive output predictor control algorithms for the same noise sequence (Example 1)

Fig. 2 Accumulated mean square output errors obtained by applying the adaptive output predictor control algorithms (Example 1)

したがって、Table 1 における STR と他の制御との差は主にこのオーバーシュートによるものであることがわかる。最適適応出力予測器制御を用いた場合のオーバーシュートは最も小さく、この制御が cautious な制御であることを示している。Table 2 に2次評価関数を最小とする最適制御および準最適制御を用いた場合のシミュレーション結果を示す。評価関数の重み r を大きくすると出力誤差は増加するが制御入力は抑え込まれることがわかる。また、 r が小さいほど最適制

Table 2 Comparison of the optimal and the suboptimal algorithms for the quadratic cost function (Example 1)

Weighting Coefficient r	Algorithm	Accumulated Mean Square Output Error	Control Energy	Accumulated Cost
0	Optimal	1.66	52.47	1.66
	Suboptimal	2.01	54.67	2.01
0.5	Optimal	3.42	17.27	12.06
	Suboptimal	3.54	18.01	12.54
1.0	Optimal	5.24	10.61	15.85
	Suboptimal	5.27	11.02	16.29

Fig. 3 Accumulated mean square output errors obtained by applying the optimal and the suboptimal algorithms for the quadratic cost function (Example 1)

御と準最適制御の差が顕著である。Table 2 の $r=0$ の場合の結果と Table 1 を比べると、事後分布の 3 次までのモーメントを用いて算出される最適制御が 2 次までのモーメントを用いて算出される最適適応出力予測器制御よりもわずかながら小さな出力誤差を与えている点が興味深い。 $r=0$ の場合の準最適制御は準最適適応出力予測器制御と一致するため、同じ結果が得られている。また、Table 1 の STR の結果と比べると、 $r=0.5$ の場合でも、STR より小さな制御入力で小さな出力誤差が得られていることがわかる。

Fig. 3 に出力誤差の 2 乗平均値の累積値の推移を示す。**Fig. 4** に最適および準最適適応出力予測器制御を行った場合の各係数の最適推定値の 2 乗平均誤差の推移を示す。

[例 2] $\alpha=0.97$, $\bar{a}=-1.0$, $\text{var}[w(t)]=0.05$

この例では係数 $x_2(t)$, $x_3(t)$ は [例 1] と同様未知一定係数であるが、 $x_1(t)$ は 1 次のシェーピングフィルタにより生成される有色過程である。Table 3 に最適および準最適適応出力予測器制御および STR のシミュレーション結果を示す。STR の出力誤差は推定アルゴリズムの忘却係数 λ を適当に選ぶことにより幾分

Fig. 4 Mean square estimation errors of the coefficients obtained by applying the optimal and the suboptimal adaptive output predictor control (Example 1)**Table 3** Comparison of the adaptive output predictor control algorithms (Example 2)

Algorithm	Accumulated Mean Square Output Error	Control Energy
Optimal Output Predictor Control	4.77	35.35
Suboptimal Output Predictor Control	5.27	40.52
STR ($\lambda=1.0$)	28.15	53.16
STR ($\lambda=0.88$)	26.40	52.06
STR ($\lambda=0.80$)	27.03	54.69

改善されるものの、最適および準最適適応出力予測器制御と比べて非常に大きいことがわかる。STR は推定アルゴリズムの忘却係数を適当に選ぶことにより緩慢な係数変動に追従できるものとされているが、この例のようなモデルの係数の不規則変動に対しては十分追従できないことがわかる。Table 4 に 2 次評価関数に対するシミュレーション結果、Fig. 5 に出力誤差の 2 乗平均値の推移を示す。[例 1] の場合と比べて最適なものと準最適なものの差が大きいことがわかる。また、Fig. 6 に最適および準最適適応出力予測器制御を用いた場合の各係数の最適推定値の 2 乗平均誤差の推移を示す。[例 1] の場合と比べて係数 $x_1(t)$

Table 4 Comparison of the optimal and the suboptimal algorithms for the quadratic cost function (Example 2)

Weighting Coefficient r	Algorithm	Accumulated Mean Square Output Error	Control Energy	Accumulated Cost
0	Optimal	4.36	34.60	4.36
	Suboptimal	5.27	40.52	5.27
0.5	Optimal	4.93	13.04	11.45
	Suboptimal	5.23	15.02	12.74
1.0	Optimal	6.19	8.40	14.59
	Suboptimal	6.23	9.50	15.73

Fig. 5 Accumulated mean square output errors obtained by applying the optimal and the suboptimal algorithms for the quadratic cost function (Example 2) **Fig. 6** Mean square estimation errors of the coefficients obtained by applying the optimal and the suboptimal algorithms for the quadratic cost function (Example 2)

の推定誤差およびその制御による差が大きいことがわかる。

6. おわりに

従来扱われているよりも一般的な不規則変動係数を含み、入力に d 時刻のむだ時間を含む ARX モデルで記述される系に対して 2 つの最適適応制御を導いた。2 次以上のモーメントを省略して得られる準最適制御および STR との比較をシミュレーションにより行い、最適性を考慮することにより過渡特性を改善できることを確認した。

本論文で扱った適応制御は、いずれも制御信号の 2 元性⁸⁾を考慮していない受動的適応制御である。今後、2 元性を考慮した能動的適応制御を実現する方法について考察する必要がある。また、白色変動係数を含む線形確率系において、変動係数の不確実性が大きくなると最適制御が閉ループ系を安定化できなくなる例¹⁵⁾が知られており、本論文で扱った適応制御系においても同様の現象が起るものと考えられる。この点を考慮した適応制御系の確率的安定性について考察することも今後の重要な課題である。

参考文献

- 1) K. J. Åström, and B. Wittenmark: On Self-Tuning Regulators, *Automatica*, **9**, 185/199 (1973)
- 2) K. J. Åström, U. Borisson, L. Ljung and B. Wittenmark: Theory and Applications of Self-Tuning Regulators, *Automatica*, **13**, 457/476 (1977)
- 3) L. Ljung: On Positive Real Transfer Functions and the Convergence of Some Recursive Schemes, *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-22-4**, 539/551 (1977)
- 4) G. C. Goodwin, K. S. Sin and K. K. Saluja: Stochastic Adaptive Control and Prediction-The General Delay-Coloured Noise Case, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-25-5**, 946/950 (1980)
- 5) J. Fuchs: Indirect Stochastic Adaptive Control-The General Delay-White Noise Case, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-27-1**, 219/223 (1982)
- 6) E. Fogel: A Fundamental Approach to the Convergence Analysis of Least Squares Algorithms, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-26-3**, 646/655 (1981)
- 7) K. J. Åström and B. Wittenmark: Problems of Identification and Control, *J. Math. Anal. Appl.*, **34**, 90/113 (1971)
- 8) B. Wittenmark: Stochastic Adaptive Control Methods-A Survey, *International J. of Control*, **21-5**, 705/730 (1975)

- 9) J. Wieslanders and B. Wittenmark: An Approach to Adaptive Control Using Real Time Identification, *Automatica*, **7**, 211/217 (1971)
 - 10) A. S. Willsky and S. Marcus: Analysis of Bilinear Noise Models in Circuits and Devices, *J. Franklin Institute*, **301-1**, 103/122 (1976)
 - 11) M. Aoki: Stochastic Control Theory in Economics-Applications and New Problems, Supplementary for Preprints of IFAC Symp. on Stochastic Control, 1/11 (1974)
 - 12) D. W. Clarke and P. J. Gawthrop: Self-Tuning Control, *Proc. IEE*, **126-6**, 633/640 (1979)
 - 13) 石原, 阿部, 竹田: 不規則変動係数を含む AR モデルに基づく最適適応予測, *電子通信学会論文誌*, **J65-A-5**, 439/446 (1982)
 - 14) K. J. Åström and B. Wittenmark: Self-Tuning Controllers Based on Pole-Zero Placement, *Proc. IEE* **127-3**, 120/130 (1980)
 - 15) M. Athans, R. Ku and S. B. Gershwin: The Uncertainty Threshold Principle, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-22-3**, 491/495 (1977)
-