流出時間による毛細管粘度計

芝 亀 吉*・小 池 敏 弘**

Capillary Viscometer by Discharging Time

Kamekichi SHIBA* and Toshihiro KOIKE**

The capillary viscometer by discharging time is one of the commonly used viscometer. However, the measuring principle of the viscometer of this type is not yet established theoretically, especially the mean effective head of the viscometer is customarily assumed to be independent on viscosity without theoretical verification.

In this paper, considering some simplified models, it is proved theoretically that the mean effective head of a capillary viscometer depend on viscosity with exception of long enough capillary tube, even when the inlet correction of the capillary tube is assumed constant.

Keyword: discharging time, instrumentation, capillary tube, viscometer

1. は し が き

流出時間による粘度計は、試料液体が流出して試料容器内の液面が第1の所定の水平面から第2の所定の水平面まで低下するまでの時間 t によって粘度が知られる粘度計である。このときに流出する試料液体の体積 V は、いうまでもなく一定である。

この方式の粘度計については、平均有効液柱の高さ $\bar{H}$ が粘度によらないことが必要である。平均有効液柱高さは、流出する試料の体積流量 Q が、その平均値 V/t に等しいときの、上流側の液面と下流側の液面との高さの差である。

平均有効液柱の高さが粘度によるかどうかを、いろいろの単純な形状の粘度計について検討する。

2. 十分に長い細管粘度計の平均有効液柱高さ

十分に長い細管ならば、補正が無視される。

2.1 細管が水平に置かれているとき

半径 a 、長さ l の直円細管が水平に置かれているときには、補正が無視されるので、Hagen-Poiseuille の法則を表わす式は、

$$\pi a^4(p_A - p_B) - 8l\eta Q = 0 \quad (1)$$

である。ここに p_A , p_B はそれぞれ流入端 A と流出端 B とにおける圧力であり、 η は試料液体の粘度である。

細管 C の上流側に、Fig. 1(a) のように、試料容器 R があるときに、外気の圧力を p_0 とすると、

$$p_A = p_0 + \rho g H, \quad p_B = p_0 \quad (2)$$

(a) Viscometer with horizontal capillary tube of long enough

(b) Viscometer with horizontal capillary tube with two cylindrical reservoirs of equal radius R_A , R_B at both ends

Fig. 1

* 東洋大学工学部 川越市鯨井中野台 2100

** 中央大学理工学部 東京都文京区春日 1-13-27

* Faculty of Engineering, Toyo University, Kawagoe

** Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received April 8, 1983)

(Revised November 11, 1983)

(a) a cylindrical reservoir at inlet end
(b) cylindrical reservoir of equal radius R_A , R_B at inlet and outlet

Fig. 2 Vertical capillary tube

である。ここに ρ は試料液体の密度, g は重力の加速度, H は細管の水平面からの容器 R 内の液面の高さである。この p_A, p_B を(1)式に代入すると,

$$\pi a^4 \rho g H - 8l\eta Q = 0 \quad (3)$$

となる。

Fig. 1(b)のように, 細管 C の上流側と下流側とに, それぞれ試料容器 R_A, R_B があるときに, 細管の水平面から容器 R_A 内の液面の高さを h_A , 容器 R_B 内の液面の高さを h_B とし, $h_A - h_B = H$ とすると,

$$p_A = p_0 + \rho g h_A, \quad p_B = p_0 + \rho g h_B \quad (4)$$

であるから, (1)式は,

$$\pi a^4 \rho g (h_A - h_B) - 8l\eta Q = 0 \quad (5)$$

となり, (3)式と一致する。

2.2 細管が鉛直に置かれているとき

細管が Fig. 2 のように鉛直に置かれているときには, 細管の任意の位置における圧力を p , 適宜に選定した水平面からの高さを h とし, $P = p + \rho g h$ とすると, Hagen Poiseuille の法則を表わす式は,

$$\pi a^4 (P_A - P_B) - 8l\eta Q = 0 \quad (6)$$

となる。

Fig. 2(a)のように上流側だけに試料容器 R がある場合には, 基準水平面を流出端 B の水平面に選定して高さを h とすると,

$$P_A = p_A + \rho g h_A$$

である。さらに容器 R 内の液面の高さを H とすると,

$$p_A = p_0 + \rho g (H - h_A)$$

であるから,

$$P_A = p_0 + \rho g H, \quad P_B = p_0$$

であり, (6)式は(3)式と一致する。

Fig. 2(b)のように上流側と下流側とに, それぞれ試料容器 R_A, R_B がついている場合には, 細管の流出端 B の水平面を基準に選定し, 細管の各位置の高さを h , 容器 R_A, R_B 内の液面の高さを H_A^*, H_B^* とする。

このときには,

$$P_A = p_A + \rho g h_A, \quad p_A = p_0 + \rho g (H_A^* - h_A)$$

$$P_B = p_B, \quad p_B = p_0 + \rho g H_B^*$$

である。さらに $H_A^* - H_B^* = H$ とすると(6)式は(3)式と一致する。

試料容器 R_A, R_B はいずれも, 水平断面積が一樣に S であるとする。

2.3 平均有効液柱高さ

十分に長い細管の場合, (3)式が成立するので, (3)式によって平均有効液柱高さ $\bar{H}$ を求める。

$t=0$ のときに, $H=H_0$, $t=\tau$ のときに $H=H_\tau$ であるとする。

1) 上流側だけに試料容器があるとき

Fig. 1(a), Fig. 2(a)の場合である。このときには 0 から τ までの間に流出する試料液体の体積 V は,

$$V = S(H_0 - H_\tau) \quad (7)$$

であり, 平均流量 $Q = \frac{V}{\tau}$ である。

時間 dt の間に H, V の増加をそれぞれ $dH(<0)$, dV とすると,

$$dV = Q dt = -S dH$$

であるから,

$$Q = -S \frac{dH}{dt} \quad (8)$$

である。この Q を(3)式に代入し, 積分すると,

$$\pi a^4 g t + 8lS \nu \log H = k \quad (9)$$

となる。 k は積分定数である。(9)式は

$$t=0 \text{ で } 8lS \nu \log H_0 = k$$

$$t=\tau \text{ で } \pi a^4 g \tau + 8lS \nu \log H_\tau = k \text{ となり,}$$

$$\nu = \frac{\pi a^4 g \tau}{8lS(\log H_0 - \log H_\tau)} \quad (10)$$

が得られ, いっぽう, 平均流量 $\bar{Q}$ のときの H を $\bar{H}$ とするから, (3)式より

$$\nu = \frac{\pi a^4 g \bar{H} \tau}{8lV} = \frac{\pi a^4 g \bar{H} \tau}{8lS(H_0 - H_\tau)} \quad (11)$$

である。(10)式と(11)式とは同じ ν を表わす式であるから,

$$\bar{H} = \frac{H_0 - H_\tau}{\log H_0 - \log H_\tau} \quad (12)$$

である。 $\bar{H}$ は明らかに粘度によらない。

2) 上流側と下流側に試料容器 R_A, R_B があるとき

Fig. 2(b) の場合である。このときには 0 から τ までの間に流出する試料の体積 V は (7) 式ではなく、

$$V = \frac{1}{2} S(H_0 - H_\tau) \quad (13)$$

であり、

$$Q = -\frac{1}{2} S \frac{dH}{dt} \quad (14)$$

で、前と同様の計算で $\bar{H}$ を求めると、

$$\bar{H} = \frac{2V}{S(\log H_0 - \log H_\tau)} = \frac{H_0 - H_\tau}{\log H_0 - \log H_\tau} \quad (15)$$

となり、(12) 式と一致し、やはり $\bar{H}$ は粘度によらない。

3. 長さが十分でない細管粘度計の平均有効液柱の高さ

長さが十分でない細管粘度計では、流入端から流入して助走区間を流れる間に流速分布が正常分布となることによる補正が必要である。この補正は細管の長さに無関係であり、細管が十分に長いと無視されるが、長さが十分でないと、この補正を考慮に入れなければならない。

3.1 補正された Hagen-Poiseuille の式

補正された Hagen-Poiseuille の法則を表わす式は (3) 式ではなく、

$$\pi a^2(P_A - P_B) - 8(l + \lambda)\eta \frac{Q}{a^2} = M_B - M_A \quad (16)$$

である¹⁾。ここに M_A, M_B は細管の流入端 A 、流出端 B において単位時間当りに流入、流出する運動量である。

流出端 B では、流速が正常分布となっているので、

$$M_B = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho Q^2}{\pi a^2} \quad (17)$$

である。流入端 A では一様な流速であるとする、

$$M_A = \frac{\rho Q^2}{\pi a^2} \quad (18)$$

であるから、

$$M_B - M_A = \frac{1}{3} \frac{\rho Q^2}{\pi a^2} \quad (19)$$

である。(19) 式を (16) 式に入れると、

$$\pi a^4(P_A - P_B) - 8(l + \lambda)\eta Q = \frac{\rho Q^2}{3\pi} \quad (20)$$

となる。細管粘度計の補正の旧来の理論は誤りであると考えられるが、旧来の理論では、(16) 式の左辺の中

の λ を na とし、右边を $\frac{\rho Q^2}{2\pi a^2}$ とした式が得られ、右边を運動エネルギー補正、 na を管端の補正と呼んでいる。(20) 式を、

$$\pi a^4(P_A - P_B) - 8(l + \lambda)\eta Q = K\rho Q^2 \quad (21)$$

と書いておけば、形のうえでは旧来の式も含まれる。

(21) 式を採用すると、流出時間による細管粘度計では動粘度 ν が、

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\pi a^4 g \bar{H}}{8(l + \lambda)V} \cdot t - \frac{KV}{8(l + \lambda)} \cdot \frac{1}{t} = c_1 t - \frac{c_2}{t} \quad (22)$$

与えられる。

流出時間による細管粘度計では、 c_1, c_2 が粘度によらないことが必要であるから、 $\bar{H}$ が粘度によらないことが必要である。

c_1, c_2 が粘度によらないならば、 c_1, c_2 が装置についての諸量から計算できないでも、異なった既知粘度の液体を用いての実験で c_1, c_2 を求めることができ、粘度計として使用できる。

$\bar{H}$ が粘度によるなら、流出時間による粘度計が作られない。 $\bar{H}$ が流出時間によるかどうかは、流出時間による細管粘度計にとって、きわめて重要な意味もっている。前と同様に、

$$P_A - P_B = \rho g H \quad (23)$$

であるから、(21) 式を、

$$KQ^2 + 8(l + \lambda)\nu Q - \pi a^4 g H = 0 \quad (24)$$

と書くことができる。この式を $Q > 0$ について解くと、

$$Q = \frac{-4(l + \lambda)\nu + \sqrt{16(l + \lambda)^2\nu^2 + K\pi a^4 g H}}{K} \quad (25)$$

であり、

$$F = 4(l + \lambda), K\pi a^4 g = \kappa \text{ とおくと、(25) 式は、}$$

$$KQ = -F\nu + \sqrt{F^2\nu^2 + \kappa H} \quad (26)$$

となり、以下の考察では (26) 式を基礎とする。

3.2 流入側だけに試料容器があるときの平均有効液柱の高さ

構造は Fig. 1(a) あるいは、Fig. 2(a) と同様で、ただ細管の長さが十分でないものである。この場合にも細管が十分に長いものと同様に (7), (8) 式が成り立つ。(8) 式を (26) 式に代入し積分すると、

$$\int_{H_0}^{H_\tau} \frac{dH}{F\nu - \sqrt{F^2\nu^2 + \kappa H}} = \frac{\tau}{KS} \quad (27)$$

となる。この式の左辺の式の積分を行うために、

$$y = F\nu - \sqrt{F^2\nu^2 + \kappa H} \quad (28)$$

とおく。このときには、

$$\frac{dH}{F\nu - \sqrt{F^2\nu^2 + \kappa H}} = \frac{dH}{y} = \frac{2}{\kappa} dy - \frac{2F\nu}{\kappa y} dy \quad (29)$$

である。

また $H=H_0$ のときに, $y=y_0=F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}$,
 $H=H_\tau$ のとき, $y=y_\tau=F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}$ であるから,

$$\begin{aligned} & \int_{H_0}^{H_\tau} \frac{dH}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H}} \\ &= \frac{2}{\kappa} (\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}) \\ & \quad - \frac{2F\nu}{\kappa} \log \frac{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}} = \frac{\tau}{KS} \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{2KS}{\kappa} & \left\{ \sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau} \right. \\ & \left. - F\nu \log \frac{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}} \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

である。 t が 0 から τ までの間に流出する試料流体の体積 V は (7) 式であり, 平均流量 $\bar{Q}$ は,

$$\bar{H} = \left[\left\{ \frac{\kappa}{2} \frac{H_0-H_\tau}{\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}-F\nu \log \frac{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}}} + F\nu \right\}^2 - F^2\nu^2 \right] / \kappa \quad (35)$$

となる。この (35) 式について, 動粘度 ν が非常に大きいときと, 小さいときの $\bar{H}$ を比較する。

i) ν が非常に大きいとき, このときの $\bar{H}$ を $\bar{H}_1$ とすると,

$$\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H} \doteq F\nu + \frac{1}{2} \frac{\kappa H}{F\nu}$$

であるから, (35) 式は近似的につぎのように整理される。

$$\bar{H}_1 = \frac{H_0-H_\tau}{\log H_0 - \log H_\tau} \quad (36)$$

ii) ν が非常に小さいとき, このときの $\bar{H}$ を $\bar{H}_2$ とすると,

$$\bar{H}_2 = \left\{ \frac{1}{2} (\sqrt{H_0} + \sqrt{H_\tau}) \right\}^2 \quad (37)$$

となり, $\bar{H}_1$ と $\bar{H}_2$ とは等しくない。それは $\bar{H}$ が粘度によることを明示している。

3.3 流入側, 流出側に試料容器があるときの平均有効液柱の高さ

粘度計の構造は, Fig. 1(b) あるいは, Fig. 2(b) と同様で, ただ細管の長さが十分でないだけである。このときには, 十分に長いときと同様に, (13), (14) 式が成り立つ。(14) 式を (26) 式に代入すると,

$$-\frac{1}{2} KS \frac{dH}{dt} = -F\nu + \sqrt{F^2\nu^2+\kappa H} \quad (38)$$

となる。この (38) 式は, (26) 式と同形の方程式で,

$$\bar{Q} = \frac{V}{\tau} = \frac{S(H_0-H_\tau)}{\tau}, \quad \tau = \frac{S(H_0-H_\tau)}{\bar{Q}} \quad (31)$$

であるから, (30) 式により,

$$\begin{aligned} \frac{H_0-H_\tau}{\bar{Q}} = \frac{2K}{\kappa} & \left\{ \sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau} \right. \\ & \left. - F\nu \log \frac{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}} \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

である。いっぽう, (26) 式において, $Q=\bar{Q}$ のとき, $H=\bar{H}$ であるから,

$$K\bar{Q} = -F\nu + \sqrt{F^2\nu^2+\kappa \bar{H}} \quad (33)$$

である。(32), (33) 両式から $\bar{Q}$ を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{H_0-H_\tau}{-F\nu + \sqrt{F^2\nu^2+\kappa \bar{H}}} = \frac{2}{\kappa} & \left\{ \sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0} \right. \\ & \left. - \sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau} - F\nu \log \frac{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}} \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

となる。これを $\bar{H}$ について解けば,

ただ左辺が $1/2$ 倍されているだけである。この式を

$$\frac{dH}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H}} = \frac{2}{KS} dt$$

と書いて積分するなど, 前と同様の計算により (30) 式に対応し,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{KS}{\kappa} & \left\{ \sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau} \right. \\ & \left. - F\nu \log \frac{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_\tau}}{F\nu-\sqrt{F^2\nu^2+\kappa H_0}} \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

が得られる。平均流量 $\bar{Q}$ は (13) 式により,

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \frac{S(H_0-H_\tau)}{\tau} \quad (40)$$

である。この (39) と (40) 式により (26) 式が得られる。

したがって (34) 式が成立つので, 前と同様の計算によって $\bar{H}$ の ν が非常に大きいときの $\bar{H}_1$ と, ν が非常に小さいときの $\bar{H}_2$ とが前のとおり (36) と (37) 式とで与えられ, その両者が等しくないことも同様である。

4. 球形測時球の Ostwald 粘度計の平均有効液柱の高さ

Ostwald 粘度計の平均有効液柱の高さを求めるのに, JIS 規格 Z 8803 (1978) の解説では, Fig. 2(b) に示されている構造で, 細管の長さが十分でないものをモデルとして計算している。しかし (24) 式を基礎と

$$y = \sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H} \quad (53)$$

とおけば,

$$H = \frac{1}{\kappa} (y^2 - F^2 \nu^2), \quad dH = \frac{2}{\kappa} y dy \quad (54)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & -\frac{2(4\alpha^2 - h_0^2)}{\kappa} \sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H} \\ & - \frac{F\nu}{\kappa} (4\alpha^2 - h_0^2) \log \frac{\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H} - F\nu}{\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H} + F\nu} \\ & + \frac{2}{\kappa^3} \left\{ \frac{(F^2 \nu^2 + \kappa H)^{\frac{5}{2}}}{5} \right. \\ & \left. - \frac{(F^2 \nu^2 + 2\kappa h_0)(F^2 \nu^2 + \kappa H)^{\frac{3}{2}}}{3} \right\} \quad (55) \end{aligned}$$

この Φ_1 , Φ_2 を (49) 式に入れ, τ を求めると,

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{K\pi}{8} \left[-\frac{F\nu}{K} (4\alpha^2 - h_0^2) \log \frac{H_\tau}{H_0} \right. \\ & + \frac{F\nu}{2\kappa} (H_\tau^2 - H_0^2) - \frac{2h_0 F\nu}{\kappa} (H_\tau - H_0) \\ & - \frac{2(4\alpha^2 - h_0^2)}{2\kappa} \{ \sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau} \\ & - \sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_0} \} - \frac{F\nu(4\alpha^2 - h_0^2)}{\kappa} \\ & \log \left\{ \frac{\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau} - F\nu}{\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau} + F\nu} \cdot \frac{\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_0} + F\nu}{\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_0} - F\nu} \right\} \\ & + \frac{2}{5\kappa^3} \{ (F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau)^{\frac{5}{2}} - (F^2 \nu^2 + \kappa H_0)^{\frac{5}{2}} \} \\ & - \frac{2(F^2 \nu^2 + 2\kappa h_0)}{3\kappa^3} \{ (F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau)^{\frac{3}{2}} \\ & \left. - (F^2 \nu^2 + \kappa H_0)^{\frac{3}{2}} \} \right] \quad (56) \end{aligned}$$

が得られる。いっぽう, 平均有効液柱の高さ $\bar{H}$ は, 流量 Q が平均流量 $\bar{Q}$ に等しい H で, 測時球半径 α

の球であるから, その容積 V は $V = \frac{4}{3}\pi\alpha^3$ である。

そこで $\bar{Q} = V/\tau = 4\pi\alpha^3/3\tau$ であり, (26) 式より

$$\bar{H} = \frac{K^2}{\kappa} \cdot \frac{16\pi^2\alpha^6}{9\tau^2} + \frac{KF\nu}{\kappa} \cdot \frac{8\pi\alpha^3}{3\tau} \quad (57)$$

である。 $\bar{H}$ が粘度 ν によることは明らかで, なお, つぎのように ν が非常に大きいときと, 小さいときとで $\bar{H}$ が異なることから $\bar{H}$ が ν によることが確認される。

i) ν が非常に大きいとき ($\bar{H}$ を $\bar{H}_1$, τ を τ_1 として)

$$\bar{H}_1 = \frac{32}{3} \cdot \frac{\alpha^3}{\left\{ -(4\alpha^2 - h_0^2) \log \frac{H_\tau}{H_0} + \frac{1}{2} (H_\tau^2 - H_0^2) - 2h_0(H_\tau - H_0) \right\}} \quad (60)$$

が得られる。

とすると

$$\left. \begin{aligned} (F^2 \nu^2 + \kappa H)^{\frac{1}{2}} & \doteq F\nu + \frac{1}{2} \frac{\kappa H}{F\nu}, \\ (F^2 \nu^2 + \kappa H)^{\frac{3}{2}} & \doteq F^3 \nu^3 + \frac{3}{2} \kappa F\nu H \\ & + \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 H^2}{F\nu}, \\ (F^2 \nu^2 + \kappa H)^{\frac{5}{2}} & \doteq F^5 \nu^5 + \frac{5}{2} \kappa F^3 \nu^3 H \\ & + \frac{15}{8} \kappa^2 F\nu H^2 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

であるから, (56) 式において,

$$\begin{aligned} & -\frac{2(4\alpha^2 - h_0^2)}{\kappa} \{ (F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau)^{\frac{1}{2}} - (F^2 \nu^2 + \kappa H_0)^{\frac{1}{2}} \} \\ & = \frac{(4\alpha^2 - h_0^2)}{F\nu} (H_\tau - H_0) \end{aligned}$$

は $F\nu$ が非常に大きいので無視される。また,

$$\begin{aligned} & -\frac{F\nu(4\alpha^2 - h_0^2)}{\kappa} \\ & \log \frac{(\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau} - F\nu)(\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_0} + F\nu)}{(\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau} + F\nu)(\sqrt{F^2 \nu^2 + \kappa H_0} - F\nu)} \\ & \doteq -\frac{F\nu(4\alpha^2 - h_0^2)}{\kappa} \log \frac{H_\tau}{H_0}, \\ & -\frac{2}{3} (F^2 \nu^2 + 2\kappa h_0) \{ (F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau)^{\frac{3}{2}} \\ & - (F^2 \nu^2 + \kappa H_0)^{\frac{3}{2}} \} \doteq \frac{F^3 \nu^3}{\kappa^2} (H_\tau - H_0) \\ & - \frac{F\nu}{\kappa} (H_\tau^2 - H_0^2) - \frac{2h_0 F\nu}{\kappa} (H_\tau - H_0), \\ & \frac{2}{5\kappa^3} \{ (F^2 \nu^2 + \kappa H_\tau)^{\frac{5}{2}} - (F^2 \nu^2 + \kappa H_0)^{\frac{5}{2}} \} \\ & \doteq \frac{F^3 \nu^3}{\kappa^2} (H_\tau - H_0) + \frac{3}{4} \frac{F\nu}{\kappa} (H_\tau^2 - H_0^2) \end{aligned}$$

であり, これらを (56) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \frac{K\pi F\nu}{4\kappa} \left\{ -(4\alpha^2 - h_0^2) \log \frac{H_\tau}{H_0} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (H_\tau^2 - H_0^2) - 2h_0(H_\tau - H_0) \right\} \quad (59) \end{aligned}$$

となる。

$F\nu$ が非常に大きいときの (57) 式の

$$\bar{H}_1 = \frac{8K\pi F\nu}{3\kappa\tau_1} \alpha^3$$

に (59) 式を代入すると,

ii) ν が非常に小さいとき、このときの $\bar{H}$ を $\bar{H}_2$, τ を τ_2 とする。(26)式より,

$$K\bar{Q} = \sqrt{\kappa\bar{H}_2} \quad (61)$$

となる。このときには、 $Q = V/\tau_2$ であり、 ν が非常に小さいので、(56)式より

$$\tau_2 = \frac{K\pi}{8\sqrt{\kappa}} \left\{ -2(4\alpha^2 - h_0^2)(\sqrt{H_\tau} - \sqrt{H_0}) - \frac{2}{5}(H_\tau^{\frac{5}{2}} - H_0^{\frac{5}{2}}) - \frac{4}{3}h_0(H_\tau^{\frac{3}{2}} - H_0^{\frac{3}{2}}) \right\} \quad (62)$$

が得られる。(61)式により,

$$\sqrt{\bar{H}_2} = \frac{32}{3} \cdot \frac{\alpha^3}{-2(4\alpha^2 - h_0^2)(\sqrt{H_\tau} - \sqrt{H_0}) + \frac{2}{5}(H_\tau^{\frac{5}{2}} - H_0^{\frac{5}{2}}) - \frac{4}{3}h_0(H_\tau^{\frac{3}{2}} - H_0^{\frac{3}{2}})}$$

すなわち

$$\bar{H}_2 = \left(\frac{32}{3}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^6}{\left\{ -(4\alpha^2 - h_0^2)(H_\tau^{\frac{1}{2}} - H_0^{\frac{1}{2}}) - \frac{4}{3}h_0(H_\tau^{\frac{3}{2}} - H_0^{\frac{3}{2}}) + \frac{2}{5}(H_\tau^{\frac{5}{2}} - H_0^{\frac{5}{2}}) \right\}^2} \quad (63)$$

となり、このモデルでも $\bar{H}_1 \approx \bar{H}_2$ であることは明らかである。

5. 結 論

流出時間によって粘度が知られる方式の粘度計は、細管粘度計と名付けられて、古くから用いられている。

この方式の粘度計にとっては、平均有効液柱の高さなる量が装置の定数であることが必要である。

ここでは、細管が十分に長く、いわゆる細管粘度計の補正が無視されるもの、細管の長さが十分でないものなどのいろいろのモデルについての平均有効液柱の高さを理論的に検討した。

その結果として、細管が十分に長くて、いわゆる細管粘度計の補正が無視されるものでは、平均有効液柱の高さは装置についての定数とみられるが、細管の長

さが十分でないときには、装置についての定数でないことが明らかとなった。

ただし、測定する粘度範囲を小さく制限すれば、その範囲内では平均有効液柱の高さが一定であると見られるようにできるであろう。

この結論は、Ostwald 粘度計などの細管粘度計について重要であると考えられる。

なお、細管粘度計の補正の旧理論は誤りであるが、補正された Hagen-Poiseuille の式は、(16)式と同形であるから、平均有効液柱の高さ $\bar{H}$ が粘度によることになるのは、前の理論と同様である。

参 考 文 献

- 1) 芝 亀吉, 一瀬正, 北村仁一: 細管式粘度計の補正, 応用物理, 40, 742 (1971)