非線形変換を用いた最適オブザーバの一設計法

山下 勝己*・谷口 経雄**

A Method for Designing an Optimal Observer Using a Nonlinear Transformation

Katsumi YAMASHITA* and Tsuneo TANIGUCHI**

Optimal linear control laws always require the direct measurement of every state. However they are impractical, since it is difficult to measure all the state variables in many realistic systems. Then the problem is to reconstruct the unavailable states from the available outputs, using an observer.

In this paper, we design an observer, which is a state estimator with decaying error at a desired speed, by using the nonlinear transformation of A. M. Letov. The characteristic feature of the method is to introduce a performance index and determine the observer gain uniquely by minimizing it. Also it is unnecessary to give judicious assignment of eigenvalues, since the standpoint of the method is essentially different from that of eigenvalue assignment.

The proposed observer is applied to the reconstruction of the entire state variables for a single machine connected to an infinite bus, including induction motor load. Then the true responses are compared with those given by the observer and the method is found to be useful in power systems including the effects of dynamic characteristics of load.

Keyword: power systems, system loads, state observer, state estimation

1. はじめに

制御対象の動特性式が線形微分方程式で表われ、評価関数が状態変数と入力変数の2次形式で与えられる場合、最適制御はすべての状態変数のフィードバ

クによって与えられる。しかしながら、実際の制御系を対象とする際、すべての状態変数を直接測定することは難しく、系の全情報を必要とする最適制御の適用が事実上不可能となってくる。この種の問題を解決する手法として(1)測定可能な出力変数のみのゲイン・フィードバックをもつ線形制御系を構成する方法(2)動的補償器を制御対象の前段に直列に結合した線形フィードバック制御系を構成する方法(3)オブザーバを用いて測定可能な出力変数から全状態を推定し、それを利用する方法などが挙げられる^{1)~3)}。

本論文は、(3)の状態推定手法に主眼をおき、オブザーバの一構成法を示すものである。一般にオブザーバ設計においては、初期時刻における推定値と真値との差異にかかわらず時間の経過とともに推定値を真値に近づけることを目的とするので、オブザーバ問題は極配置問題としてとらえることができる³⁾。しかしながら、さらにすみやかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ設計を考える場合には、極配置問題からは適切な極指定の情報は得られない。K. Ramar および V. Gourishankar 氏は⁴⁾、すみやかな収れんを与えるオブザーバの設計法として、いくつかの極指定を行い、かつ残りの自由度を一つの評価関数の最小化で求める方法を提示しているが、少なくとも指定した極の妥当性および観測量の雑音による影響の軽減に対する問題には言及するに至っていない。ここでは、これらの点を考慮し、極指定の立場からはなれた推定誤差の減衰の割合(オブザーバにより得られる推定値が真値に近づく程度)に着目した一つの方法を示す。すなわち、A. M. Letov 氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を⁵⁾、推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるとともに、一つの評価関数の最小化によりすみやかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ構成を行う。本手法によれば、設計の希望値を

* 琉球大学工学部 沖縄県中頭郡西原町 59

** 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

* Faculty of Engineering, Ryukyu University Nakagami-gun, Okinawa

** Faculty of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai

(Received December 8, 1982)

(Revised October 17, 1983)

与えることにより一義的かつ系統立った方法で所望のオブザーバを構成することができ、また従来のような極配置を行わないので適切な極指定を考える必要がなくなる。

以上の構成法を一般的に述べるとともに、一例として、誘導電動機負荷 60% および定インピーダンス負荷 40% からなる負荷特性を考慮した一機-無限大母線系統の状態推定に適用し、本オブザーバの有効性を示す。

2. 最適オブザーバの構成

2.1 問題の定式化

動的システムの状態方程式や出力方程式は、一般に非線形となるが、基準運転点近傍ではそれぞれ(1)、(2)式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

ここで、 x は n 次元状態ベクトル、 y は m 次元観測ベクトルで $m \leq n$ 、 A 、 C はそれぞれ $n \times n$ 、 $m \times n$ 次の定数行列で可観測である。

(2)式で示される観測 y に基づいて(1)式で示される系の状態を推定するオブザーバを

$$\frac{dz}{dt} = Az + G(y - Cz) \quad (3)$$

とする。ここで、 z は n 次元ベクトルの推定値、 G は $n \times m$ 次のオブザーバ利得である。このとき、真値 x と推定値 z との差を

$$e = x - z \quad (4)$$

で定義すれば、(1)、(3)式より

$$\frac{de}{dt} = (A - GC)e \quad (5)$$

となる誤差方程式が得られる。一般に、 n 次のオブザーバ設計では、(5)式の特性方程式の固有値を希望の値にするようにオブザーバ利得 G を決定するが、ここでは、極指定の立場からはなれた推定誤差の減衰の割合に着目した一つの方法を示す。すなわち、A. M. Letov 氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を⁵⁾、推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるとともに、一つの評価関数の最小化によりすみやかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ構成を行う。

2.2 非線形変換

A. M. Letov 氏の提案した非線形変換⁵⁾を応用し

$$R^2 = e^T P e \quad (6)$$

$$e = R \varepsilon \quad (7)$$

となる変換を考える。ここで、 P は $n \times n$ 次の正定な実対称行列、 ε は n 次元の変数ベクトルである。まず、(6)式の時間微分をとり、それに(5)式を代入し(7)式の変数変換を施せば

$$\frac{dR}{dt} = -WR \quad (8)$$

ここで、

$$W = -\varepsilon^T \{ (A - GC)^T P + P(A - GC) \} \varepsilon / 2 \quad (9)$$

となる。また、(6)、(7)式から次式の関係が得られる。

$$F = \varepsilon^T P \varepsilon = 1 \quad (10)$$

それゆえ、推定誤差 e の収れんに関する問題は、(10)式の制約下での(9)式で示される W の取り扱いになる。(9)、(10)式はそれぞれ ε に関する2次形式であることから、次式で示す線形変換を用いることにより同時対角化を行うことができる⁶⁾。(付録1参照)

$$\varepsilon = T \Gamma \quad (11)$$

ここで、

$$T = D^{-1} L, \quad P = D^T D$$

$$D = H N^T, \quad H = \text{diag}(h_i)$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_i), \quad h_i = \sqrt{\sigma_i}$$

ただし、 σ_i は P の固有値、 L 、 N それぞれ直交行列である。このとき、(9)、(10)式の W および F は

$$W = \Gamma^T A \Gamma \quad (12)$$

$$F = \Gamma^T \Gamma = 1 \quad (13)$$

ここで、

$$A = -L^T (D^{-1})^T \{ (A - GC)^T P + P(A - GC) \} D^{-1} L / 2 \quad (14)$$

となる。このことから、(9)式の W の値は(14)式の最小固有値 λ_1 および最大固有値 λ_n により、以下のように制約をうける。

$$\lambda_1 \leq W \leq \lambda_n \quad (15)$$

このとき、 $e^T P e$ は R が(8)式の関係より

$$R(t) = R(0) \exp \left(- \int_0^t W ds \right) \quad (16)$$

となり、また、 W の値が(15)式で示される不等式内に存在することから

$$e(0)^T P e(0) \exp[-2\lambda_n t] \leq e^T P e \leq e(0)^T P e(0) \exp[-2\lambda_1 t] \quad (17)$$

の範囲におさえられる。したがって、 $e^T P e$ の収れん速度の上限は最小固有値 λ_1 によって支配され、 λ_1 を設計で希望する値またはそれ以上の値に設定すれば、希望の速度以上で推定誤差を減衰させるオブザーバを構成することができる。

2.3 オブザーバ利得の決定

いま、設計の希望値 $\alpha > 0$ とするとき

$$\mathbf{L}^T(\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \geq 0 \quad (18)$$

の関係を用い、 α からなる行列 $\alpha \mathbf{I}$ に加えると

$$\lambda_{\min} \left[\alpha \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^T(\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \right] \geq \lambda_{\min} [\alpha \mathbf{I}] (= \alpha) \quad (19)$$

の不等式が得られる⁶⁾。ここで、 $\mathbf{Q}$ は $n \times n$ 次の半正定値対称行列、 $\mathbf{I}$ は $n \times n$ 次の単位行列、 $\lambda_{\min}[\cdot]$ はカッコ内の最小固有値を意味する。なお、 α としては $(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}, \mathbf{C})$ の可観測性を満足するものを考える。このとき、(19) 式の左辺と (14) 式の $\mathbf{A}$ を等式で結び整理することにより得られる

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C}) = -\mathbf{Q} \quad (20)$$

の関係式は、(14) 式で示される最小固有値が少なくとも α 以上であることを保証するものである。したがって、(20) 式を満たすオブザーバ利得 $\mathbf{G}$ を得ることができれば、希望以上の速度で推定誤差を減衰させるオブザーバを設計できるわけである。なお、(20) 式は Tarn と Rasis 氏が文献 7) で示した関係式の一部となる。ここでは、一つの評価関数として (17) 式で示される $\mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)$ および $\mathbf{G}$ のノルムとの和を考え、それを (20) 式の等式条件下で最小化することにより、(20) 式を満たし、また提案した評価関数に対して最適となるオブザーバ利得 $\mathbf{G}$ を一義的にかつ系統立った方法で求めるものである。なお、上記の評価関数を最小化することの物理的な意義は、 $\mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)$ の最小化が (17) 式の振幅を最小にしてすみやかな推定誤差の減衰を与えるとともに、 $\mathbf{G}$ のノルムの最小化が観測 $\mathbf{y}$ に存在する高周波雑音の増幅をさけることにつながる。

いま、初期推定誤差の期待値 E が

$$E[\mathbf{e}(0)] = 0 \quad (21)$$

でかつその分散が

$$E[\mathbf{e}(0)\mathbf{e}(0)^T] = \mathbf{I} \quad (22)$$

で与えられる場合、(17) 式の $\mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)$ は $\text{tr} \mathbf{P}$ となる¹⁾。ただし、 $\text{tr}[\cdot]$ はカッコ内の行列の対角要素の和を意味する。

ゆえに、本問題は (20) 式の拘束条件のもとで

$$J = \text{tr} \mathbf{P} + \text{tr} \mathbf{G}\mathbf{G}^T \quad (23)$$

を最小にするオブザーバ利得 $\mathbf{G}$ を決定する問題に帰着される。

まず、ラグランジュ乗数を表わす $n \times n$ 次の対称行列 $\mathbf{S}$ を導入し、汎関数 Φ を

$$\Phi(\mathbf{P}, \mathbf{S}, \mathbf{G}) = \text{tr} \mathbf{P} + \text{tr} \mathbf{G}\mathbf{G}^T + \text{tr} [\mathbf{S} \{ (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C}) + \mathbf{Q} \}] \quad (24)$$

で定義する。最小化の手順に従い、(24) 式を $\mathbf{G}, \mathbf{P}$ お

よび $\mathbf{S}$ のそれぞれで偏微分し零とおいて解けば、最小値のための必要条件

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{C}^T \quad (25)$$

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T + \mathbf{I} = 0 \quad (26)$$

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C}) + \mathbf{Q} = 0 \quad (27)$$

が得られる。(付録 2 参照)

いっぽう、希望値 α の決定については以下のように行う。すなわち、 t_1 秒後における $\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} / \mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)$ の値を $1/\mu$ より小さくする場合、(17) 式から得られる関係式

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}{\mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)} &\leq \frac{\mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)}{\mathbf{e}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(0)} \exp(-2\lambda_1 t) \\ &= \exp(-2\lambda_1 t) \end{aligned} \quad (28)$$

の右辺と $1/\mu$ を等しくおき、それに t_1 を代入することにより

$$-2\alpha t_1 = \ln(1/\mu) \quad (29)$$

すなわち、

$$\alpha = \frac{1}{2t_1} \ln(\mu) \quad (30)$$

として求める。したがって、(30) 式より希望値 α を決め、その α で (25) ~ (27) 式を同時に解けば、希望以上の速度で推定誤差を減衰させるオブザーバを一義的に決定することができる。なお、(25) ~ (27) 式に対する解はつぎの手順の繰返しで求められる。

手順 1: $(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}, \mathbf{C})$ が可観測であることから $(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})$ を安定にするオブザーバ利得 $\mathbf{G}$ が存在し、これを初期値と考える。

手順 2: (26), (27) 式にこの $\mathbf{G}$ を代入し、同式を解くことにより $\mathbf{S}, \mathbf{P}$ を求める⁸⁾。

手順 3: (25) 式に $\mathbf{S}, \mathbf{P}$ を代入し $\mathbf{G}^*$ を求めるとともに、新しい $\mathbf{G}$ を $\mathbf{G} = \mathbf{G} + \beta(\mathbf{G}^* - \mathbf{G})$ として考える。ただし、 β は収束改善のためのスカラー量。

手順 4: 上記の $\mathbf{G}$ を用いて手順 2 に戻る。

以上のアルゴリズムを、 $\mathbf{G}, \mathbf{S}$ および $\mathbf{P}$ が適当な精度で収束するまで繰返す⁹⁾。

3. 例題系統への適用

ここでは、誘導電動機のような回転機負荷および定インピーダンス負荷からなる一機-無限大母線系統を対象に、本オブザーバの有効性について検討を加える。Fig. 1 に示すモデル系統において、系統負荷構成は一例として誘導電動機負荷 $I. M. 60\%$ および定インピーダンス負荷 $Z_{\text{LOAD}} 40\%$ からなるものとする。なお、系統機器定数および初期条件はそれぞれ Table 1, Table 2 に示す。図において、回路のアドミッタ

Fig. 1 Model system

Table 1 System conditions

Generator	x_d	0.6051	
	x_d'	0.2017	
	T_{d0}'	6.0	
	M	14.4	
Transformer	Reactance	T_{r1}	0.0756
		T_{r2}	0.0722
		T_{r3}	0.0290
		$2r_y$	0.0087
Trans. line (1 route)	Impedance	350 km	0.0622 + j0.5581
		25 km	0.0166 + j0.1070
Induction motor	r_{11}	$1r_y$	0.0135
	r_{22}	$2r_y$	0.0135
	x_{11}	$1r_y$	1.2001
	x_{22}	$2r_y$	1.1923
	x_{12}	1.1597	
	M_u	7.26	

(250 kV, 200 MVA base)

Table 2 Initial conditions

δ_1 (rad)	ω_1 (rad/s)	E_1 (p. u.)
0.7543	0.0	1.308
s	E_{md} (p. u.)	E_{mq} (p. u.)
0.0241	0.9248	-0.1182
P_m (p. u.)	E_2 (p. u.)	V (p. u.)
1.57	1.045	1.0

ンスの一般形を $\dot{Y}_{ij} = Y_{ij} e^{j\phi_{ij}} (i, j=1, 2, 3)$ で表わすとシステムの電流・電圧関係式は次式で表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで、 E_1, E_2, E_3 は発電機の過渡リアクタンス背後

電圧、無限大母線電圧および誘導電動機負荷の内部電圧を示す。

このとき、発電機に関する動特性式は、平常運転時における負荷点電圧 V 基準による E_1 の相差角 δ_1 、速度 ω_1 および過渡リアクタンス背後電圧 E_1 を状態変数に選ぶことにより次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_1}{dt} &= \omega_1 \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{\omega_0}{M} (P_m - P_e) \\ \frac{dE_1}{dt} &= \frac{1}{T_{d0}'} \{ E_{ex} - E_1 - (x_d - x_d') I_d \} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで、

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (f_0 = 60 \text{ Hz})$$

$$P_e = \text{Real}[\bar{E}_1 \dot{I}_1], \quad I_d = \text{Im}[\bar{E}_1 \dot{I}_1 / |E_1|]$$

(32)式において、 $x_d, x_d', T_{d0}', M, E_{ex}$ は発電機の同期リアクタンス、過渡リアクタンス、開路時定数、慣性定数および横軸電圧に換算した界磁電圧を示し、 $\bar{E}_1$ は $\dot{E}_1$ の共役複素量を示す。なお、 E_1 の変化は界磁鎖交磁束数に比例した電圧の変化に準じるものとした¹⁰⁾。

また、回転機負荷である誘導電動機負荷に関する動特性式は、スリップ s および内部電圧 $\dot{E}_3 = E_{md} + jE_{mq}$ を状態変数にとることにより次式で与えられる¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{M_u} (P_u - P_s) \\ \frac{d\dot{E}_3}{dt} &= -js\omega_0 \dot{E}_3 - \frac{1}{T_0'} \{ \dot{E}_3 + j(x_{11} - x') \dot{I}_3 \} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここで、

$$P_s = \text{Real}[-\bar{E}_3 \dot{I}_3]$$

(33)式において、 M_u, P_u は誘導電動機の慣性定数および機械的出力を示し、 x_{11}, x', T_0' は1次側リアクタンス、過渡リアクタンスおよび開路時定数を示す。

これらの動特性式を基準運転点で線形化し、観測量としては発電機側で容易に測定できる量、すなわち、有効電力 P_e および発電機の端子電圧 V_t を用いれば次式のシステム方程式が得られる。(付録3参照)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\omega_1 \\ \Delta E_1 \\ \Delta s \\ \Delta E_{md} \\ \Delta E_{mq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -38.34 & 0.0 & -40.6 & 0.0 & -24.84 & 25.3 \\ -0.0733 & 0.0 & -0.2711 & 0.0 & 0.04967 & 0.04876 \\ -0.1135 & 0.0 & -0.1007 & 0.0 & -0.058 & 0.8153 \\ -4.358 & 0.0 & 3.706 & -44.56 & -30.04 & 12.14 \\ 4.847 & 0.0 & 3.332 & -348.6 & -12.14 & -30.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\omega_1 \\ \Delta E_1 \\ \Delta s \\ \Delta E_{md} \\ \Delta E_{mq} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_e \\ \Delta V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.464 & 0.0 & 1.551 & 0.0 & 0.9488 & -0.9664 \\ -0.1675 & 0.0 & 0.6749 & 0.0 & 0.1765 & 0.1117 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\omega_1 \\ \Delta E_1 \\ \Delta s \\ \Delta E_{md} \\ \Delta E_{mq} \end{bmatrix} \quad (35)$$

ただし, (33) 式の第 2 式の $\dot{E}_3$ は複素量であるので, 同式を実部および虚部からなる 2 式に分解し線形化を行っている。

つぎに, 推定誤差の減衰の割合を表わす α を決定するわけであるが, ここでは一例として $t=0.5$ 秒で $e^T P e / e(0)^T P e(0)$ の値を $1/50$ 以下にするものとする。このとき, (30) 式より $\alpha=3.912$ となる。したがって, この α を用い, また, 半正定値対称行列 Q を単位行列として (25)~(27) 式を解けば, P , S および G はそれぞれ以下のように一義的に決定される。

$$P = \begin{bmatrix} 17.46 & -2.975 & 28.04 & -21.97 & -1.882 & 0.4903 \\ -2.975 & 0.6328 & -4.912 & 1.398 & 0.1471 & -0.0504 \\ 28.04 & -4.912 & 49.39 & -27.92 & -3.298 & 0.9223 \\ -21.97 & 1.398 & -27.92 & 204.9 & 8.225 & 1.249 \\ -1.882 & 0.1471 & -3.298 & 8.225 & 0.6231 & -0.0678 \\ 0.4903 & -0.0504 & 0.9223 & 1.249 & -0.0678 & 0.1040 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$S = \begin{bmatrix} 16.49 & 10.48 & -7.204 & -0.28 & 1.209 & 6.671 \\ 10.48 & 225.7 & 7.661 & 0.33 & 2.414 & -1.588 \\ -7.204 & 7.661 & 4.547 & 0.0335 & 0.8609 & -1.826 \\ -0.28 & 0.33 & 0.0335 & 0.1767 & -0.8563 & -1.759 \\ 1.209 & 2.414 & 0.8609 & -0.8563 & 6.074 & 9.862 \\ 6.671 & -1.588 & -1.826 & -1.759 & 9.862 & 20.11 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$G^T = \begin{bmatrix} 3.987 & 2.112 & 1.958 & -0.463 & -2.690 & 1.732 \\ -6.738 & 1.301 & 4.575 & -0.2889 & -1.638 & 0.088 \end{bmatrix} \quad (38)$$

いま, Fig. 1 の $a-b$ 区間の 1 回線に 0.5 秒間の開放故障を想定し, 推定は故障除去, すなわち, 原系に復帰すると同時に開始するものとする。なお, オブザーバの先験値としてはシステムの最終状態である $Z(0)=0$ を用いる。Fig. 2~Fig. 7 は, 本手法に基づいたオブザーバによる推定結果を示したものである。参考のため, 初期時および 0.5 秒後における $e^T P e$ の値を示すとそれぞれ 1.924 および 0.007 となる。これらの図より明らかなように, 本オブザーバによれば発電機側で容易に測定できる観測量から負荷の挙動を推定することができる。また, 初期時および 0.5 秒後における $e^T P e$ の値からわかるように, 設計で希望した速度以上の速さで推定値が真値に近づいていくことがわかる。

以上より, 設計の希望値 α を (30) 式で定め, こ

の α に対して (25)~(27) 式の非線形代数方程式を解けば, 所望の速度で推定誤差を減衰させるオブザーバを一義的に決定することができる。

Fig. 2 Relation between $\Delta\delta_1$ and t

Fig. 3 Relation between $\Delta\omega_1$ and t Fig. 7 Relation between ΔE_{mq} and t Fig. 4 Relation between ΔE_1 and t Fig. 5 Relation between Δs and t Fig. 6 Relation between ΔE_{md} and t

4. 結 言

A. M. Letov 氏が提案した非線形変換を推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し、設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるオブザーバを構成した。一例として、誘導電動機負荷 60% および定インピーダンス負荷 40% からなる負荷特性を考慮した一機-無限大母線系統の状態推定に適用し、本オブザーバの有効性を各状態量の時間応答から示した。

本手法の特徴は、評価関数を最小化することによりオブザーバ利得を一義的にかつ系統立った方法で求めることができ、また、従来のような極配置を行わないので、適切な極指定を考える必要がなくなる。

本論文では、電力系統を基準運転点で線形化した線形系を対象に最適なオブザーバを求めたが、A. M. Letov 氏の非線形変換は非線形系に対しても有効な過渡的過程の評価を与えるので、今後、本手法を電力系統の非線形特性を考慮した系統の状態推定に適用していきたいと考えている。

なお、本研究における計算機シミュレーションは琉球大学計算センター FACOM M180/IIAD を使用して行った。

参 考 文 献

- 1) W.S. Levine and M. Athans: on the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-15-1**, 44/48 (1970)
- 2) J.B. Pearson: Compensator Design for Dynamic Optimization, International J. of Control, **9-4**, 473/482 (1969)
- 3) D.G. Luenberger: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-11-2**, 190/197 (1966)
- 4) K. Ramar and V. Gourishankar: Optimal Observers with Specified Eigenvalues, International J. of Control, **27-2**, 239/244 (1978)
- 5) A. M. Letov: The Problem of Quality for Nonlinear

- Self-Regulating Systems with Quadratic Metric, IRE Trans. **CT-7**, 469/473 (1960)
- 6) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 7) T.J. Tarn and Y. Rasis: Observers for Nonlinear Stochastic Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-21-4**, 441/448 (1976)
- 8) P.G. Smith: Numerical Solution of the Matrix Equation $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{B} = \mathbf{0}$, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-3**, 278/279 (1971)
- 9) A.B.R. Kumar and E.F. Richards: A Suboptimal Control Law to Improve the Transient Stability of Power Systems, IEEE Trans. **PAS-95**, 243/247 (1976)
- 10) M.W. Siddiquee: Direct Method of Lyapunov and Transient Stability Analysis, Ph. D. Dissertation Univ. of Minnesota, Aug. (1967)
- 11) 谷口, 中村: 安定度解析のための誘導電動機負荷の表現法, 電気学会論文誌 **92-B-5**, 323/332 (1972)

《付 録》

〈付録 1〉 (12), (13) および (14) 式を導出するに際し, (9), (10) 式をそれぞれ以下のように示す.

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \tilde{\mathbf{P}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A. 1})$$

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} = 1 \quad (\text{A. 2})$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{P}} = -\{(\mathbf{A} - \mathbf{GC})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{GC})\} / 2 \quad (\text{A. 3})$$

いま, (A. 2) 式の $\mathbf{P}$ が正定な実対称行列より直交行列 $\mathbf{N}$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N} &= \boldsymbol{\Sigma} \\ &= \mathbf{H}^2 \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

のように対角化されるので, 行列 $\mathbf{P}$ を

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} \quad (\text{A. 5})$$

として表わすことができる. ただし, 各行列はそれぞれ (11) 式に示したものに相当する.

このとき, この $\mathbf{D}$ を用いた新しい行列 $\mathbf{P}^*$ を

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{D}^{-1})^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{D}^{-1} \quad (\text{A. 6})$$

で定義する. 上式の $\mathbf{P}^*$ は, $\tilde{\mathbf{P}}$ が実対称行列より $\mathbf{P}^*$ も実対称行列となり直交行列 $\mathbf{L}$ により対角化される.

$$\mathbf{L}^T \mathbf{P}^* \mathbf{L} = \boldsymbol{\Lambda} \quad (\text{A. 7})$$

したがって, (11) 式で示す線形変換を (A. 1), (A. 2) 式に施せば, $\mathbf{W}$ および $\mathbf{F}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{T} \mathbf{T} \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{D}^{-1})^T \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\Gamma} \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} \boldsymbol{\Gamma} \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\Gamma} \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} = 1 \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

のように同時対角化される.

〈付録 2〉 (25), (26) および (27) 式で示す関係は, (24) 式の Φ を $\mathbf{G}, \mathbf{P}$ および $\mathbf{S}$ のそれぞれで偏微分

し零とおくことにより得られる.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{G}} = 2\mathbf{G} - \mathbf{PSC}^T - \mathbf{PSC}^T = \mathbf{0} \quad (\text{A. 10})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{P}} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{GC}) \mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{GC})^T + \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{A. 11})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{GC})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{GC}) + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{A. 12})$$

〈付録 3〉 (31) 式で示す電圧 $\dot{E}_1, \dot{E}_2$ および $\dot{E}_3$ を

$$\begin{aligned} \dot{E}_i &= E_i \varepsilon^{j\delta_i} \quad (i=1, 2) \\ \dot{E}_3 &= E_{m3} + j E_{mq} \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

で表わせば P_e, P_s および I_d は

$$\begin{aligned} P_e &= \text{Real}[\tilde{E}_1 \dot{I}_1] \\ &= E_1^2 Y_{11} \cos \varphi_{11} + E_1 E_2 Y_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2 - \varphi_{12}) \\ &\quad + E_1 Y_{13} \{E_{md} \cos(\delta_1 - \varphi_{13}) \\ &\quad + E_{mq} \sin(\delta_1 - \varphi_{13})\} \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

$$\begin{aligned} P_s &= \text{Real}[-\tilde{E}_3 \dot{I}_3] \\ &= -E_1 Y_{13} \{E_{md} \cos(\delta_1 + \varphi_{13}) \\ &\quad + E_{mq} \sin(\delta_1 + \varphi_{13})\} \\ &\quad - E_2 Y_{23} \{E_{md} \cos(\delta_2 + \varphi_{23}) \\ &\quad + E_{mq} \sin(\delta_2 + \varphi_{23})\} \\ &\quad - (E_{md}^2 + E_{mq}^2) Y_{33} \cos \varphi_{33} \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

$$\begin{aligned} I_d &= \text{Im}[\dot{E}_1 \tilde{I}_1 / |\dot{E}_1|] \\ &= -E_1 Y_{11} \sin \varphi_{11} + E_2 Y_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2 - \varphi_{12}) \\ &\quad + E_{md} Y_{13} \sin(\delta_1 - \varphi_{13}) - E_{mq} Y_{13} \cos(\delta_1 - \varphi_{13}) \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

となる. したがって, 状態方程式は (A. 14), (A. 15) および (A. 16) 式を (32), (33) 式に代入し整理することにより次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_1}{dt} &= \omega_1 \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{\omega_0}{M} [P_m - E_1^2 Y_{11} \cos \varphi_{11} \\ &\quad - E_1 E_2 Y_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2 - \varphi_{12}) \\ &\quad - E_1 Y_{13} \{E_{md} \cos(\delta_1 - \varphi_{13}) \\ &\quad + E_{mq} \sin(\delta_1 - \varphi_{13})\}] \\ \frac{dE_1}{dt} &= \frac{1}{T_{d0}} [E_{ex} - E_1 + (x_d - x'_d) \{E_1 Y_{11} \sin \varphi_{11} \\ &\quad - E_2 Y_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2 - \varphi_{12}) \\ &\quad - E_{md} Y_{13} \sin(\delta_1 - \varphi_{13}) \\ &\quad + E_{mq} Y_{13} \cos(\delta_1 - \varphi_{13})\}] \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{M_u} [P_u + E_1 Y_{13} \{E_{md} \cos(\delta_1 + \varphi_{13}) \\ &\quad + E_{mq} \sin(\delta_1 + \varphi_{13})\} \\ &\quad + E_2 Y_{23} \{E_{md} \cos(\delta_2 + \varphi_{23}) \\ &\quad + E_{mq} \sin(\delta_2 + \varphi_{23})\} \\ &\quad + (E_{md}^2 + E_{mq}^2) Y_{33} \cos \varphi_{33}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_{md}}{dt} &= s\omega_0 E_{mq} - \frac{1}{T_0'} E_{md} \\ &+ \frac{x_{11} - x'}{T_0'} [E_1 Y_{13} \sin(\delta_1 + \varphi_{13}) \\ &+ E_2 Y_{23} \sin(\delta_2 + \varphi_{23}) \\ &+ Y_{33} \{E_{md} \sin \varphi_{33} + E_{mq} \cos \varphi_{33}\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_{mq}}{dt} &= -s\omega_0 E_{md} - \frac{1}{T_0'} E_{mq} \\ &- \frac{x_{11} - x'}{T_0'} [E_1 Y_{13} \cos(\delta_1 + \varphi_{13}) \\ &+ E_2 Y_{23} \cos(\delta_2 + \varphi_{23}) \\ &+ Y_{33} \{E_{md} \cos \varphi_{33} - E_{mq} \sin \varphi_{33}\}] \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

いっぽう、出力方程式の有効電力は (A. 14) 式で与えられ、また、端子電圧は

$$\begin{aligned}\dot{V}_t &= V_{td} + jV_{tq} \\ &= \dot{E}_1 - jx_d' \dot{I}_1 \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

の関係式より

$$\begin{aligned}V_{td} &= E_1 \cos \delta_1 + x_d' E_1 Y_{11} \sin(\delta_1 + \varphi_{11}) \\ &+ x_d' E_2 Y_{12} \sin(\delta_2 + \varphi_{12}) \\ &+ x_d' Y_{13} \{E_{md} \sin \varphi_{13} + E_{mq} \cos \varphi_{13}\} \end{aligned} \quad (\text{A. 19})$$

$$\begin{aligned}V_{tq} &= E_1 \sin \delta_1 - x_d' E_1 Y_{11} \cos(\delta_1 + \varphi_{11}) \\ &- x_d' E_2 Y_{12} \cos(\delta_2 + \varphi_{12}) \\ &- x_d' Y_{13} \{E_{md} \cos \varphi_{13} - E_{mq} \sin \varphi_{13}\} \end{aligned}$$

を求め、次式に代入することにより得られる。

$$V_t = \sqrt{V_{td}^2 + V_{tq}^2} \quad (\text{A. 20})$$

以上より、(A. 17) 式および (A. 14)、(A. 20) 式のそれぞれを基準運転点で線形化すれば (34)、(35) 式のシステム方程式が導出される。