中間標準形の構造可制御性の2部グラフによる表現

室 田 一 雄*

Structural Controllability of a System in Descriptor Form Expressed
in Terms of Bipartite Graphs

Kazuo MUROTA*

1. はじめに

最近、線形系の構造可制御性の議論において、現実の系のもつ物理的構造をより忠実に反映するような定式化を目指した研究が行われてきている(文献1), 6)~9) およびその参考文献を参照). 系のもつ物理パラメータの独立性を表現するためには、標準形:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

($x \in R^n, u \in R^m$) に比べて、いわゆる中間標準形(descriptor form):

$$F\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

($x \in R^n, u \in R^m$; F は正則とは限らない n 次正方行列) のほうが適していることに着目して、文献1), 6) では(2)の係数行列 F, A, B の非零要素を独立パラメータとする generic な可制御性(構造可制御性)が考察され、そのためのグラフ的条件が与えられている。

(1)の行列 A は行と列の対応をもち、相似変換に従う型の行列である。いっぽう、(2)の行列 A では、行は方程式、列は変数に対応するので“対角”という概念は無意味であり、 A は同値変換に従う型の行列である。しかし、文献1), 6)のグラフ表現は、この“型”の違いを考慮しておらず、つぎの点でともに不自然に見える: 文献1)のグラフ表現は(2)の変数や方程式の(偶然の)番号づけに依存した Coates グラフであり、この意味で表現が一意でない; 文献6)のグラフは(2)の係数行列の要素ごとの情報から直ちに定めることができず、また、一意的でもない。このようなグラフ表現を用いている結果、本来、変数や方程式の番号づけに依らないはずの構造可制御性のグラフ的条件がこの番号づけに対して不変な形に書かれていないようである。(もちろん、グラフ表現の非一意性は結果に

おいて何ら影響を与えないはずではある⁶⁾が、“不変なもの”は“不変な形”に書かれるほうが望ましい。)

本小論の目的は、(2)の構造を最も素直に表現するグラフは変数と方程式の独立な置換に対して不変でなければならないという認識から、表現グラフとして2部グラフを用い、その2部グラフの Dulmage-Mendelsohn 分解(以後、DM 分解と略記)に関連した概念を用いて構造可制御性のグラフ的条件を与えることである。この条件は、文献1), 6)ですでに与えられているものとグラフ論的に同等であり、それ自身新しい結果ではないが、その導出法は、2部グラフの DM 分解に関連して知られている基本的結果(補題2~4)を十分利用している点、および、独立パラメータを代数的独立元とみて、代数的独立性の基本性質である交換定理を利用している点により従来のものより簡潔となっている。

2. 構造可制御性とグラフ表現

文献1), 6)に従って(6)の構造可制御性を定式化する。すなわち、 $\hat{D}(z) = A - zF$, $D(z) = [A - zF | B]$ とおくと、(2)の係数 F, A, B の非零要素を独立パラメータとして generic に

$$\det \hat{D}(z) \neq 0 \quad (3)$$

(z は不定元)であり、かつ

$$\text{rank } D(s) = n \quad \forall s \in C \quad (4)$$

であるとき、(2)は構造可制御であるという。これは、「行列 F, A, B の非零要素の全体 $\mathcal{S}$ は有理数体上代数的に独立¹¹⁾である」

ときに(3), (4)が成立することと同等である⁷⁾。

一般に、 $p \times q$ 行列 $M = (m_{ij})$ について、対応する2部グラフを $G(M)$ とかく。すなわち、 $G(M)$ は行番号 $U = \{i | i=1, \dots, p\}$ と列番号 $W = \{j | j=1, \dots, q\}$ に対応する $p+q$ 個の点をもち、 $m_{ij} \neq 0$ のとき、そのときに限り、点 i と点 j を結ぶ枝をもつグラフである。以下で用いるのは、 $G(\hat{D}(z))$, $G(D(0))$, $G(D(z))$ の三つのグラフである。特に、 $G(D(z))$ においては、 z を含む非零要素(すなわち、 F の非零要素)

* 筑波大学社会工学系 茨城県新治郡桜村天王台 1-1-1

* University of Tsukuba, Institute of Socio-Economic Planning, Niihari-gun, Ibaraki

(Received October 19, 1983)

Keyword: structural controllability, descriptor form, bipartite graph, DM-decomposition

Fig. 1 Bipartite graph $G(D(z))$ for (6)
(z -branch drawn in bold line)

に対応する枝を“ z 枝”と呼ぶ(文献1)の s パラメータに対応する).

〔例1〕(文献6)の例1)

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ f_2 & f_3 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

に対する $G(D(z))$ を Fig. 1 に示す. 図の左側の点が行 (=方程式) に, 右側の点が列 (=変数 x_1, x_2, x_3, u) に対応しており, 太線が z 枝である.

3. 構造可制御性のグラフ的条件

3.1 準備

2部グラフ G の最大マッチングの大きさを ρG とかくとき, つぎの関係は自明である.

〔補題1〕 $\text{term-rank } M = \rho G(M)$. (7)

さらに, M の非零要素が有理数体上代数的独立ならば

$$\text{rank } M = \rho G(M). \quad (8) \blacksquare$$

つぎに, DM 分解^{(2)~(5), (10)}に関する用語を, 文献5)の記号に従って述べる. 点集合 $U \cup W$, 枝集合 E をもつ2部グラフ $G(U, W; E)$ の既約成分を $G_i = G(S_i, T_i)$ ($i=0, 1, \dots, r, r+1$) とする(文献5)の定理6.4参照; $S_0 \neq \emptyset$ ならば $\rho G_0 = |S_0| < |T_0|$, $T_{r+1} \neq \emptyset$ ならば $|S_{r+1}| > |T_{r+1}| = \rho G_{r+1}$ であり, $i=1, \dots, r$ については $|S_i| = |T_i| = \rho G_i$ である). ここでは, G_i ($1 \leq i \leq r$) を整合(既約)成分, G_0 を極大不整合(既約)成分, G_{r+1} を極小不整合(既約)成分と呼ぼう.

例として, Fig. 1 の2部グラフ $G(D(z))$ のDM分解を Fig. 2 に示す. G_0 が極大不整合成分, G_1 が唯一の整合成分であり, 極小不整合成分は存在しない.

行列 M の2部グラフ $G(M) = G(U, W; E)$ は, U が行番号, W が列番号を表わすものとする. $G(M)$ の既約成分に対応する M の部分行列(文献5), p. 208 の2部既約形参照)についても, 整合成分, 極大・極小不整合成分などの言葉を流用する. 次の補題

Fig. 2 DM-decomposition of $G(D(z))$ for (6)
(z -branch drawn in bold line)

は明らかである.

〔補題2〕 行列が row full rank であることは各既約成分が row full rank であることと同値である. $\blacksquare$

〔補題3〕 正方行列 M が2部既約であるとする. M の非零要素が有理数体上代数的独立ならば, M のすべての非零要素は $\det M$ の中に陽に現れる. $\blacksquare$

2部グラフ $G = G(U, W; E)$ から点 $j \in W$ を除去したグラフを $G^{(j)}$ とかくとき, 次が成立する.

〔補題4〕 G の極大不整合成分を $G_0(S_0, T_0)$ とする. 任意の $j \in T_0$ に対し,

$$\rho G = \rho G^{(j)}. \quad \blacksquare$$

(証明) $G_0(S_0, T_0)$ の最小被覆は $(S_0, \emptyset)$ に限られること⁵⁾による. 詳しくは文献9)参照. (証明終)

3.2 主定理—グラフ的条件

《定理》 系(2)が(3), (4)式の意味で構造可制御であるためにはつぎの(a), (b), (c)が必要十分である:

- (a) $\rho G(\hat{D}(z)) = n$,
- (b) $\rho G(D(0)) = n$,
- (c) $G(D(z))$ の整合既約成分が z 枝を含まない. $\blacksquare$

(証明) (5)のもとでは $\hat{D}(z)$ の非零要素は有理数体上代数的独立だから, 補題1により, (a)は(3)と同値であり, 同様に(b)は $\text{rank } D(0) = n$ と同値である.

いま, (2)が構造可制御とする. 上に述べたように(a), (b)は成立する. (c)が成り立たないとすると, ある整合既約成分 $G_i(S_i, T_i)$ が z 枝を含む. これに対応する部分正方行列は2部既約であるから, その行列式を $f(z)$ とすると, (5)と補題3により, $f(z)$ は z に関して1次以上の多項式である. したがって, $f(s) = 0$ となる $s \in \mathbb{C}$ が存在するが, 補題2により, この s に対して $\text{rank } D(s) < n$ となって(4)に反する.

逆に, (a), (b), (c)が成り立つとすると, 任意の $s \in \mathbb{C}, s \neq 0$ について $\text{rank } D(s) = n$ となることを示せばいい. (a)が成り立つから, $D(z)$ は極小不整合成分をもたない. 整合既約成分は z を含まないか

ら, (5) のもとで, 任意の $z=s$ に対して正則である. $D(z)$ の極大不整合部 $D_0(z)$ の行数を r とする. $\mathcal{P}$ ((5) 参照) のうち $D_0(z)$ に含まれるものを $\mathcal{D}$ とすると $\mathcal{D} \cup \{z\}$ は代数的独立だから, $\text{rank } D_0(z) = \text{term-rank } D_0(z) = r$ であり, $D_0(z)$ の r 次小行列式 $g(z) = g(z; \mathcal{D}) \neq 0$ が存在する. $g(s) \neq 0$ なる $s \in \mathbf{C}$ については $\text{rank } D_0(s) = r$ である. $g(s) = 0$ なる $s (\neq 0)$ は超越数である (なぜなら, もし s が代数的なら $D_0(s)$ の非零要素は代数的独立となるから). したがって, ある $a \in \mathcal{D}$ が存在して, $\mathcal{I} \equiv \mathcal{D} \setminus \{a\} \cup \{s\}$ は代数的に独立である¹¹⁾ (文献 7) の補題 5 の証明参照). a が $D_0(z)$ の第 j 列にあるとすると, 補題 4 により, $D_0(z)$ の第 j 列を含まない r 次小行列式 $h(z) \neq 0$ が存在する. $h(z)$ は a を含まないので $\mathcal{I}$ の代数的独立性により $h(s) \neq 0$, すなわち $\text{rank } D_0(s) = r$ であり, $\text{rank } D(s) = n$ である. 以上で (4) 式が導かれたので (2) 式は構造可制御である. (証明終)

例 1 が上の条件 (a), (b) をみたすことは直ちにわかる. また, Fig. 2 (太線が z 枝) に示すように, 条件 (c) も成立するので, これは構造可制御である. これに対し, (6) で $a_2=0$ とした系 (文献 6) の例 2) では $G(D(z))$ の DM 分解 (Fig. 3) において z 枝 $(1, x_1)$ が整合既約成分 G_1 に含まれるので上の条件 (c) が満たされず構造可制御でない.

4. おわりに

本小論では, 中間標準形の構造可制御条件を 2 部グラフの DM 分解との関連から論じた. 《定理》で与えた条件はもちろん文献 1), 6) で与えられたグラフ的条件と同等である. 特に, 本論文の《定理》の条件を判定する効率的な算法は, その途中で文献 6) で用いられた表現グラフを利用することになる. しかし, 構造をより見やすく表現するという点では本論文で採用した 2 部グラフ表現が適していると思われる. 本研究は

Fig. 3 DM-decomposition of $G(D(z))$ for (6) with $a_2=0$ (z -branch drawn in bold line)

文部省科学研究費補助金 (奨励研究) の援助を受けた.

参 考 文 献

- 1) 青木俊久, 細江繁幸, 早川義一: 中間標準形で記述されたシステムの構造可制御性, 計測自動制御学会論文集, **19-8**, 628/635 (1983)
- 2) A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: Coverings of Bipartite Graphs, Canadian J. of Mathematics, **10**, 517/534 (1958)
- 3) A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: A Structure Theory of Bipartite Graphs of Finite Exterior Dimension, Trans. of Royal Society of Canada, Section III, **53**, 1/13 (1959)
- 4) A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: Two Algorithms for Bipartite Graphs, SIAM J., **11-1**, 183/194 (1963)
- 5) 伊理正夫, 韓 太舜: 線形代数, 教育出版 (1977)
- 6) 松本孝裕, 池田雅夫: 中間標準形表現に基づく構造可制御性, 計測自動制御学会論文集, **19-8**, 601/606 (1983)
- 7) 室田一雄: 補助変数をもつ線形時不変系の構造可制御性, 計測自動制御学会論文集, **19-2**, 104/109 (1983)
- 8) 室田一雄: 非零固定要素をもつ系の構造可制御性, 計測自動制御学会論文集, **19-9**, 685/692 (1983)
- 9) K. Murota: Structural Solvability and Controllability of Systems, 東京大学工学部学位論文 (1983)
- 10) 高橋啓郎, 藤重 悟: 離散数学, 岩波講座情報科学 **17** (1981)
- 11) B. L. van der Waerden: Algebra I, II. Springer-Verlag (1955)