微分可能性を仮定しない不連続最適制御問題の必要条件[†]

井 前 讓*・箱 守 京次郎*

Necessary Conditions for Discontinuous Optimal Control Problems without Differentiability Assumptions

Joe IMAE* and Kyojiro HAKOMORI*

Maximum Principle type necessary conditions are obtained for optimal control problems governed by discontinuous right-hand side state equations, without differentiability assumptions.

First, we define a new set-valued “Wrapper”, an extension of the concept of derivative, which is a good working tool for this kind of problems. Secondly, we construct a convex set similar to the cone of attainability proposed by Pontryagin et al. in the proof of their Maximum Principle. Lastly, we investigate certain properties of the set which play an important role in deriving the necessary conditions for the present problems.

Difficulties which arise from nondifferentiability assumptions and the existence of “separating hyperplanes” dividing the state space into a finite number of subregions are discussed in detail. The results presented here are considered to be an extension of those obtained by Masubuchi and Kanoh (1968) in the case where ordinary derivatives exist.

Keyword: discontinuous optimal control, nondifferentiability, maximum principle

1. はじめに

制御対象をモデリングする際、状態空間を部分領域に分割して扱いやすい状態方程式を各領域ごとに決定し、それらを組み合わせることにより制御対象を表現する立場がある。この場合に対する最適制御問題は不連続最適制御問題¹⁾とよばれ、分割境界面上ではPontryaginの最大原理が適用できないなどの問題が

あって今まで多くの研究がなされてきた。たとえば、Pontryaginら²⁾は状態制約のある最適制御問題の結果に着目して不連続最適制御問題の最適解を検討し、またBerkovitz³⁾は古典変分法の角点条件を用いて境界面を考慮した必要条件を得ている。増淵・嘉納⁴⁾はBerkovitzと同様の立場ながら、より厳密に必要条件を導出し、その条件をクーロン摩擦を含むサーボ系の問題に適用している。また市川・田村⁵⁾は最適逆時間軌道の追跡と適当な最適制御問題の設定を交互に繰り返すことにより飽和形非線形要素を含む系をとり扱っている。しかしながら、分割境界面を通過する際には状態軌道は接することなく瞬時に通過しなければならないこと、またそのとき随伴ベクトルに生じる跳躍現象にいちいち注意しなければならないこと、さらに分割数を多くすれば扱う状態方程式の数が増加することなどの理由から、状態空間の分割数をできる限り少なくする手法の確立が応用上の問題として残されていた。

いっぽう、状態空間を部分領域に分割することなく微分可能条件を緩めることによりモデリングをおこなう立場がある。この場合に対する最適制御問題は、微分不可能な関数を積極的に導入して最適解を求めるExact penalty function法⁶⁾が注目を集めていることもあり、微分可能性を仮定しない最適制御問題として最近研究が盛んである。Luenberger⁶⁾は絶対値記号が含まれる最適制御問題を扱い、最適解の満足すべき必要条件を導出している。またBertsekas & Mitter⁷⁾は ϵ -subgradientsの概念を用いてmin-max問題を検討している。さらにClarke⁸⁾、Warga⁹⁾、Halkin¹⁰⁾は従来の微係数の概念を拡張したGeneralized Jacobians, Derivative containers, Shieldsをそれぞれ提案し、微係数を含まない形で最適解の満足すべき必要条件を導出している。しかしながら、現実によくみられる不連続に変化する現象を含む場合などは除外されており、応用上問題が残されていると思われる。

本論文では以上の問題点に対処するため、不連続最

[†] Dynamical System Theory シンポジウムで一部発表 (昭 53・12)

[†] 第8回制御理論シンポジウムで一部発表 (昭 54・5)

* 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai (Received June 9, 1983)

(Revised January 14, 1984)

適制御問題を微分可能性の仮定をおかずに扱い、微係数を含まない形で最大原理形式の必要条件を導出する。以下第 2 章では問題の定式化をおこなう。この際、微分可能性を仮定しないため微係数を拡張した概念が必要となる。ところで Warga の Derivative containers は定義が繁雑であり、Clarke は Generalized Jacobians を提案しているがそれを用いての必要条件導出方法は複雑である。また Shields に関しては必要条件の証明過程が明確にされていない。このため第 3 章では、本研究の論理展開に適した拡張微係数を新たに提案する。第 4 章、第 5 章ではそれを用い、Brouwer の不動点定理を援用して不連続最適制御問題の必要条件を証明する。

2. 問題の定式化

超曲面 $g_k(x)=0$ ($k=1, \dots, l-1$) により状態空間 R^n が分割領域 X_k ($k=1, 2, \dots, l$, X_k は開集合, $\bar{X}_k$ は閉集合, $\bigcup_{k=1}^l X_k = R^n$) に有限分割され、それぞれの領域において状態方程式が

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u(t)), \quad x(t) \in X_k, \quad u(t) \in U_k \subset R^r, \quad k=1, 2, \dots, l \quad (1)$$

であらわされるとする。初期・終端条件をそれぞれ

$$x(t_0) = x_0 \in X_1 \quad (2)$$

$$q(x(t_1)) = 0 \quad \text{かつ} \quad x(t_1) \in X_l \quad (3)$$

として評価関数

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), u(t)) dt \quad (4)$$

を固定制御区間 $[t_0, t_1]$ において最小にする最適制御問題を考察する。

ここに $f_k: R^n \times R^r \rightarrow R^n$, $L_k: R^n \times R^r \rightarrow R^1$, $q: R^n \rightarrow R^1$ ($m \leq n$), $g_i: R^n \rightarrow R^1$, g_i の微係数 $\partial g_i / \partial x$ はすべて連続であり、 f_k , L_k , q は任意の有界集合 R^* ($\subset R^n$) において u に無関係な Lipschitz 定数をもつ Lipschitz 連続な関数とする ($i=1, 2, \dots, l-1$, $k=1, 2, \dots, l$)。ただし $k=1, 2, \dots, l$ に対し $x \in X_k$ ならば $L(x, u) = L_k(x, u)$ であり、 $x \notin \bigcup_{k=1}^l X_k$ ならば $L(x, u) = 0$ とする。

操作量 $u(t) (t \in [t_0, t_1])$ は断片連続関数で、状態軌道 $x(t) (t \in [t_0, t_1])$ は $u(t)$ を用いて、(1), (2) 式により得られる絶対連続な解を部分領域ごとに順次接続したものである。

3. 最大原理形式の必要条件

必ずしも微係数が存在するとは限らない関数を扱うため微係数を拡張した新たな概念を提案する。すなわち、関数 $h(x)$ に一様収束する 1 回連続微分可能な関

数列を考えてそれらの微係数の適当な集合から x_0 における $h(x)$ の拡張微係数を構成する。この考え方は Derivative containers や Screens¹¹⁾ などにヒントを得ている。

いま、 $x_0 \in R^n$, $A \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$, $A \subset \mathcal{L}(R^n, R^m)$ に対して $N(x_0, \delta) = \{x \in R^n: |x - x_0| < \delta\}$, $N(A, \delta) = \{M \in \mathcal{L}(R^n, R^m): |M - A| < \delta\}$, $N(A, \delta) = \bigcup_{M \in A} N(M, \delta)$ とする。ここに $\mathcal{L}(R^n, R^m)$ は $n \times m$ 行列の空間、 $|\cdot|$ はユークリッドノルムである。

【ラッパー (Wrapper) の定義】 $h: V \rightarrow R^m$ (V は R^n の開部分集合), $x_0 \in V$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な $\delta \in (0, \varepsilon]$ が存在し、すべての $x \in N(x_0, \delta)$ ($N(x_0, \delta) \subset V$) に関して、

$$(i) \quad |Ma(x) - h(x)| \leq \alpha$$

$$(ii) \quad \partial Ma(x) / \partial x \in N(A, \varepsilon)$$

がどのような $\alpha > 0$ に対しても成立する 1 回連続微分可能関数 $Ma(x)$ が存在するならば、 $\mathcal{L}(R^n, R^m)$ のコンパクトな部分集合 A を $x_0 \in V$ における h のラッパーとよび $Wh(x_0)$ と表わす。

さて、つぎのようなスカラー変数 $x^0(t)$

$$x^0(t) = \int_{t_0}^t L(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (5)$$

を導入し、 $x = (x^0, x^T)^T$ として状態空間を $(n+1)$ 次元に拡張する。これに応じて $(L_k(x, u), f_k^T(x, u))^T$, $((x^0 - \bar{J}), q^T(x))^T$, $g_i(x)$, $\{x \in R^{n+1}: x^0 \in R^1, x \in X_k\}$ をそれぞれ $f_k(x, u)$, $q^T(x)$, $g_i(x)$, X_k と表わす。ただし $i=1, 2, \dots, l-1$; $k=1, 2, \dots, l$, $(\cdot)^T$ は転置, $\bar{J}$ は最適評価関数値である。

最適操作量、最適軌道を $\bar{u}$, $\bar{x}$ としてつぎのような前提のもとで考察をおこなう。

【仮定】 (i) 最適操作量、最適軌道は存在する。

(ii) 最適軌道 $\bar{x}$ は分割領域を $X_1, X_2, \dots, X_l$ の順に通過してそのとき超曲面を $g_1(x)=0$, $g_2(x)=0$, $\dots$, $g_{l-1}(x)=0$ の順に、接することなく横切る。ただし通過時刻はそれぞれ $t_1, t_2, \dots, t_{l-1}$ とする。

(iii) $\bar{x}(t_1)$ において q のラッパー $Wq(\bar{x}(t_1))$ が存在する。

(iv) 任意の $x \in R^n$ に対して、 $f_k(\cdot, u_k(t))$ のラッパー $Wf_k(x, u_k(t))$ が存在する。ただし、(i)', (ii)' の性質を満足する。

(i)' 任意の $\varepsilon < 0$ に対してつぎのような $\delta^* > 0$, $M^* > 0$ が存在する。

$$a. \quad \lim_{j \rightarrow \infty} h_j^i(x, t) = f_k(x, u_k(t)),$$

$$k=1, 2, \dots, l \quad (S\delta^* \times [t_0, t_1] \text{ で一様収束})$$

$$b. \quad \frac{\partial h_j^i(\bar{x}, t)}{\partial x} \in Z(\varepsilon, k, t),$$

- $k=1, 2, \dots, l$ ($t \in [t_0, t_i]$, $|\bar{x}(t) - \bar{x}| < \delta^*$)
 c. $|Z_k(t)| \leq M^*$, $Z_k(t) \in Z(\varepsilon, k, t)$,
 $k=1, 2, \dots, l$ ($t \in [t_0, t_i]$)

ここに, $h_k^*(x, t)$ は $S_{\delta^*} = \{x \in R^{n+1} : |\bar{x}(t) - x| < 2\delta^*, t \in [t_0, t_i]\} \times [t_0, t_i]$ において定義され, x に関して連続微分可能, t に関して断片連続な関数とする. また $k=1, 2, \dots, l$ に対し

$$u_k(t) = \begin{cases} \bar{u}(t_{k-1}^+), & t \in [t_0, t_{k-1}] \\ \bar{u}(t), & t \in (t_{k-1}, t_k), \\ \bar{u}(t_k^-), & t \in [t_k, t_i] \end{cases}$$

$$Z(\varepsilon, k, t) = \overline{co} \bigcup_{|x(t) - \bar{x}| \leq \varepsilon} Wf_k(x, u_k(t)),$$

および $\bar{u}(t_{k-1}^+) = \lim_{t \downarrow t_{k-1}} \bar{u}(t)$, $\bar{u}(t_k^-) = \lim_{t \uparrow t_k} \bar{u}(t)$ とする.

$\overline{co}$ は closed convex hull を表わす.

(ii)' $Z(\varepsilon, k, \cdot)$ は可測集合値関数 (measurable set-valued mapping) である.

以上の仮定のもとに前章の不連続最適制御問題に関する必要条件がつぎのとおり得られる.

[必要条件] $i=1, 2, \dots, l-1$; $k=1, 2, \dots, l$ に対し可測関数 $\bar{F}_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{n+1})$, $\bar{Q} \in \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{m+1})$, 断片連続関数 $p_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow R^{n+1}$, 列ベクトル $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)^T$ が存在して

$$(i) \quad \bar{F}_k(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} \bigcup_{|x(t) - \bar{x}| \leq \varepsilon} Wf_k(x, u_k(t))$$

$$(a.e. t \in [t_{k-1}, t_k]) \quad (6)$$

$$(ii) \quad \bar{Q} \in Wq(\bar{x}(t_i)) \quad (7)$$

$$(iii) \quad p_k^T(t) f_k(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{v \in U_k} p_k^T(t) f_k(\bar{x}(t), v)$$

$$(t \in [t_{k-1}, t_k] \cap \{\bar{u}(t) \text{ の連続点の集合}\}) \quad (8)$$

$$(iv) \quad p_k^T(t) = p_k^T(t_{k-1}^+) + \int_{t_{k-1}}^t p_k^T(\tau) \bar{F}_k(\tau) d\tau$$

$$(t \in [t_{k-1}, t_k]) \quad (9)$$

$$p_i^T(t_i) = p_{i+1}^T(t_i) + p_{i+1}^T(t_i)$$

$$\times [f_{i+1}(\bar{x}(t_i), \bar{u}(t_i^+)) - f_i(\bar{x}(t_i), \bar{u}(t_i^-))]$$

$$\times \left[\frac{\partial g_i(\bar{x}(t_i))}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial g_i(\bar{x}(t_i))}{\partial x} f_i(\bar{x}(t_i), \bar{u}(t_i^-)) \right]^{-1}$$

$$(10)$$

$$p_i^T(t_i) = a^T \bar{Q} \quad (11)$$

$$(v) \quad \sum_{j=0}^m |a_j| \neq 0, \quad a_0 \leq 0 \quad (12)$$

である.

4. 必要条件の導出

いま, 可測関数 $F_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{n+1})$ ($k=1, 2, \dots, l$) に対して $\Phi_k(t)$ を次式の解とする.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_1(t) &= F_1(t) \Phi_1(t), \quad \Phi_1(t_0) = I, \quad t \in [t_0, t_1] \\ (I \text{ は単位マトリックス}) \\ \dot{\Phi}_k(t) &= F_k(t) \Phi_k(t), \quad \Phi_k(t_{k-1}) = \Phi_{k-1}(t_{k-1}) \\ &\quad + D(t_{k-1}) \Phi_{k-1}(t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \\ (k=2, 3, \dots, l) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし $D(t_{k-1}) = [f_k(\bar{x}(t_{k-1}), \bar{u}(t_{k-1}^+)) - f_{k-1}(\bar{x}(t_{k-1}), \bar{u}(t_{k-1}^-))] [\partial g_{k-1}(\bar{x}(t_{k-1})) / \partial x] f_{k-1}(\bar{x}(t_{k-1}), \bar{u}(t_{k-1}^-))^{-1}$ である. このとき,

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_l) \quad (14)$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi_1(t), & t \in [t_0, t_1] \\ \Phi_2(t), & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ \Phi_l(t), & t \in [t_{l-1}, t_l] \end{cases} \quad (15)$$

$$\Delta f(\tau, v) = \begin{cases} f_1(\bar{x}(\tau), v) - f_1(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), & \bar{x}(\tau) \in X_1 \\ \vdots \\ f_l(\bar{x}(\tau), v) - f_l(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)), & \bar{x}(\tau) \in X_l \end{cases} \quad (16)$$

なる $F, \Phi, \Delta f$ を用いて $\delta x(F)$ を

$$\delta x(F) = \Phi(t_i) \sum_{i=1}^s \Phi^{-1}(\tau_i) \Delta f(\tau_i, v_i) l_i \quad (17)$$

と定めると, 必要条件導出に重要な役割を果たす集合 K をつぎのように構成することができる.

$$K(F, Q) = \{Q \delta x(F) : \tau_i \in \tilde{T} \setminus \bar{T}, v_i \in V_i, l_i \in [0, \infty), i=1, \dots, s, s \in \{1, 2, \dots\}\} \quad (18)$$

ここに $\tilde{T} = \{\bar{u}(t) \text{ の連続点の集合}\}$, $\bar{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{l-1}\}$ であり, $\bar{x}(\tau_i) \in X_k (k \in \{1, 2, \dots, l\})$ ならば $V_i = U_k$ とする.

ここで, 集合 K に関してつぎの補題を得る.

[補題 4.1] 任意の $F_k (k=1, 2, \dots, l)$, Q に対して $K(F, Q)$ は凸錐である.

(証明) 省略.

[補題 4.2]

$$(-1, 0, \dots, 0) \notin \text{int. } K(\bar{F}, \bar{Q}) \quad (19)$$

$$\bar{F}_k(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} Z(\varepsilon, k, t)$$

$$a.e. t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (20)$$

$$\bar{Q} \in Wq(\bar{x}(t_i)) \quad (21)$$

なる可測関数 $\bar{F}_k : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{n+1})$ ($k=1, 2, \dots, l$), $\bar{Q} \in \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{m+1})$ が少なくとも 1 組存在する. ただし $(-1, 0, \dots, 0)^T \in R^{m+1}$, $\bar{F} = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_l)$ である.

以上の補題のもとで求める必要条件を導くことができる. すなわち凸錐 K に関して非零ベクトル $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)^T \in R^{m+1}$ が存在し

$$a^T \bar{Q} \delta x(F) \leq 0, \quad -a_0 \geq 0 \quad (22)$$

が成立する. 随伴ベクトルを導入することにより (22) 式から第 3 章の必要条件が得られる.

5. 補題 4.2 の証明

本章では補題 4.2 を証明する。証明方法として補題が成立しないと仮定し矛盾を導く背理法を用いる。すなわち補題が成立しないならば $\bar{u}$ が最適操作量とはなり得ないことを示す。証明は 3 段階に分けておこなう。第 1 段階では補題 4.2 が成立しないならば補題 5.1 が成立することを示す。第 2 段階では最適操作量にある種の強変分を与えてその際に生じる変動軌道の性質を検討する。第 3 段階では補題 5.1 と Brouwer の不動点定理を用いて変動軌道と最適軌道との関係を明らかにする。

〈第 1 段階〉

[補題 5.1] 補題 4.2 が成立しないとすれば、ある定数 $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在して、

$$F_k(t) \in Z(\bar{\varepsilon}, k, t) \text{ a.e. } t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (23)$$

$$Q \in N(Wq(\bar{x}(t_i)), \bar{\varepsilon}) \quad (24)$$

なる可測関数 $F_k: [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{m+1})$ ($k=1, 2, \dots, l$), $Q \in \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{m+1})$ のすべてに対し

$$N((-1, 0, \dots, 0)^T, \bar{\varepsilon}) \in \text{int. } K(F, Q) \quad (25)$$

である。

(証明) いま補題の定数 $\bar{\varepsilon}$ が存在しないと仮定する。そのとき $k=1, 2, \dots, l$ に対して

$$N((-1, 0, \dots, 0), i^{-1}) \in \text{int. } K(F_i, Q_i) \quad (26)$$

$$F_{k,i}(t) \in Z(i^{-1}, k, t) \text{ a.e. } t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (27)$$

$$Q_i \in N(Wq(\bar{x}(t_i)), i^{-1}) \quad (28)$$

なる無限列 $\{F_{k,i}\}_{i=1}^\infty$, $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$ を選ぶことができる。

ただし $F_i = (F_{1,i}, F_{2,i}, \dots, F_{l,i})$ である。

まず初めに関数列 $\{F_{k,i}\}_{i=1}^\infty$ について考察する。 $F_{k,i}(t)$ を用いて (13) 式より得られる関数列 $\{\Phi_{k,i}\}_{i=1}^\infty$ は同程度連続かつ有界である。よって Ascoli-Arzelà の定理¹²⁾により

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{k,i_j}(t) = \bar{\Phi}_k(t) \quad (\text{一様収束}) \quad (29)$$

なる部分列 $\{\Phi_{k,i_j}\}_{j=1}^\infty$ と絶対連続関数 $\bar{\Phi}_k(t)$ が存在する。ただし $\Phi_1(t_0) = I$, $\Phi_k(t_{k-1}) = [I + D(t_{k-1})]\Phi_{k-1}(t_{k-1})$ ($k=2, 3, \dots, l$) である。ここで文献 8) の lemma 5 と Filippov-Castaing の定理¹³⁾を用いると

$$\dot{\bar{\Phi}}_k(t) = \bar{F}_k(t)\bar{\Phi}_k(t) \text{ a.e. } t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (30)$$

$$\bar{F}_k(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} Z(\varepsilon, k, t) \quad (31)$$

なる可測関数 $\bar{F}_k(t)$ の存在が示される。

$\{Q_i\}_{i=1}^\infty$ についてはつぎのことがいえる。 $Wq(\bar{x}(t_i))$ は $\mathcal{L}(R^{n+1}, R^{m+1})$ において相対コンパクト集合であるから

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Q_{i_j} = \bar{Q} \quad (32)$$

なる部分列 $\{Q_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ と $\bar{Q} \in \mathcal{L}(R^{n+1}, R^{m+1})$ が存在する。

以上により (26) 式の極限移行から次式を得る。

$$(-1, 0, \dots, 0)^T \in \text{int. } K(\bar{F}, \bar{Q}) \quad (33)$$

この結果は補題 4.2 が成立することを示しており矛盾である。よって補題 5.1 は証明された。

〈第 2 段階〉 初めに分割領域 X_1 について考察する。

X_1 における状態方程式が全空間で成り立つとする。そのとき X_1 の最適解 $\bar{x}(t) (t \in [t_0, t_1])$ は文献 13) の定理 II-4.1 により適当な区間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ に延長できる。すなわち、

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u_1(t)) \quad (34)$$

を満足する解 $x_1(t)$ が $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ 上で存在する。ただし $x_1(t) = \bar{x}(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) であり、 $\bar{t}_0 < t_0$, $t_1 < \bar{t}_1$ とする。ここで補題 5.1 と仮定 (iv) により得られる関数列 $\{h_i\}_{i=1}^\infty$ ($k=1, 2, \dots, l$) を用いて変動軌道 $x\{t; \eta_1\}$ をつぎのように構成する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), v_i), \quad t \in [\tau_i - \eta_i, \tau_i] \\ \dot{x}(t) &= h_i(x(t), t), \quad t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \setminus \bigcup_{i=1}^l [\tau_i - \eta_i, \tau_i] \\ x(t_0) &= \bar{x}(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここに、 $(\cdot) \setminus (\cdot)$ は差集合、 τ_i は $u_1(t)$ の連続点、 $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{s_1} < t_1$, $\eta_1 = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{s_1})$, $\eta_i \geq 0$, $v_i \in U_1$, $i=1, 2, \dots, s_1$, $s_1 \in \{1, 2, \dots\}$ とする。ところで、 $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ 上における変動軌道 $x\{t; \eta_1\}$ の存在は、 j^{-1} , η_i が十分に小さいならば文献 14) の Theorem A により保証される。

いま、 $0 \leq l_i \leq L$, $\zeta = (\varepsilon l_1 + \eta_1, \varepsilon l_2 + \eta_2, \dots, \varepsilon l_{s_1} + \eta_{s_1})$ を用いて新たに変動軌道 $x\{t; \zeta_1\}$ を構成する。そのときつぎの関係式を得る。

任意の $\delta > 0$ に対しつぎのような j_1^0, η_1^0, l_1^0 が存在する。すなわち任意の $j \geq j_1^0$ に対して L_1^j が存在し

$$\left| \frac{x\{t; \zeta_1\} - x\{t; \eta_1\}}{\varepsilon} - \Phi_i(t) \sum_{i=1}^{s_1} [\Phi_i(\tau_i)]^{-1} \Delta f(\tau_i) l_i \right| < \delta \quad (t \in [\tau_{s_1}, \bar{t}_1], 0 \leq \eta_i \leq \eta_i^0, 0 \leq \varepsilon l_i \leq L_i^j, 0 \leq \varepsilon l_i + \eta_i \leq l_i^0, i=1, 2, \dots, s_1) \quad (36)$$

である。ここに $\Phi_i(t)$ は (13) 式において $F_1(t) = \partial h\{x\{t; \eta_1\}, t\} / \partial x$, 時間区間を $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ として得られた解である。

つぎに、超曲面 $g_1(x) = 0$ を横切り分割領域を X_1 から X_2 へ通過する際の変動軌道の性質を検討する。ここで仮定 (ii) により $g_1(x) = 0$ を 1 回のみ通過する変動軌道が構成できることを注意しておく。

さて、 $x_i^j(t; \eta_1)$, $x_i^j(t; \zeta_1)$ が $g_1(x)=0$ を通過する時刻をそれぞれ t_θ , t_ε として $t_m = \min\{t_\theta, t_\varepsilon\}$, $t_M = \max\{t_\theta, t_\varepsilon\}$ とおく。 X_1 において $x_i^j(t; \eta_1)$ を構成した場合と同様の手法によって、延長された解軌道 $x_2(t)$ ($t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$) の近傍に変動軌道 $x_2^j(t; \eta_2)$, $x_2^j(t; \zeta_2)$ を構成する。ここに、 $x_2^j(t_\theta, \eta_2) = x_2^j(t_\theta, \eta_1)$, $x_2^j(t_\varepsilon, \zeta_2) = x_2^j(t_\varepsilon, \zeta_1)$, $\eta_2 = (\eta_{s_1+1}, \eta_{s_1+2}, \dots, \eta_{s_2})$, $\zeta_2 = (\varepsilon l_{s_1+1} + \eta_{s_1+1}, \varepsilon l_{s_1+2} + \eta_{s_1+2}, \dots, \varepsilon l_{s_2} + \eta_{s_2})$, $\bar{t}_1 < t_1 < \tau_{s_1+1} < \dots < \tau_{s_2} < \bar{t}_2$, τ_i は $u_2(t)$ の連続点, $\eta_i \geq 0$, $0 \leq l_i \leq L$, $v_i \in U_2$, $i = s_1+1, s_1+2, \dots, s_2$, $s_2 \in \{s_1+1, s_1+2, \dots\}$ である。

$x_2^j(t; \eta_2)$ と $x_2^j(t; \zeta_2)$ の関係を検討する。ただし表記の簡単化のためそれぞれを $\hat{x}_2^j(t)$, $\hat{x}_2^j(t)$ と表わし、 $x_i^j(t; \eta_1)$, $x_i^j(t; \zeta_1)$ をそれぞれ $\hat{x}_1^j(t)$, $\hat{x}_1^j(t)$ と表わす。

$\hat{x}_2^j$, $\hat{x}_2^j$ に関してつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} & [\hat{x}_2^j(t) - \hat{x}_2^j(t)]/\varepsilon = [\hat{x}_1^j(t_m) - \hat{x}_1^j(t_m)]/\varepsilon \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_m}^{t_\theta} [h_2^j(x_2^j(\tau), \tau) - h_2^j(x_1^j(\tau), \tau)] d\tau \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_\theta}^{t_\varepsilon} [h_2^j(\hat{x}_1^j(\tau), \tau) - h_2^j(\hat{x}_2^j(\tau), \tau)] d\tau \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_\varepsilon}^t [h_2^j(\hat{x}_2^j(\tau), \tau) - h_2^j(\hat{x}_2^j(\tau), \tau)] d\tau \\ & (t \in [t_M, \tau_{s_1+1} - (\varepsilon l_{s_1+1} + \eta_{s_1+1})]) \end{aligned} \quad (37)$$

(37)式において右辺第1項から第4項までをそれぞれ A, B, C, D と記し $G = \Phi_i^j(t_1) \Sigma_{i=1}^{s_1} [\Phi_i^j(\tau_i)]^{-1} \Delta f(\tau_i, t_i)$ とするとき、任意の $\delta > 0$ に対しつぎのような j_2^0, l_2^0, η_2^0 が存在する。すなわち $j \geq j_2^0$ に対し L_2^j が存在して次式が成立する。

$$|A - G| \leq \delta \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & |B - [f_2(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1^*)) \\ & - f_1(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1^*))][(\tau_\theta - t_\theta)/\varepsilon]| \leq \delta \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & |C - [f_1(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1^*)) \\ & - f_2(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1^*))][(\tau_M - t_\theta)/\varepsilon]| < \delta \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \left| D - \int_{t_1}^t \left[\frac{\partial h_2^j(\hat{x}_2^j(\tau), \tau)}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\hat{x}_2^j(\tau) - \hat{x}_2^j(\tau)}{\varepsilon} \right] d\tau \right| \leq \delta \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、 $t \in [t_M, \tau_{s_1+1} - (\varepsilon l_{s_1+1} + \eta_{s_1+1})]$, $0 \leq \eta_i \leq \eta_2^0$, $0 \leq \varepsilon l_i \leq L_2^j$, $0 \leq \varepsilon l_i + \eta_i \leq l_2^0$, $i = 1, 2, \dots, s_1$ である。

ところで $[(t_\theta - t_m) + (t_\theta - t_M)]/\varepsilon$ に関しては、任意の $\delta > 0$ に対しつぎのような j_3^0, η_3^0, l_3^0 が存在する。すなわち $j \geq j_3^0$ に対し L_3^j が存在して

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(t_\theta - t_m) + (t_\theta - t_M)}{\varepsilon} - \left[\frac{\partial g_1(\bar{x}(t_1))}{\partial x} \right] G \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\partial g_1(\bar{x}(t_1))}{\partial x} f_1(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1^*)) \right]^{-1} \right| \leq \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (0 \leq \eta_i \leq \eta_3^0, 0 \leq \varepsilon l_i \leq L_3^j, 0 \leq \varepsilon l_i + \eta_i \leq l_3^0, \\ & i = 1, 2, \dots, s_1) \end{aligned} \quad (42)$$

である。よって (37) ~ (42) 式により次式を得る。

任意の $\delta > 0$ に対しつぎのような j_4^0, η_4^0, l_4^0 が存在する。すなわち $j \geq j_4^0$ に対し L_4^j が存在して

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\hat{x}_2^j(t) - \hat{x}_2^j(t)}{\varepsilon} - \Phi_i^j(t) [\Phi_i^j(t_1)]^{-1} G \right| \leq \delta \\ & (t \in [t_M, \tau_{s_1+1} - (\varepsilon l_{s_1+1} + \eta_{s_1+1})], 0 \leq \eta_i \leq \eta_4^0, \\ & 0 \leq \varepsilon l_i \leq L_4^j, 0 \leq \varepsilon l_i + \eta_i \leq l_4^0, i = 1, 2, \dots, s_1) \end{aligned} \quad (43)$$

である。

以上の考察を X_1 から X_l へ繰り返し適用する。 $x_k^j(t; \eta_k)$, $x_k^j(t; \zeta_k)$ ($k=1, 2, \dots, l$) を順次接続して得られる変動軌道を、それぞれ $x^j(t; \eta)$, $x^j(t; \zeta)$ と表わすときつぎの結果を得る。

任意の $\delta > 0$ に対しつぎのような j_5^0, η_5^0, l_5^0 が存在する。すなわち $j \geq j_5^0$ に対し L_5^j が存在して

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x^j(t_1; \zeta) - x^j(t_1; \eta)}{\varepsilon} - \delta x(F^j) \right| \leq \delta \\ & (0 \leq \eta_i \leq \eta_5^0, 0 \leq \varepsilon l_i \leq L_5^j, 0 \leq \varepsilon l_i + \eta_i \leq l_5^0, \\ & i = 1, 2, \dots, s_l) \end{aligned} \quad (44)$$

である。ここに $F^j = (\partial h_1^j(x_1^j(t; \eta_1), t)/\partial x, \partial h_2^j(x_2^j(t; \eta_2), t)/\partial x, \dots, \partial h_l^j(x_l^j(t; \eta_l), t)/\partial x)$ とする。

〈第3段階〉 ラパーの定義により補題5.1の ε に対して $q(x)$ に関するつぎのような1回連続微分可能関数 $M_\alpha(x)$ が存在する。すなわち適当な $\delta > 0$ が存在し、 $x \in N(\bar{x}(t_1), \delta)$ のすべてに対して

- (i) $|M_\alpha(x) - q(x)| \leq \alpha$
- (ii) $\partial M_\alpha(x)/\partial x \in N(Wq(\bar{x}(t_1)), \bar{\varepsilon})$

が任意の $\alpha > 0$ に対して成立する。

このときつぎの補題を得る。

〔補題 5.2〕 適当な $j^* > 0$, $\eta^* > 0$, $L^* > 0$, $s_l \in \{1, 2, \dots\}$ が存在して、 $j \geq j^*$, $\alpha > 0$ に対し

$$(i) \quad M_\alpha^0(x^j(t_1; \eta)) \leq M_\alpha^0(x^j(t_1; \bar{\eta})) - (2L^*)^{-1} \eta^* \quad (45)$$

$$(ii) \quad M_\alpha^1(x^j(t_1; \eta)) = M_\alpha^1(x^j(t_1; \bar{\eta})) \quad (46)$$

を満足する変動軌道 $x^j(t; \eta)$ が存在する。ここに、 $M_\alpha = (M_\alpha^0, M_\alpha^{1T})^T$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{s_l})$, $\bar{\eta} = (0, \dots, 0)$, $0 \leq \eta_i \leq \eta^*$, $i = 1, 2, \dots, s_l$ である。

(証明) いま、(23), (24) 式を満足するすべての対 (F, Q) の集合を A とする。補題5.1により、すべての $A \in A$ に対し

$$z_j \in \text{int. } K(F, Q), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (47)$$

なる $z_j \in R^{m+1}$ が存在する。ただし $z_j = (-1, \bar{z}_j)$, $\bar{z}_j$ は R^m 空間において原点を内点として含む単体の頂点とする。(17), (18) 式より $z_j (j=1, 2, \dots, m+1)$ を与

える $\tau_i^A \in \bar{T} \setminus \bar{T}$, $v_i^A \in V_i$, $l_i^A \in [0, \infty)$ を選ぶことができる。ここに $A \in \mathcal{A}$ であり, τ_i^A , v_i^A は $z_1, z_2, \dots, z_{m+1}$ に共通とする。よって $z_\beta = \sum_{j=1}^m \beta_j z_j$ に対して, $l_i^{\beta, A} = \sum_{j=1}^m \beta_j l_i^j, A$ とおくことにより τ_i^A , v_i^A , $l_i^{\beta, A}$ を得る。ただし $\sum_{j=1}^m \beta_j = 1$, $\beta_j \geq 0$ である。

ところでつぎのような連続関数 $\Phi(t)$ を考える。

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi_1(t), & t \in [t_0, t_1] \\ \Phi_1(t_1) + (t - t_1)[\Phi_2(t_1) - \Phi_1(t_1)], & t \in [t_1, t_1 + 1] \\ \Phi_2(t - 1), & t \in [t_1 + 1, t_2 + 1] \\ \vdots \\ \Phi_l(t - l + 1), & t \in [t_{l-1} + l - 1, t_l + l - 1] \end{cases} \quad (48)$$

このとき補題 5.1 の ε に対して $\{\Phi(t) : F_k(t) \in Z(\varepsilon, k, t) \text{ a.e. } t \in [t_{k-1}, t_k], k=1, 2, \dots, l, N(Wq(\bar{x}(t_i)), \varepsilon)\}$ は相対コンパクトであるから, $\min\{0.5, \delta\}$ に比べて十分に小さな δ_1 に関してつぎのような有限個の $A'_1, A'_2, \dots, A'_\sigma$ を選ぶことができる。ただし δ は $\{z \in R^{m+1} : |z| \leq \delta\} \subset \{z_\beta : \beta_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \beta_j = 1\}$ を満足する。すなわち任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して適当な $A'_\lambda (\lambda \in \{1, 2, \dots, \sigma\})$ が存在し

$$\begin{aligned} & |Q'_\lambda \Phi'_\lambda(t_i) \sum_{j=1}^{s^{A'_\lambda}} [\Phi'_\lambda(\tau_i^{A'_\lambda})]^{-1} \Delta f(\tau_i^{A'_\lambda}) l_i^{\beta, A'_\lambda} \\ & - Q\Phi(t_i) \sum_{j=1}^{s^{A'_\lambda}} [\Phi(\tau_i^{A'_\lambda})]^{-1} \\ & \times \Delta f(\tau_i^{A'_\lambda}) l_i^{\beta, A'_\lambda}| \leq \delta_1/5 \end{aligned} \quad (49)$$

である。 $\Phi'_\lambda(t)$ は (13) 式において $F = F'_\lambda$ とした解で, $A'_\lambda = (F'_\lambda, Q'_\lambda)$ である。

ここで $\tau_i^{A'_j}$, $v_i^{A'_j}$, $l_i^{\beta, A'_j} (i=1, 2, \dots, s^{A'_j}, j=1, 2, \dots, \sigma)$ を整理してそれぞれを $\tau'_i, v'_i, l'_i (i=1, 2, \dots, s_i, \tau'_i \leq \tau'_2 \leq \dots \leq \tau'_{s_i})$ と表わす。ところで τ'_i は $\bar{u}(t)$ の連続点であるから, δ_1 に対し適当に τ'_i を微小変動させることによりすべての $A \in \mathcal{A}$ に対し次式が成立するように $\tau_i(\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{s_i})$ を選ぶことができる。

$$\begin{aligned} & |Q| |\Phi(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi(\tau'_i)]^{-1} \Delta f(\tau'_i) l'_i \\ & - \Phi(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi(\tau_i)]^{-1} \Delta f(\tau_i) l_i^{\beta}| \leq \delta_1/5 \end{aligned} \quad (50)$$

つぎに, $\tau_i, v_i, l_i^{\beta}, \eta_i, h_i^{\beta}(x, t), M_\alpha(x)$ を用いて第 2 段階の手法により変動軌道 $x^j(t; \eta)$, $x^j(t; \zeta)$ を構成する。このときつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{M_\alpha(x^j(t_i; \zeta)) - M_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\varepsilon} - z_\beta \\ & = [Q'_\lambda \Phi'_\lambda(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi'_\lambda(\tau'_i)]^{-1} \Delta f(\tau'_i) l'_i - z_\beta] \\ & + \left[\frac{\partial M_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\partial x} \Phi^j(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi^j(\tau'_i)]^{-1} \Delta f(\tau'_i) l'_i \right. \\ & \left. - Q'_\lambda \Phi'_\lambda(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi'_\lambda(\tau'_i)]^{-1} \Delta f(\tau'_i) l'_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial M_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\partial x} \left[\Phi^j(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi^j(\tau_i)]^{-1} \Delta f(\tau_i) l_i^{\beta} \right. \\ & \left. - \Phi^j(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi^j(\tau'_i)]^{-1} \Delta f(\tau'_i) l'_i \right] \\ & + \frac{\partial M_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\partial x} \left[\frac{x^j(t_i; \zeta) - x^j(t; \eta)}{\varepsilon} \right. \\ & \left. - \Phi^j(t_i) \sum_{j=1}^{s_i} [\Phi^j(\tau_i)]^{-1} \Delta f(\tau_i) l_i^{\beta} \right] \\ & + \left[\frac{M_\alpha(x^j(t_i; \zeta)) - M_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\varepsilon} \right. \\ & \left. - \frac{\partial M_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\partial x} \frac{x^j(t_i; \zeta) - x^j(t_i; \eta)}{\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

いま (51) 式を A と記すとき, (44), (49), (50) 式より δ_1 に対してつぎのような j^*, η^*, l^*, s_i が存在する。すなわち $j \geq j^*, \alpha > 0$ に対して $L^*_{j, \alpha}$ が存在し $|A| \leq \delta_1 (0 \leq \eta_i \leq \eta^*, 0 \leq \varepsilon l_i^{\beta} \leq L^*_{j, \alpha}, 0 \leq \varepsilon l_i^{\beta} + \eta_i \leq l^*, i=1, 2, \dots, s_i)$ である。ただし $\tilde{l}_i^{\beta}$ は, j, α, η_i に関する l_i^{β, A^*} 以外は零とおいた l_i^{β} を意味する。よってつぎの結果を得る。

$$\left| \frac{M^0_\alpha(x^j(t_i; \zeta)) - M^0_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\varepsilon} - (-1) \right| \leq \delta_1 \quad (52)$$

$$\left| \frac{M^1_\alpha(x^j(t_i; \zeta)) - M^1_\alpha(x^j(t_i; \eta))}{\varepsilon} - z_\beta \right| \leq \delta_1 \quad (53)$$

さて, $\eta = (0, \dots, 0)$ において (52), (53) 式を満足する ζ_1 を求める。このとき (53) 式では Brouwer の不動点定理¹²⁾ を用いる。つぎに $\eta = \zeta_1$ において再び (52), (53) 式を満足する新たな ζ_2 を求める。この手順を有限回繰り返すことにより結局補題 5.2 を得る。ただし $L^* = \max\{l_i^{\beta} : \beta_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \beta_j z_j = 1, i=1, 2, \dots, s_i\}$ とする。以上で補題 5.2 が証明された。

補題 5.2 において $\alpha = j^{-1}$ のもとに $j \rightarrow \infty$ とすることによりつぎの結果を得る。

$$x^0(t_i; \bar{\eta}) \leq x^0(t_i) - (2L^*)^{-1} \eta^* \quad (54)$$

$$q(x(t_i; \bar{\eta})) = q(\bar{x}(t_i)) \quad (55)$$

ただし, $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{s_i})$, $0 \leq \bar{\eta}_i \leq \eta^*$ である。

この結果は最適軌道 $\bar{x}(t)$ よりも変動軌道 $x(t; \bar{\eta})$ のほうが評価関数値が小さいことを示している。これは矛盾である。したがって補題 4.2 が証明された。

6. おわりに

微分可能性を仮定しない場合の不連続最適制御問題に対し, 微係数を拡張した新たな概念 (ラパーと名付けた) を用いて従来の結果よりも一般的な最大原理形式の必要条件を導出した。

文献 9) と証明方針は基本的には同じであるが, Warga は “convex mapping” theorem を用いているのに対し本論文では必要条件の証明過程でよく利用される Brouwer の不動点定理を用いている点, さらに最適軌道の超曲面通過を考慮している点などが異なる。

微係数が存在する場合その微係数をラパーとして選ぶならば増淵ら⁴⁾と本質的には同じ必要条件となるが, 本結果では随伴ベクトルの跳躍量が具体的に得られているため数値解法の立場にたつとき扱いやすい形となっている。実際, 文献 15) では本結果に基づいた数値解法アルゴリズムを提案してその実用性を確認している。

Velichenko¹⁶⁾ は随伴ベクトルの跳躍量を算出しているが詳細には議論していない。

参 考 文 献

- 1) 嘉納：不連続最適制御問題, 日本機械学会誌, **72**-607, 1034/1042 (1969)
- 2) ポントリャーギン, そのほか：最適過程の数学的理論, 総合図書 (1967)
- 3) Berkovitz: Variational Methods in Problems of Control and Programming, J. of Math. Anal. Appl., **3**, 154/169 (1961)
- 4) 増淵, 嘉納：系の拘束条件と評価関数が断片的に異なる最適制御について, 日本機械学会講演論文集, **191**, 53/56 (1968)
- 5) 市川, 田村：不連続性のある最適問題, 日本機械学会論文集, **37**-294, 286/293 (1971)
- 6) D. G. Luenberger: Control Problems with Kinks, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-15**-5, 570/575 (1970)
- 7) D. P. Bertsekas and S. K. Mitter: A Descent for Optimization Problems with Non-Differentiable Cost Functionals, SIAM J. on Control, **11**-4, 637/652 (1973)
- 8) F. H. Clarke: The Maximum Principle under Minimal Hypotheses, SIAM J. on Control and Optimization, **14**-6, 1078/1091 (1976)
- 9) J. Warga: Controllability and Necessary Conditions in Unilateral Problems without Differentiability Assumptions, SIAM J. on Control and Optimization, **14**-3, 546/573 (1976)
- 10) H. Halkin: Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Differentiable or Nondifferentiable Data, Mathematical Control Theory (W. A. Coppel ed.), Lecture Notes in Mathematics, **680**, 77/118, Springer-Verlag (1978)
- 11) H. Halkin: Mathematical Programming without Differentiability, Calculus of Variations and Control Theory (D. L. Russell ed.), 279/287, Academic Press (1976)
- 12) 日本数学会編集：岩波数学辞典 (第 2 版), 317, 岩波書店 (1975)
- 13) J. Warga: Optimal Control of Differential and Functional Equations, Academic Press (1972)
- 14) K. Makowski and L. W. Neustadt: Optimal Control Problems with Mixed-Control-Phase Variable Equality and Inequality Constraints, SIAM J. on Control, **12**-2, 184/228 (1974)
- 15) 井前, 箱守：強変分を用いた不連続最適制御問題の数値解法 (投稿中)
- 16) V. V. Velichenko: Optimal Control Problems for Equations with Discontinuous Right-Hand Sides, Automation and Remote Control, **27**-7, 20/30 (1966)