一方向性むだ時間系に対する離散形 最適レギュレータ問題の解法[†]

藤 中 透*・荒 木 光 彦*

Discrete-Time Optimal Control of Unilateral Time Delay Systems

Toru FUJINAKA* and Mitsuhiro ARAKI*

The optimal regulator problem of discrete-time systems which contain unilateral time delays is considered. Such systems appear when industrial plants with unilateral flow of materials are sampled. If the time delays are large compared with the sampling period, the computation to obtain the optimal law becomes very difficult due to the large dimensionality of the Riccati equation.

In this paper a method to reduce such computational difficulties is presented. First, the optimal regulator problem is solved for a smaller size imaginary system which is obtained by eliminating the time delays of the actual system. Then, the solution is substituted into the formula which yield the solution of the actual system with time delays. The method is applicable to systems with multiple time delays along the signal flow.

Keyword: time delay, discrete-time system, optimal control, Riccati equation, simplified algorithm

1. ま え が き

離散形最適レギュレータを設計する場合のリカッチ方程式の解法としては、固有値、固有ベクトルを用いる方法および繰り返し法がよく知られている¹⁾。しかし、これらの方法をむだ時間系に対して適用すると、推移行列が非正則となること、および推移行列の次数がむだ時間の段数とともに増加することのために計算上の困難がかなり大きくなる。

ところで、プラントのモデルにむだ時間が含まれる主な原因としてつぎの二つが考えられよう。

(a) 複雑な応答を「むだ時間+低次要素」の形で近似した。

(b) プラント中の「物」の流れに伴って必然的にむだ時間が現れた。

後者の場合にはむだ時間が信号経路に直列に配置される構造 (Fig. 1 参照) になることが多いと考えられる。このような系を一方方向性むだ時間系と呼ぶことにしよう。当論文は一方方向性むだ時間系の離散形最適レギュレータ問題の解法を考察したものである。すなわち、この場合にはむだ時間を除いた部分に対するリカッチ方程式の解を用いてむだ時間系全体に対するリカッチ方程式の解を得ることができることを示す。

むだ時間が制御入力のみに含まれる場合についてはすでに Hammarström ら²⁾ や美多³⁾ が同様の結果を報告しているが、当論文の結果はむだ時間が分散した系にまで適用できるものである。なお、Fig. 1 の形の系は等価変換によって制御入力のみにむだ時間を含む系に変換できるが、そのような変換を行うと評価関数の形が複雑となり、Hammarström や美多の方法をそのまま使うことはできない (第4章の例参照)。

2. むだ時間系に対する最適レギュレータ問題

Fig. 1 に示す系を考える。むだ時間を含まない部分 S_j が

$$\left. \begin{aligned} x_{c_j}(k+1) &= A_{c_j}x_{c_j}(k) + B_{c_j}u_{c_j}(k) \\ y_{c_j}(k) &= C_{c_j}x_{c_j}(k) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$x_{c_j} \in R^{n_j}, u_{c_j} \in R^{m_{j-1}}, y_{c_j} \in R^{m_j} \quad (j=1, \dots, p)$$

で与えられるとする。むだ時間部分 $\mathcal{D}_j$ は、むだ時間の長さを l_j 段とすると、

$$\left. \begin{aligned} x_{d_j}(k+1) &= A_{d_j}x_{d_j}(k) + B_{d_j}u_{d_j}(k) \\ y_{d_j}(k) &= C_{d_j}x_{d_j}(k) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$x_{d_j} \in R^{m_j l_j}, u_{d_j} \in R^{m_j}, y_{d_j} \in R^{m_j}$$

ただし、

$$A_{d_j} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_j} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{d_j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_{m_j} \end{bmatrix},$$

[†] 第12回制御理論シンポジウムで発表 (昭 58・5)

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto (Received August 22, 1983)

(Revised November 29, 1983)

Fig. 1 System S with time delays

$$Cd_j = [Im_j \quad 0 \cdots 0]$$

$$Im_j: m_j \text{ 次単位行列 } (j=0, 1, \dots, p) \quad (3)$$

である。Fig. 1 のシステムは、上の S_j と D_j が交互に、

$$uc_j(k) = y_{d_{j-1}}(k), \quad ud_j(k) = y_{c_j}(k) \quad (j=1, \dots, p)$$

という関係で連結されたものである。したがって、全体の系 S に対する状態方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_{d_p}(k) \\ x_{c_p}(k) \\ \vdots \\ x_{d_1}(k) \\ x_{c_1}(k) \\ x_{d_0}(k) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} Ad_p & Bd_p C_{c_p} & & & 0 \\ & Ac_p & Bc_p C_{d_{p-1}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & Ad_1 & Bd_1 C_{c_1} \\ & & & & Ac_1 & Bc_1 C_{d_0} \\ & & & & & Ad_0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Bd_0 \end{bmatrix}, \quad C = [Cd_p \quad 0 \cdots 0] \quad (5)$$

$$x \in R^n, \quad u \in R^{m_0}, \quad y \in R^{m_p}$$

$$n = \sum_{j=1}^p n_j + \sum_{j=0}^p m_j l_j \quad (6)$$

この系に対する評価関数を

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\} \quad (7)$$

$$Q \geq 0, \quad R > 0$$

$$Q = \text{block diag} [Q_{d_p}, Q_{c_p}, \dots, Q_{d_1}, Q_{c_1}, Q_{d_0}] \quad (8)$$

$$Q_{d_j} = \text{block diag} [Q_{d_{j1}}, \dots, Q_{d_{j l_j}}] \quad (9)$$

$$Q_{d_{j1}}, \dots, Q_{d_{j l_j}}: m_j \text{ 次対角行列 } (j=0, 1, \dots, p)$$

とすると、 J を最小とする制御入力 $u^*(k)$ はリカッチ方程式

$$P = A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q \quad (10)$$

の半正定解 P を用いて

$$u^*(k) = -F x(k) \quad (11)$$

$$F = (B^T P B + R)^{-1} B^T P A \quad (12)$$

Fig. 2 Imaginary system $\tilde{S}$

で与えられ、 J の最小値 J^* は

$$J^* = x^T(0) P x(0) \quad (13)$$

となる⁴⁾。

ここで、次章の準備として Fig. 2 に示すような、むだ時間を取り除いた仮想的な系 $\tilde{S}$

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{B} \bar{u}(k) \quad (14)$$

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_p(k) \\ \bar{x}_2(k) \\ \vdots \\ \bar{x}_1(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} Ac_p & Bc_p C_{c_{p-1}} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & Ac_2 & Bc_2 C_{c_1} \\ & & & Ac_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Bc_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{x} \in R^{\bar{n}}, \quad \bar{u} \in R^{\bar{m}}, \quad \bar{x}_j \in R^{n_j} \quad (j=1, \dots, p)$$

$$\bar{n} = \sum_{j=1}^p n_j \quad (16)$$

を考え、評価関数を

$$\bar{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\bar{x}^T(k) \bar{Q} \bar{x}(k) + \bar{u}^T(k) \bar{R} \bar{u}(k)\} \quad (17)$$

$$\bar{Q} = \text{block diag} [\bar{Q}_p, \dots, \bar{Q}_1] \quad (18)$$

$$\bar{Q}_j = Q_{c_j} + C_{c_j}^T \bar{Q}_j C_{c_j} \quad (19)$$

$$\bar{R} = R + Q_{d_0} \quad (20)$$

$$\bar{Q}_{d_j} = Q_{d_{j1}} + \cdots + Q_{d_{j l_j}} \quad (j=0, 1, \dots, p) \quad (21)$$

と設定する。 $\bar{J}$ を最小とする制御入力 $\bar{u}^*(k)$ はリカッチ方程式

$$\bar{P} = \bar{A}^T \bar{P} \bar{A} - \bar{A}^T \bar{P} \bar{B} (\bar{B}^T \bar{P} \bar{B} + \bar{R})^{-1} \bar{B}^T \bar{P} \bar{A} + \bar{Q} \quad (22)$$

の半正定解 $\bar{P}$ を用いて

$$\bar{u}^*(k) = -\bar{F} \bar{x}(k) \quad (23)$$

$$\bar{F} = (\bar{B}^T \bar{P} \bar{B} + \bar{R})^{-1} \bar{B}^T \bar{P} \bar{A} \quad (24)$$

で与えられ、 $\bar{J}$ の最小値 $\bar{J}^*$ は

$$\bar{J}^* = \bar{x}^T(0) \bar{P} \bar{x}(0) \quad (25)$$

となる。

3. 主な結果

前章で述べた P と $\bar{P}$, F と $\bar{F}$ の間につぎの関係が成立する。

《定理》 整数 $\bar{l}_j$ を

列 $\bar{Q}_j$, $\bar{R}$ を定義する (19), (20) 式, および Q_d を定義する (27)~(29) 式を用いている.

さて, K は実際の系 $\mathcal{S}$ の初期値 $x(0)$ で定まり, 制御入力 $u(k)$ には無関係であるから, $\bar{J}$ を最小にする $\bar{u}^*(k)$ が同時に J を最小にする $u^*(k)$ となる. すなわち,

$$J^* = \bar{J}^* + K \quad (43)$$

$$u^*(k) = \bar{u}^*(k) \quad (44)$$

評価関数の最小値を与える (13), (25) 式を (43) 式に代入し, (33), (42) 式を用いると

$$\begin{aligned} x^T(0)Px(0) &= x^T(0)T^T\bar{P}Tx(0) \\ &+ x^T(0)\left\{\sum_{j=1}^p \sum_{i=0}^{l_j-1} (T_j A^i)^T \bar{Q}_j (T_j A^i)\right\} x(0) \\ &+ x^T(0)Q_d x(0) \end{aligned} \quad (45)$$

となるから, これより (30) 式の関係が得られる. また, (32), (34) 式および (26) 式より

$$\bar{x}(k) = Tx(k) \quad (46)$$

であるから, 最適制御則を与える (11), (23) 式を (44) 式に代入して (46) 式を用いると

$$-Fx(k) = -\bar{F}Tx(k) \quad (47)$$

となって (31) 式の関係が得られる. (証明終)

上記の結果を用いると, 仮想系 $\bar{\mathcal{S}}$ に対するリカッチ方程式 (22) を解いて $\bar{P}$ および $\bar{F}$ を求めれば, (30), (31) 式によって実際の系 $\mathcal{S}$ に対するリカッチ方程式 (10) の解 P および最適フィードバックゲイン F を得ることができる.

4. 数 値 例

Fig. 1 で $p=2$ の場合を考える. $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ の係数行列を

$$A_{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{e_1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad C_{e_1} = [1 \quad 1] \quad (48)$$

$$A_{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad C_{e_2} = [1 \quad 1] \quad (49)$$

とし, むだ時間部分 $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ ($\mathcal{D}_2$ は存在しないものとする) について

$$m_0 = m_1 = m_2 = 1, \quad l_0 = 3, \quad l_1 = 2 \quad (l_2 = 0) \quad (50)$$

とする. 評価関数 J の重み行列を

$$\begin{aligned} Q &= I \\ R &= [1] \end{aligned} \quad (51)$$

と選ぶと, 第3章の Q_{e_j} , Q_{d_j} などは

$$Q_{e_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{d_1} = \begin{bmatrix} Q_{d_{11}} & 0 \\ 0 & Q_{d_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{d_0} = \begin{bmatrix} Q_{d_{01}} & 0 \\ 0 & Q_{d_{02}} \\ 0 & Q_{d_{03}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. 全体の系 $\mathcal{S}$ の係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{4}{5} & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{4}{3} \\ & & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 0 \dots\dots\dots 0] \quad (52)$$

となるから, むだ時間を取り除いた仮想系 $\bar{\mathcal{S}}$ の係数行列は (48), (49) 式より

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (53)$$

で与えられる. また,

$$\bar{Q}_{d_1} = [2], \quad \bar{Q}_{d_0} = [3] \quad (54)$$

$$\bar{Q}_2 = Q_{e_2} = I, \quad \bar{Q}_1 = Q_{e_1} + C_{e_1}^T \bar{Q}_{d_1} C_{e_1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

となるから, 評価関数 $\bar{J}$ の重み行列は

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = [4] \quad (56)$$

Table 1 $\bar{P}$ and $\bar{F}$ for the imaginary system $\bar{\mathcal{S}}$

$\bar{P}$			
2.248311	-0.001107	1.642283	2.019821
-0.001107	1.333145	0.473136	0.420468
1.642283	0.473136	6.130037	5.812060
2.019821	0.420468	5.812060	8.143598
$\bar{F}$			
0.043344	0.004031	0.040515	0.231135

Table 2 P and F for the actual system S

P								
2.283608	0.000008	1.369195	1.025549	0.943551	1.220731	0.269640	0.189635	0.119455
0.000008	1.333333	0.533342	-0.266654	0.118541	0.106723	0.007971	-0.003831	0.002195
1.369195	0.533342	3.313821	0.667272	1.196120	1.472869	0.300370	0.196147	0.130930
1.025549	-0.266654	0.667272	4.311853	0.962610	1.394638	0.357981	0.281963	0.162870
0.943551	0.118541	1.196120	0.962610	6.171979	5.980355	0.491492	0.446320	0.331109
1.220731	0.106723	1.472869	1.394638	5.980355	8.886275	2.462549	1.504441	0.880850
0.269640	0.007971	0.300370	0.357981	0.491492	2.462549	6.445061	2.525029	1.224532
0.189635	-0.003831	0.196147	0.281963	0.446320	1.504441	2.525029	7.272910	2.213801
0.119455	0.002195	0.130930	0.162870	0.331109	0.880850	1.224532	2.213801	7.710249
F								
0.010286	-0.000126	0.010770	0.015032	0.028202	0.069263	0.084152	0.140585	0.254161

で与えられる。仮想系 $\tilde{S}$ に対するリカッチ方程式の解 $\tilde{P}$ および最適ゲイン $\tilde{F}$ を求めると, Table 1 に示すとおりである。ここで

$$T = \begin{bmatrix} T_2 A^5 \\ T_1 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{243}{1024} & 0 & \frac{81}{320} & \frac{27}{80} & \frac{13}{20} & \frac{19}{20} & \frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{64} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\tilde{Q}_d = \text{diag}(1, 2), \quad \tilde{Q}_a = \text{diag}(1, 2, 3) \quad (58)$$

$$Q_d = \text{diag}(0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 3) \quad (59)$$

であるから, 前章の結果を用いて実際の系 S に対するリカッチ方程式の解 P および最適ゲイン F を求めると, Table 2 に示す値を得る。これは, 実際の系 S に対するリカッチ方程式を直接解いて得られる値と一致している。計算時間の比較の目安として上記の例の場合を示すと,

実際の系 S に対するリカッチ方程式の求解: 137 ms

仮想系 $\tilde{S}$ に対するリカッチ方程式の求解: 16 ms

$\tilde{P}, \tilde{F}$ から P, F を求める計算: 7 ms

である。使用した計算機は京都大学大型計算機センタの M 382 システムであり, リカッチ方程式の求解には繰り返し法を用いている。

以上で最適解が求められたわけであるが, 入力側にむだ時間が集中するようにシステムを等価変換すると, 重み行列の形が複雑になり, Hammarström²⁾ や美多³⁾ の方法を直接適用することができないことを確認しておこう。変換行列 $\tilde{T}^{-1}$ を

$$\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & -4 & 0 & 0 & & & \\ & & -1 & 4 & 0 & 0 & & & \\ & & \frac{3}{8} & -\frac{9}{4} & 3 & 3 & & & \\ & & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

と選んで

$$x = \tilde{T} \tilde{x} \quad (61)$$

なる相似変換を行うと, 係数行列が

$$\tilde{A} = \tilde{T}^{-1} A \tilde{T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & & & & & \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & & & & & \\ & & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{4}{3} & & & & \\ & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \tilde{T}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

となり、むだ時間が入力側に集中した形となる。しかしながら、この変換によって評価関数が

$$\tilde{Q} = \tilde{T}^T Q \tilde{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \frac{273}{256} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{21}{16} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \hline & & -\frac{1}{48} & \frac{1}{6} & \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ & & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{32}{9} \\ 0 & & & & & \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \end{bmatrix} \quad (63)$$

となる。(63)式の破線で囲んだ部分の外側に0でない要素が含まれるので、文献2),3)の解法をそのまま適用することができない(注1)。上記の例では実際の系 S のむだ時間部分にも対角行列で重みを設定しているが、これを0とした場合でも相似変換を行えば(63)式と同様、 $\tilde{Q}$ の非対角ブロックに0でない要素が現れる。

実際、上の例で

$$Q_{c_2} = I, Q_{d_1} = O, Q_{c_1} = I, Q_{d_2} = O$$

において $\tilde{Q}$ を求めてみると

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \frac{1}{256} & 0 & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{12} \\ & & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ & & -\frac{1}{48} & \frac{1}{6} & \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ & & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{32}{9} \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(注1) 文献2),3)の方法は、評価関数が、集中定数部分の状態変数と入力(時間遅れなし)のみで与えられていることを前提としている。

となる。

5. あとがき

信号経路に直列にむだ時間が含まれる離散時間系に対する最適レギュレータ問題の解法として、むだ時間を取り除いた次数の系に対するリカッチ方程式の解から全体の解を得る方法を示した。これによって、解くべき方程式のサイズが $n \times n$ から $\bar{n} \times \bar{n}$ に減少し、計算時間および計算精度を大幅に改善できる。ちなみに、

$$n = \bar{n} + \sum_{j=1}^p m_j l_j \quad (64)$$

(l_j はむだ時間の段数、 m_j は一方方向に伝達される信号ベクトルの次元)である。ただし、最終結果を得るためには変換行列を使った計算(具体的には(26), (30), (31)式の計算)が必要となるから計算時間、計算精度はこの段階をも含めて考えなければならない。むだ時間があまり大きくない数値例で計算を行った結果、計算時間は直接解法に対して約5倍改善され、精度は両者ともほとんど問題にならなかった。むだ時間が大きい場合には両者の差はもう少し開き、非常に大きい場合には直接解法が記憶領域の制約などのため実行不能となるものと思われる。なお、ここで報告した結果はむだ時間が入力のみ、あるいは出力のみに集中した場合の結果^{2),3)}を含むものである。

参 考 文 献

- 1) P. Dorato: Optimal Linear Regulators: The Discrete-Time Case, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-6**, 613/620 (1971)
- 2) L. G. Hammarström and K. S. Gros: Adaptation of Optimal Control Theory to Systems with Time Delays, International J. of Control, **32-2**, 329/357 (1980)
- 3) 美多: Lサンプルの制御遅れをもつディジタル最適レギュレータとその特性, 計測自動制御学会論文集, **19-2**, 176/178 (1983)
- 4) R. Isermann: Digital Control Systems, 135/142, Springer-Verlag (1981)