分散制御系の固定モードの存在条件†

—サブシステムの状態が観測できる場合—

吉川 恒夫*・岩崎 隆至**

Existence Condition for Fixed Modes of Decentralized Control Systems

—Case of Subsystem-State Observation—

Tsuneo YOSHIKAWA* and Takashi IWASAKI**

1. はじめに

分散制御による安定化・極配置の研究は、近年活発に行われているが^{1)~7)}、それらの研究には、大きく分けて二つの方向がある。

一つの方法は線形システム理論を用いて分散制御を考えようとするものであり、重要な結果の一つとして固定モードの概念が得られている¹⁾。固定モードとは、集中系の不可制御・不可観測な極の分散系への拡張であり、固定モードがないことが、分散制御によって極配置が可能であるための必要十分条件であることが示された²⁾。

今一つの方法は、分散系の中の各サブシステムの独立性を重視し、非線形系の安定定理を用いて安定化可能なシステムの構造を見つけようというものである。安田らは、この方向により、サブシステムごとの状態が観測できるような分散系を対象として、安定化が可能なサブシステム間の干渉項の構造を求めた³⁾。この結果は、ある条件のもとではサブシステム間の干渉項が非線形であっても各サブシステムの安定度を高めていくことにより全体システムを安定化できるというものであり、これまで得られた分散形安定化の研究の中でも重要なものの一つである。同様な研究はほかにもあるが^{4)~6)}、これらは安田らの結果に含まれると考えられる。

本研究では、上述の二つの方向による結果の間の関係を明らかにすることを目的として、安田らによって

得られた安定化可能な構造の干渉項をもつ分散系には干渉項を線形とした場合、固定モードが存在しないことを示す。

2. 定式化と固定モード存在条件

対象とする分散系は、 ν 個のサブシステムからなり、つぎの状態方程式で記述される。

$$\dot{\mathbf{x}}_i = A_{ii}\mathbf{x}_i + \sum_{j \neq i}^{\nu} A_{ij}\mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i u_i \quad (i=1, 2, \dots, \nu) \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}_i \in R^{n_i}$, $u_i \in R$, $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$, $\mathbf{b}_i \in R^{n_i}$ である。ここで、 n_i は i 番目のサブシステムの次数であり、 $\sum_{i=1}^{\nu} n_i = n$ とする。また、 $(A_{ii}, \mathbf{b}_i)$ は可制御対とし、あらかじめ可制御標準形になっているとする。

ある分散系に対して、分散形の出力フィードバックによって動かすことのできない極のことを、その分散系の固定モードと呼ぶ¹⁾。(1)式の分散系において、固定モードが存在しないための十分条件として、つぎの定理を証明することができる。

《定理》(1)式の行列 A_{ij} の (p, q) 要素を a_{pq}^{ij} と表わす。

このとき、適当に選んだ実数 $s_i > 0$, t_i に対し、

$$\mu_{pq}^{ij} \triangleq \frac{t_i + 1 + p}{s_i} - \frac{t_i + q}{s_j} \quad (i \neq j) \quad (2)$$

を定義し、 $\mu_{pq}^{ij} \leq 0$ のとき $a_{pq}^{ij} = 0$ ならば、固定モードは存在しない。□

定理の仮定は、安田らが非線形系の安定定理を用いて安定化可能なシステムの構造を見つける研究³⁾において、サブシステムごとの状態フィードバックにより任意の安定度で安定化可能な条件として与えたものである。定理は同じ構造の分散系には固定モードが存在しないことを示している。

この定理の証明のために、以下の補題を示す。

【補題 1】(1)式の分散系において、集合 $\{1, 2, \dots, \nu\}$ の任意の部分集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ と任意の $\lambda \in C$ (複

† 第 25 回自動制御連合講演会で発表 (昭 57・11)

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

** 三菱電機(株)応用機器研究所 尼崎市塚口本町 8-1-1

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji

** Product Development Laboratory, Mitsubishi Electric Corp., Amagasaki

(Received September 21, 1983)

(Revised December 29, 1983)

Keyword: decentralized control, large scale system, fixed mode, stability, system theory

素平面) に対して,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_{i_1 i_1} - \lambda I & A_{i_1 i_2} & \cdots & A_{i_1 i_k} & | & \mathbf{b}_{i_1} & 0 \\ A_{i_2 i_1} & A_{i_2 i_2} - \lambda I & \cdots & A_{i_2 i_k} & | & 0 & \mathbf{b}_{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots \\ A_{i_k i_1} & A_{i_k i_2} & \cdots & A_{i_k i_k} - \lambda I & | & 0 & \mathbf{b}_{i_k} \end{bmatrix} \\ = \sum_{m=1}^k n_{i_m} \quad (3)$$

ならば, 固定モードは存在しない. $\square$

補題 1 の証明は (1) 式の分散系に固定モード存在のための必要十分条件である Anderson らの結果⁷⁾ を適用し, 簡単な変形を行うことによって容易に得ることができる. この証明の過程において, Anderson らの条件と等価な条件として得られた大きさ $n \times \left(\sum_{m=1}^k n_{i_m} + k \right)$ の行列の rank の不等式条件を, $\left(\sum_{m=k+1}^v n_{i_m} \right)$ 個の行を無視することにより, 大きさ $\left(\sum_{m=1}^k n_{i_m} \right) \times \left(\sum_{m=1}^k n_{i_m} + k \right)$ の行列の rank の等式条件におき換えていく. よって補題 1 は固定モード存在のための必要十分条件よりかなり厳しい十分条件であるといえる. またこの補題は, サブシステムの任意の連結システムが形のうえで可制御ならば, 固定モードが存在しないことを示している.

【補題 2】(2) 式で定義した μ_{pq}^{ij} はつぎの性質をもつ.

$$\text{i)} \quad p_1 > p_2 \text{ のとき } \mu_{p_1 q}^{i j} > \mu_{p_2 q}^{i j} \quad (4)$$

$$\text{ii)} \quad \mu_{a-1b}^{ij} = -\mu_{b-1a}^{ij} \quad (5)$$

$$\text{iii)} \quad \mu_{a-1b}^{ij} + \mu_{b-1c}^{ij} + \mu_{c-1a}^{ij} = 0 \quad (6)$$

$$\text{iv)} \quad \text{任意の自然数 } h_i (i=1, 2, \dots, k) \text{ に対してある自然数 } l \leq k \text{ が存在し,} \\ \mu_{h_i-1, h_i}^{ii} < 0 \quad (i=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k) \quad (7)$$

が成り立つ. $\square$

補題 2 の証明は紙面の都合上略すが, i), ii), iii) は μ_{pq}^{ij} の定義より容易に導け, iv) は i), ii), iii) を用いて数学的帰納法で証明できる.

補題 1, 2 を用いて定理の証明を行う.

(定理の証明) 補題 1 の「任意の部分集合」を $\{1, 2, \dots, k\}$ であるとしても一般性を失わない. 掃き出し法により (3) 式の行列の各行が独立であることを示す. $\mathbf{e}_i$ をつぎのように定義する.

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{\text{第 } i \text{ 要素}}{1}, 0, \dots, 0)^T \in \mathcal{R}^{\sum_{j=1}^k n_j} \quad (8)$$

まず, $\mathbf{b}_i$ の形より第 n_1 行, 第 n_1+n_2 行, ... 第 $\sum_{i=1}^k n_i$ 行は他行に独立である. そこで $\mathbf{b}_i$ 最下部の 1 により各行を掃き出す. 補題 2 の iv) で $h_i = n_i$ とお

いたとき, $l=1$ で成り立つとしても一般性を失わない. そのとき (7) 式は, 次式のようになる.

$$\mu_{n_i-1, n_i}^{i1} \leq 0 \quad (i=2, 3, \dots, k) \quad (9)$$

(9) 式と補題 2 の i) より

$$\mu_{1, n_1}^{i1} < \mu_{2, n_1}^{i1} < \dots < \mu_{n_i-1, n_1}^{i1} \leq 0 \quad (i=2, 3, \dots, k) \quad (10)$$

$\mu_{pq}^{ij} \leq 0$ のとき, $a_{pq}^{ij} = 0$ なので,

$$a_{1, n_1}^{i1} = a_{2, n_1}^{i1} = \dots = a_{n_i-1, n_1}^{i1} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, k) \quad (11)$$

(11) 式より第 n_1 列は $\mathbf{e}_{n_1-1}$ であることがわかる. よって第 n_1-1 行は他行に対して独立なので, この行を第 n_1 列で掃き出す. つぎに $h_1 = n_1 - 1$, $h_i = n_i$ ($i=2, 3, \dots, k$) として補題 2 の iv) を用い, 以下同様な手順を繰り返せば, (3) 式の行列の各行が独立なことがわかり, 補題 1 より固定モードは存在しない.

3. 考 察

本報告では安田らの条件を満たす分散系には固定モードが存在しないことを直接的に証明した. 固定モードが存在しなければ, 安定化が可能なだけでなく, 分散形動的補償器を用いて極配置が可能であることが知られている. よって安田らの条件を満たす分散系は, 分散形動的補償器を用いて極配置可能なシステムであることがわかる. また, 定理の証明の手順 (補題 1 を用いたことなど) から, 安田らの条件を満たす分散系は, 固定モードが存在しない分散系の一部であることがわかる (注 1). 各サブシステムの安定度を上げることによって安定化できるとは限らないが, 動的補償器によって極配置が可能な分散系が数多く存在することになる.

最後に, ご指導・ご助言いただいた 京都大学 花房 秀郎教授, 杉江俊治氏に深く感謝の意を表します.

参 考 文 献

- 1) S. H. Wang and E. J. Davison: On the Stabilization of Decentralized Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-5**, 473/478 (1973)
- 2) J. P. Corfmat and A. S. Morse: Decentralized Control of Linear Multivariable Systems, Automatica, **12-5**, 479/495 (1976)
- 3) 安田, 平井: 大規模システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, **16-4**, 504/510 (1980)
- 4) E. J. Davison: The Decentralized Stabilization and Control of a Class of Unknown Non-Linear Time-Varying Systems, Automatica, **10-3**, 309/316 (1974)

(注 1) ただし安田らの条件は, 全体システムのみならず, 各分離サブシステムの安定性をも保証する安定化である点で優れている.

- 5) D. D. Šiljak and M. B. Vukčević: Decentrally Stabilizable Linear and Bilinear Large-Scale Systems, International J. of Control, **26-2**, 289/305 (1977)
 - 6) M. Ikeda and D. D. Šiljak: On Decentrally Stabilizable Large-Scale Systems, Automatica, **16-3**, 311/334 (1980)
 - 7) B. D. O. Anderson and D. J. Clements: Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control, Automatica, **17-5**, 703/712 (1981)
-