Epsilon 法による最適制御問題の数値解の誤差範囲†

辻 輝 生*

Error Bound of Numerical Solutions of Optimal Control Problems by Epsilon Method

Teruo TSUJI*

The epsilon method which is proposed by A. V. Balakrishnan is convenient for solving numerically optimal control problems. However, since this method approximates the problems by functionals which are to be optimized, even the possible analytic solutions contain error (called theoretical error).

In this paper, the theoretical error bound is proved to be proportional to a value ε in the epsilon method. Moreover, since in general numerical solutions are given instead of analytic solutions, there arises numerical error, so the theorem is also shown which gives the total of theoretical and numerical error.

Keyword: epsilon method, optimal control, error bound of solutions, penalty method

1. ま え が き

Balakrishnan により提案された Epsilon 法 (以後 ε 法と書く) は, 最適制御問題の数値解法に対して便利な方法である²⁾. しかしながら, ε 法は最適制御問題を最適化汎関数によって近似する方法であるから, ε 法を用いて得られる最適解は近似解である. 本論文では, 単調減少する ε の列に対して, ε 法における最適化汎関数の最適解の列が Cauchy 列となることを示すことによって, 近似誤差の範囲を与える定理を示す. 一方 ε 法による最適化汎関数の最適解は, 一般に解析的に得られず, 数値的に得られることになるので, 数値的な誤差は避けられない. 本論文では, そのような数値的誤差の範囲を定める文献¹⁾の定理 (以後 Urabe の定理と呼ぶ) を応用することによって, 先に述べた定理を ε 法による数値解の近似誤差の範囲を与える定理に拡張して示す. 本論文に示される定理は, 数値解

の近傍に理論的解が存在するかどうか確認できる点において有用である.

2. 問題の記述

つぎのような最適制御問題を考える.

$$\left. \begin{aligned} \min \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで, $x(t)$, $u(t)$ はそれぞれ $[0, T]$ 上で定義された n , r 次元ベクトルとする. $f_0(\cdot, \cdot)$ はスカラー汎関数, $f(\cdot, \cdot)$ はベクトル値汎関数であり, 双方とも x , u に関して必要な階数だけ連続微分可能とする. また, $x(t) \in C^2[0, T]$, $u(t) \in C^1[0, T]$ とする. いま,

$$y(t) = \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

とおけば, ε 法における最適化汎関数は,

$$p(x, u, \varepsilon) = \int_0^T \left\{ f_0(x, u) + \frac{1}{2\varepsilon} \|y\|^2 \right\} dt \quad (3)$$

となる. ここで, 変数 t は省略してあり, 以後とくに必要としない限り変数 t は省略する. ε 法における問題はつぎのようになる.

$$\min p(x, u, \varepsilon), \quad \text{for } \varepsilon > 0 \quad (4)$$

数値解を求める立場からすれば, x , u を級数展開し, (4) 式に代入して, 適当な最適化法を用いて数値解を求めるのであるが, 求めた数値解の近似誤差, あるいは, その誤差の一部分をなす ε 法に特有の近似誤差を求める理論展開のために, (4) 式に変分法を適用する. この結果,

$$f_{0x} + \left(-\frac{d}{dt} - f_x \right) \frac{y}{\varepsilon} = 0, \quad y(T) = 0 \quad (5)$$

$$f_{0u} - f_u \frac{y}{\varepsilon} = 0 \quad (6)$$

を得る. ここで, d/dt は, 慣用的に Id/dt (I は $n \times n$ 単位行列) を表わしたものであり, また,

$$f_{0x} \triangleq \frac{\partial f_0(x, u)}{\partial x}, \quad f_{0u} \triangleq \frac{\partial f_0(x, u)}{\partial u}$$

† 第 24 回自動制御連合講演会で発表 (昭和 56・11)

* 九州工業大学 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu

(Received June 6, 1983)

(Revised January 6, 1984)

$$f_x \triangleq \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}, \quad f_u \triangleq \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \quad (7)$$

のことであり、簡単のため、変数 x, u は省略してある。本論文においては、解と名のつくものが 3 種類あるので、ここで、近似誤差も含めて、つぎのように定義する。

$\hat{x}(t) \in C^1[0, T], \hat{u}(t) \in C[0, T]$: (1) 式の問題の最適解の必要条件を満足する解で、真の解と呼び、 $\hat{x}, \hat{u}$ とも書く。

$\bar{x}(t, \varepsilon) \in C^2[0, T], \bar{u}(t, \varepsilon) \in C^1[0, T]$ (注 1), $\bar{y}(t, \varepsilon) \in C^1[0, T]$: (2), (5), (6) 式または (4) 式に対する解で、 ε 法における解と呼び、 $\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon, \bar{y}_\varepsilon$ または簡単に $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}$ とも書く。

$\tilde{x}(t) \in C^2[0, T], \tilde{u}(t) \in C^1[0, T], \tilde{y}(t) \in C^1[0, T]$: (4) 式に対する数値的近似解で、数値解または近似解と呼び、 $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y}$ とも書く。

$\|\hat{x} - \bar{x}\|_c, \|\hat{u} - \bar{u}\|_c$: 理論的誤差と呼ぶ。

$\|\bar{x} - \tilde{x}\|_c, \|\bar{u} - \tilde{u}\|_c$: 数値的誤差と呼ぶ。

(ノルムの記法 $\|\cdot\|_c$ については後述する)。

したがって、問題は理論的誤差の範囲を定める定理を示すことであり、また、その定理と Urabe の定理とから、数値解の真の解からの誤差 $\|\hat{x} - \bar{x}\|_c$ の範囲を定める定理を示すことである。

3. 他の定義と微分演算子に関する補題

ベクトル値関数のノルムを一般につぎのように定義する。すなわち、ある次元のベクトル値関数 $w(t) \in C[0, T]$ に関して、ユークリッドノルムを $\|\cdot\|$ で表わし、 $w(t)$ のノルムとして、

$$\|w(t)\|_c = \sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\| \quad (8)$$

と書き、異なる次元のベクトル値関数に対しても同じ記号を用いることにする。ある次元のベクトル値関数 $w(t)$ に対して、 t - w 空間を考え、 Ω を t - w 空間における超平面 $t=0, t=T$ により仕切られる領域とし、これらの超平面も Ω に含めるものとする。また、

$$D = \{w|(t, w) \in \Omega \text{ for } t \in [0, T], w \in C[0, T]\} \quad (9)$$

$$D' = \{w|(t, w) \in \Omega \text{ for } t \in [0, T], w \in C^1[0, T]\} \quad (10)$$

$$D'' = \{w|(t, w) \in \Omega \text{ for } t \in [0, T], w \in C^2[0, T]\} \quad (11)$$

とし、次元の異なるベクトル値関数に対しても同じ記号を用いる。明らかに $D \supset D' \supset D''$ である。さらに

(注 1) x と u は次元が異なるので、 $C^1[0, T]$ の表現は区別されるべきであるかもしれないが、ここでは、簡単のため同一の記法を用いる。

$$Y = \{y|y(T)=0, y \in D'\} \subset D' \quad (12)$$

とする。また、あらたにつぎのように定義する。

$$z \triangleq \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad f_{0z} \triangleq \begin{bmatrix} f_{0x} \\ f_{0u} \end{bmatrix}, \quad G \triangleq -\frac{d}{dt} - f_x,$$

$$H = \begin{bmatrix} G \\ -f_u \end{bmatrix}$$

これらの定義と $\hat{x}, \hat{u}, \hat{y}$ が、定義により (2), (5), (6) 式を満足することから、

$$f_{0z} + \hat{H} \frac{\hat{y}}{\varepsilon} = 0, \quad \hat{y}(T) = 0 \quad (13)$$

$$\hat{y} = \hat{x} - \hat{f}, \quad \hat{x}(0) = x_0 \quad (14)$$

である。ここで、

$$\hat{f}_{0z} \triangleq f_{0z}(\hat{z}), \quad \hat{H} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{G} \\ -\hat{f}_u \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -\frac{d}{dt} - f_x(\hat{z}) \\ -f_u(\hat{z}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{z} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{bmatrix}, \quad \hat{f} \triangleq f(\hat{z}), \quad \hat{f}_x \triangleq f_x(\hat{z}) \quad (15)$$

である。いま、作用素 $\hat{G}$ の領域として、(12) 式の Y と (9) 式の D を考え、 $\hat{G} \cdot Y \rightarrow D$ とする。 $\hat{f}_x$ に対して $\hat{\phi}$ を

$$\dot{w} = -\hat{f}_x w, \quad w \in Y \quad (16)$$

の基本行列とし、 $\hat{\phi}(0) = I$ を満足するように定める。このとき、つぎの補題が成立する。

[補題 1] 作用素 $\hat{G}$ は線形な逆作用素 $\hat{G}^{-1}$ をもち、かつ、

$$\|\hat{G}^{-1}\|_c \leq \left\| \hat{\phi}(t) \int_t^T \hat{\phi}(\tau) d\tau \right\|_c \quad (17)$$

が成立する。ここで、作用素ノルムは (8) 式のノルムから誘導されるノルムであり、添字の c はユークリッドノルムと区別するためのものである。

(証明) $\forall h \in D$ に対して、

$$\hat{G}y \triangleq -\dot{y} - \hat{f}_x y = h, \quad y(T) = 0 \quad (18)$$

とすれば、

$$y(t) = \hat{\phi}(t) \int_t^T \hat{\phi}^{-1}(\tau) h(\tau) d\tau = \hat{G}^{-1}h \quad (19)$$

となる。(12) 式の Y の定義と照合すれば $y \in Y$ であり、かつ (19) 式より

$$\|y(t)\|_c \leq \left\| \hat{\phi}(t) \int_t^T \hat{\phi}^{-1}(\tau) d\tau \right\|_c \|h(t)\|_c \quad (20)$$

である。 h は任意であったので、この式は $\hat{G}^{-1}$ のノルムの上限を与えていることがわかる。

さらに、(13) (14) 式に陰関数定理を適用して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left(f_{0z} - \hat{H} \frac{\hat{y}}{\varepsilon} \right) &= 0 \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &= \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} - \hat{f}_x \tau \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} - \hat{f}_u \tau \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

より、式を整理すれば、つぎのようになる。

$$(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*) \frac{d\hat{z}}{d\varepsilon} = \hat{H} \frac{\hat{y}}{\varepsilon} \quad (22)$$

としておく。

ここで

$$\hat{F} = f_{0xz} - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{y}_i}{\varepsilon} f_{izx}, \quad f_{0xz} \triangleq \frac{\partial f_{0x}}{\partial z}$$

$\hat{y}_i$ は $\hat{y}$ の第 i 要素, f_{izx} は f の第 i 要素 f_i に対して,

$$f_{izx} \triangleq \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}$$

により定義される行列である。また,

$$\hat{H}^* \triangleq \left[\frac{d}{dt} - f_x^T : -f_u^T \right] \triangleq [\hat{G}^* : -f_u^T] \quad (23)$$

である。(23)式の作用素 $\hat{G}^*$ の領域を

$$\hat{G}^* : X \rightarrow D'$$

とする。ただし,

$$X = \{w(t) | w(0) = 0, w(t) \in C^2[0, T]\} \subset D'' \quad (24)$$

である。この空間 X は, $d\hat{x}/d\varepsilon$ の空間を表わしている。 $d\hat{x}/d\varepsilon$ が $t=0$ で 0 となることは,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{t=0} &= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{x}(0, \varepsilon + \Delta\varepsilon) - \hat{x}(0, \varepsilon)}{\Delta\varepsilon} \\ &= \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_0 - x_0}{\Delta\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

より明らかである。上述の $\hat{G}^*$ に関しても補題 1 と同様に、つぎの補題 2 を得る。

[補題 2]

$\hat{G}^*$ は線形な逆作用素 $\hat{G}^{*-1}$ をもち,

$$\|\hat{G}^{*-1}\|_c \leq \left\| \hat{\phi}^*(t) \int_0^t \hat{\phi}^{*-1}(\tau) d\tau \right\|_c \quad (26)$$

ここで, $\hat{\phi}^*(t)$ はつぎの微分方程式に対する基本行列で, $\hat{\phi}^*(0) = I$ を満足するものである。

$$\dot{w} = f_x^T w, \quad w(0) = 0 \quad (27)$$

これまででできた作用素 F , $\hat{H}$ および $\hat{H}^*$ の領域を定めるために、つぎのような空間を定義する。

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \middle| w_1 \in X, w_2 : r \text{ 次元ベクトルかつ } w_2 \in D' \right\}$$

$$Z_Y = \{z | z \in Z, H^* z \in Y\} \quad (28)$$

f_0 と f が x と u に関して必要な階数だけ連続微分可能と仮定しておいたので,

$$\hat{F} : Z \rightarrow D' \subset D \quad (29)$$

である。また、これまでの定義により,

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}^* : Z_Y &\rightarrow Y \\ \hat{H} : Y &\rightarrow D \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。したがって

$$(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*) : Z_Y \rightarrow D \quad (31)$$

となるが、ここで、 D における $\hat{H}$ による Y の像を

$$D_Y = \{w | w = \hat{H}y, y \in Y\} \subset D \quad (32)$$

4. おもな結果

この節では、(22)式における $d\hat{z}/d\varepsilon$ が、 $\varepsilon \rightarrow 0$ に対して有界であることを示す。まず、 $\hat{y}/\varepsilon$ の有界性に対して、つぎの補題 3 を得る。

[補題 3]

$\varepsilon \rightarrow 0$ に対して $\hat{z}$ が有界ならば、 $\hat{y}/\varepsilon$ も有界である。すなわち $\hat{y} \rightarrow 0$ である。

(証明) (5)式と補題 1 より,

$$\frac{\hat{y}}{\varepsilon} = -\hat{G}^{-1} f_{0x}, \quad \therefore \left\| \frac{\hat{y}}{\varepsilon} \right\|_c \leq \|\hat{G}^{-1}\|_c \|f_{0x}\|_c \quad (33)$$

であるから、 $\hat{z}$ が有界であれば $\hat{y}/\varepsilon$ も有界である。

つぎに、(22)式の関係において、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*)^{-1} \hat{H}$ の存在を示すために $\hat{y}/\varepsilon$ を任意の $y \in Y$ でおきかえた式、すなわち,

$$(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*)z = \hat{H}y \quad (y \in D_Y) \quad (34)$$

を満足する解 $z \in Z$ が存在することを示す。これは、 $\hat{H}$ が $(n+r) \times n$ 次元、 $\hat{H}^*$ が $n \times (n+r)$ 次元の行列であるため、 $\varepsilon=0$ においては、 $(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*)^{-1}$ は考えられないが、 $\varepsilon \rightarrow 0$ に対して、 $(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*)^{-1} \hat{H}$ は存在することを意味している。また $\hat{H}$ と $\hat{H}^*$ は微分作用素を含んでいるため、 $(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*)^{-1} \hat{H}$ の具体的計算法を示すことも本節の目的である。ここで、 $\hat{F}^{-1}$ の存在の仮定を追加する。これは(22)式のところで定義しているように、評価汎関数における f_0 と系を表わす f に関係している。さらに $\hat{F}$ をつぎのように分割する。

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

ここで、 $\hat{F}_{11}$, $\hat{F}_{12}$, $\hat{F}_{21}$, $\hat{F}_{22}$ はそれぞれ、 $n \times n$, $n \times r$, $r \times n$, $r \times r$ 次元の行列である。

[補題 4] つぎの関係式が成立する。

$$(\varepsilon \hat{F} + \hat{H} \hat{H}^*)^{-1} \hat{H} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21} & -\hat{F}^{-1} f_u \end{bmatrix} \hat{\phi} \quad (36)$$

ここで $\hat{\phi}$ は,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}y &= -\hat{\Psi}(t) \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \hat{\Psi}(T) \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &\quad \times \hat{\Psi}(t) \int_0^T \hat{\Psi}^{-1}(\tau) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} y(\tau) d\tau \\ &\quad + \hat{\Psi}(t) \int_0^T \hat{\Psi}^{-1}(\tau) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

なる演算子で、 $\hat{\Psi}(t)$ は、つぎの方程式

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} f_x^T - f_u^T \hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21} & -\varepsilon I - f_u^T \hat{F}_{22}^{-1} f_u \\ -(\hat{F}_{11} - \hat{F}_{12} \hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21}) & -f_x - \hat{F}_{12} \hat{F}_{22}^{-1} f_u \end{bmatrix} w \quad (38)$$

の基本行列で, $\Psi(0)=I$ を満足するものである.

(証明) n 次元ベクトル z_1 および r 次元ベクトル z_2 を

$$\hat{F}z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad z = \hat{F}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

とおけば, (34) 式は, (15) 式の $\hat{H}$ の定義式より

$$\varepsilon z_1 + \hat{G}\hat{H}^*z = \hat{G}y \quad (40)$$

$$\varepsilon z_2 - f_u^T \hat{H}^*z = -f_u^T y \quad (41)$$

となる. (40) 式を用いて (41) 式の $\hat{H}^*z$ を消去すれば, つぎの関係を得る.

$$z_2 + f_u \hat{G}^{-1} z_1 = 0 \quad (42)$$

(39) 式に留意して, (42) 式により (40) 式から z_2 を消去すれば,

$$\left(\varepsilon I + \hat{G}\hat{H}^* \hat{F}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ -f_u \hat{G}^{-1} \end{bmatrix} \right) z_1 = \hat{G}y$$

となり, 左から $\hat{G}^{-1}$ を作用させれば

$$\therefore (\varepsilon I + \hat{H}^* \hat{F}^{-1} \hat{H}) \hat{G}^{-1} z_1 = y \quad (43)$$

となる. (43) 式より z_1 を求めるために, $\hat{F}^{-1}$ を (35) 式の分割に対応して,

$$\hat{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{111} & \hat{F}_{112} \\ \hat{F}_{121} & \hat{F}_{122} \end{bmatrix} \quad (44)$$

とおき, (43) 式を展開すれば

$$\varepsilon \hat{G}^{-1} z_1 + \hat{G}(\hat{F}_{111} - \hat{F}_{112} f_u^T \hat{G}^{-1}) z_1 - f_u^T (\hat{F}_{121} - \hat{F}_{122} f_u^T \hat{G}^{-1}) z_1 = y \quad (45)$$

を得る. そこで,

$$\left. \begin{aligned} p &= (\hat{F}_{111} - \hat{F}_{112} f_u^T \hat{G}^{-1}) z_1 \\ q &= \hat{G}^{-1} z_1 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

とおく. (15), (23) 式のところで $\hat{G}$, $\hat{G}^*$ の領域を定めたように,

$$p(0)=0, \quad q(T)=0 \quad (47)$$

である. (46) 式と $\hat{F}$ と $\hat{F}^{-1}$ の部分行列の関係より

$$\begin{aligned} z_1 &= \hat{F}_{111}^{-1} (p + \hat{F}_{112} f_u^T q) \\ &= (\hat{F}_{111} - \hat{F}_{112} \hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21}) p - \hat{F}_{112} \hat{F}_{22}^{-1} f_u^T q \end{aligned} \quad (48)$$

であるから, (45), (46), (48) 式より

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

と書くことができる. ここで,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} f_u^T - f_u^T \hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21} & -\varepsilon I - f_u^T \hat{F}_{22}^{-1} f_u \\ -(\hat{F}_{111} - \hat{F}_{112} \hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21}) & -f_u - \hat{F}_{12} \hat{F}_{22}^{-1} f_u \end{bmatrix}$$

である. (47) 式の境界条件のもとで, (49) 式の解を求めれば, (37) 式を用いて,

$$\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \phi y$$

と書くことができるから, (39), (42), (46) 式より

$$z = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{F}_{22}^{-1} \hat{F}_{21} & -\hat{F}_{22}^{-1} f_u \end{bmatrix} \phi y \quad (50)$$

となり, (34) 式と (50) 式から補題が証明された.

つぎの定理のためにいくつかの定義を行う. (28) 式の Z 定義に対して, つぎの Z_s を, また $D_{\sigma s}$, D_{σ} を

$$\begin{aligned} Z_s &= \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} : w_1 : n \text{ 次元ベクトル, } w_1 \in D', \right. \\ &\quad \left. w_1(0)=0 \quad w_2 : r \text{ 次元ベクトル, } w_2 \in D \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

$$D_{\sigma s} = \{z : \|z - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c \leq \sigma, z \in Z_s\} \quad (52)$$

$$D_{\sigma} = \{z : \|z - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c \leq \sigma, z \in Z\} \quad (53)$$

と定義する. 明らかに $Z \subset Z_s$, $D_{\sigma} \subset D_{\sigma s}$ である. また, これまですべての作用素は $z = \hat{z}(t, \varepsilon)$ を代入したいわゆる“ $\wedge$ ”のついた作用素を用いてきたが, $\hat{z}(t, \varepsilon)$ の代りに $z (\in D_{\sigma s})$ を代入した作用素も定義できるから, その場合には, 各作用素の“ $\wedge$ ”をとり去った記号を用いることにする.

《定理 1》

つぎの条件を満足する σ, ε_0, K が存在するとする. すなわち,

$$\left\| \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_{22}^{-1} F_{21} & -F_{22}^{-1} f_u \end{bmatrix} \phi G^{-1} f_{0x} \right\|_c \leq K \quad (54)$$

$$\text{for } \forall z \in D_{\sigma s} \quad \text{and} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad (55)$$

このとき, $\hat{z}$ が存在し, 次式を満足する.

$$\|\hat{z} - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c \leq K \varepsilon_0 \leq \sigma. \quad (56)$$

(証明) まず,

$$\hat{z}(t, \varepsilon) \in D_{\sigma s} \quad \text{for } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad (57)$$

を証明する. そのために, ε を ε_0 から 0 へ変化させたとき, $\varepsilon = \varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$ において, はじめて

$$\|\hat{z}(t, \varepsilon^*) - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c = \sigma \quad (58)$$

となったとする. ところが, (54) 式の条件は, $\hat{z}(t, \varepsilon) \in D_{\sigma s}$ であれば (22), (33), (50) 式から,

$$\left\| \frac{d\hat{z}(t, \varepsilon)}{d\varepsilon} \right\|_c \leq K \quad (59)$$

を意味している. $\hat{z}(t, \varepsilon_0)$ は $D_{\sigma s}$ の中心であり, もちろん $\hat{z}(t, \varepsilon_0) \in D_{\sigma s}$ であるから, $\varepsilon = \varepsilon_0$ に対して (59) 式が成立し, 微係数の有界性から $\hat{z}(t, \varepsilon_0)$ は ε_0 の近傍で ε に関して連続である. 以上のことは $\hat{z}(t, \varepsilon) \in D_{\sigma s}$ であれば成立する. したがって (58) 式の仮定は, $\varepsilon \in [\varepsilon^*, \varepsilon_0]$ に対して, $\hat{z}(t, \varepsilon) \in D_{\sigma s}$ であり, (59) 式が成立するので,

$$\begin{aligned} \|\hat{z}(t, \varepsilon^*) - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c &= \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon^*} \frac{d\hat{z}(t, \varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \right\|_c \\ &\leq \left| \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon^*} \left\| \frac{d\hat{z}(t, \varepsilon)}{d\varepsilon} \right\|_c d\varepsilon \right| \leq K(\varepsilon_0 - \varepsilon^*) < \sigma \end{aligned} \quad (60)$$

となる. 最後の不等号は (55) 式と $\varepsilon^* > 0$ による. 明らかに, (58) 式は (60) 式に矛盾する. すなわち, (57) 式が成立する. いま,

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0 \quad (61)$$

となる ε の列を考える。(60)式と同様にすれば

$$\|\hat{z}(t, \varepsilon_i) - \hat{z}(t, \varepsilon_{i+1})\|_c \leq K(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \quad (62)$$

を得る。これは、 $\hat{z}(t, \varepsilon_i)$ が D_σ 上で Cauchy 列であることを示している。 D_σ は完備であるから、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{z}(t, \varepsilon_i) = \hat{z}(t) \in D_\sigma \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{z}(t, \varepsilon_i) - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c &= \|\hat{z}(t) - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c \\ &\leq K\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (64)$$

となり、定理が証明された。

これまで、 $\hat{z}$ の存在を仮定してきたが、つぎに $\hat{z}$ の存在条件について述べる。通常 ε 法においては、数値解は (3) 式を何らかの方法により最適化して得られる。したがって、この数値解は、(2)、(5)、(6) 式により表わされる 2 点境界値問題の近似解である。もし、(6) 式が u について解析的に解きうるならば、(2)、(5) 式より u を消去でき、通常の 2 点境界値問題となり、参考文献 1) の Urabe の定理を直接適用すれば近似解 $\bar{z}$ により、 $\hat{z}$ の存在がいえる。(6) 式により u が解析的に得られない場合については、参考文献 3) に示されている。ただ、参考文献 3) は、最適制御問題から直接得られた 2 点境界値問題を取扱っているが 2 点境界値問題であれば何にでも適用できる。したがってつぎの定理を得る。

《定理 2》

数値解 $\bar{z}$ および $\varepsilon = \varepsilon_0$ としたときの (2)、(5)、(6) 式で与えられる 2 点境界値問題に対して、参考文献 3) に転載された Urabe の定理の条件が満足され、かつ、その誤差範囲 δ に対して、本論文の定理 1 の条件が、

$$D_{\delta+\sigma, \varepsilon} = \{z \mid \|z - \bar{z}\|_c \leq \delta + \sigma, z \in Z_i\} \quad (65)$$

上においても成立するとき、数値解 $\bar{z}$ に対して

$$\|\hat{z} - \bar{z}\|_c \leq \delta + K\varepsilon_0 \quad (66)$$

である。

(証明) (2)、(5)、(6) 式の 2 点境界値問題に対して 3) の定理 1 を満足しているから、

$$\|\hat{z}(t, \varepsilon_0) - \bar{z}\|_c \leq \delta \quad (67)$$

である。さらに仮定により

$$\|\hat{z} - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c \leq K\varepsilon_0 \quad (68)$$

であるから、(67)、(68) 式より

$$\begin{aligned} \|\hat{z} - \bar{z}\|_c &\leq \|\hat{z} - \hat{z}(t, \varepsilon_0)\|_c + \|\hat{z}(t, \varepsilon_0) \\ &\quad - \bar{z}\|_c \leq \delta + K\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (69)$$

となり、定理が証明された。

4. 定理の一般的意義と条件の照合について

工学的応用において要求される精度は、応用される

対象や目的によって異なるが、計測装置の精度などを考慮すれば、有効数字 7 ケタもあれば十分であり、場合によっては、3 ケタ程度でよい場合も多い。したがって数値計算による誤差は、4 倍精度 (約 35 ケタ) で行えば、定理 2 の δ は非常に小さくできるので、実際の誤差は ε_0 で決定されると考えてよい。したがって、 ε 法における解の近似誤差範囲が ε_0 に比例することを証明した点に意義があるといえる。

さて、定理 2 の条件の照合において問題となるのは、 $D_{\delta+\sigma, \varepsilon}$ 上において (54) 式を満足する K の値の設定である。

すなわち、(54) 式の右辺の値を $z \in D_{\delta+\sigma, \varepsilon}$ と $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して計算しなければならない。これは個々の例題について原理的に可能ではあるが、例題によっては實際上不可能な場合が多い。そこで以下に便宜的な方法を述べる。(22) 式で定義された $\hat{F}$ における φ/ε は (33) 式により、 $\hat{F}$ の定義式から消去されるので $\hat{F}$ は ε を陽に含まない形で表現できる。したがって、 ε が影響するのは (37) 式の右辺に現れる $\Psi(t)$ に対してである。そこで、

$$\left. \begin{aligned} T_1(z) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_{22}^{-1}F_{21} & -F_{22}^{-1}f_u \end{bmatrix}_c \\ T_2(z, \varepsilon) &= \|\varphi\|_c \\ T_3(z) &= \|G^{-1}\|_c \\ T_4(z) &= \|f_{0x}\|_c \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

において、各 T_i を $\bar{z}$ と ε_0 のまわりで展開すれば、

$$\begin{aligned} T_i(z) &= T_i(\bar{z}) + T_{iz}^T(\bar{z})(z - \bar{z}) + O(z - \bar{z}) \\ i &= 1, 3, 4 \\ T_2(z, \varepsilon) &= T_2(\bar{z}, \varepsilon_0) + T_{2z}^T(\bar{z}, \varepsilon_0)(z - \bar{z}) \\ &\quad + T_{2\varepsilon}(\bar{z}, \varepsilon_0)(\varepsilon - \varepsilon_0) + O(z - \bar{z}, \varepsilon - \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (71)$$

ここで、添字の z および ε は、それぞれの変数に関する偏導関数を表わし、 $o(\cdot)$ または $O(\cdot, \cdot)$ は高次の項を表わす。 $z \in D_{\delta+\sigma, \varepsilon}$ 、 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して、明らかに、

$$\begin{aligned} T_2(z, \varepsilon) &\prod_{i=1, 3, 4} T_i(z, \varepsilon) \\ &\leq \{T_2(\bar{z}, \varepsilon_0) + \|T_{2z}(\bar{z}, \varepsilon_0)\|(\delta + \sigma) \\ &\quad + \|T_{2\varepsilon}(\bar{z}, \varepsilon_0)\|\varepsilon_0\} \prod_{i=1, 3, 4} \{T_i(\bar{z}) \\ &\quad + \|T_{iz}(\bar{z})\|(\delta + \sigma)\} + O(z - \bar{z}, \varepsilon - \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (72)$$

となる。 $\delta + \sigma$ および ε_0 が小さければ (72) 式の最後の項は無視できるから、 K の値として (72) 式の右辺の第 1 項を選ぶことができる。もちろん、その結果 $K\varepsilon_0 \leq \sigma$ が成立しなければ、 ε_0 を小さくして再度計算を繰返す必要がある。 $\|T_{iz}(\bar{z})\|$ などの計算法は参考文献 3) に示されているが、後述する簡単な例題においても

Table 1 Values of some parameters concerning error bounds in example for several ε_0

ε_0	δ	K	$K\varepsilon_0$	σ
0.256 Q-6	0.462941... Q-10	0.320851... Q2	0.821380... Q-5	0.1 Q-4
0.128 Q-5	0.850164... Q-11	0.320948... Q2	0.410813... Q-4	0.5 Q-4
0.64 Q-5	0.279947... Q-11	0.321430... Q2	0.205715... Q-3	0.25 Q-3
0.32 Q-4	0.147310... Q-11	0.323866... Q2	0.103637... Q-2	0.125 Q-2
0.16 Q-3	0.908404... Q-12	0.336673... Q2	0.538677... Q-2	0.625 Q-2

$T_{iz}(z)$ などの計算は煩雑である。まして、(54)式の左辺の定められた領域における最大値を求める一般的な方法がないことが、定理の条件の照合を困難にしており、個々の例題について解決すべき問題となっている。しかし、定理は ε 法による解の誤差が ε に比例することを示しており、これは K の値が概算できれば誤差範囲の推定ができ、定理として十分意義のあるものと思われる。

6. 例 題

つぎのような双線形 1 次元系の最適制御問題を考える。

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + u^2) dt \\ \text{subject to } & \dot{x} + 0.5x - 0.1ux - u = 0 \\ & x(-1) = 2 \end{aligned} \quad (73)$$

まず、(3)式によって、 $p(x, u, \varepsilon)$ を構成し、 x と u をそれぞれチェビシェフ級数 31 項で展開し、ニュートン法で近似解を求め、参考文献3)の方法で、(2)(5)、(6)式の解であるところの $\hat{z}(t, \varepsilon_0)$ からの誤差範囲を求めた。計算は、九州大学大型計算センターの M-190 で、4 倍精度計算により求めた。その結果、(67)式における δ は、

$$\delta = 0.7629 \times 10^{-10} \quad (74)$$

であった。ただし、 $\varepsilon_0 = 0.256 \times 10^{-6}$ である。また、(74)式の値を算出するにあたり、必要となる $\hat{\phi}$ と $\hat{\psi}$ との近似誤差は 10^{-30} 以下と小さく、(74)式の値に比して問題にならないほど小さいことがわかる。つぎに $\sigma = 10^{-5}$ と設定し、定理 2 の条件に相当する K の $D_{\delta+\sigma, \varepsilon}$ に対する値を計算した。そのとき必要となる $\hat{\psi}$ の近似値は、つねに過大評価に留意して求め、 $\|z - \hat{z}\|_\infty \leq \delta + \sigma$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ に対して、

$$\|\hat{\psi} - \bar{\psi}\|_\infty \leq 0.4285 \times 10^{-4} \quad (75)$$

となった。この関係と (37) 式などの関係を通して定理

2 の条件である (54) 式を (演算誤差を考慮して過大) 評価したところ、

$$K = 32.09 \quad (76)$$

となり、 $\varepsilon_0 = 0.256 \times 10^{-6}$ であったので、

$$K\varepsilon_0 = 0.8213 \times 10^{-5} \quad (77)$$

$$\therefore K\varepsilon_0 + \delta \approx K\varepsilon_0 \quad (78)$$

となった。

このようにして、いくつかの ε_0 に対して同じ計算を繰返した結果を **Table 1** に示す。 $K\varepsilon_0 \leq \sigma$ を満足させるために、たとえば表を ε_0 の増加の方向に見ていくと、 σ も増加させなければならない。このために、 $D_{\delta+\sigma, \varepsilon}$ の範囲が増大して K の値も若干増加している。また誤差範囲は $\delta + K\varepsilon_0$ であるが、この場合は $K\varepsilon_0$ と考えてもよいことがわかる。

7. あとがき

上のような簡単な例題でも、実際に誤差を厳密に計算するとなると単純容易ではない。しかし、必要ならば誤差計算が可能なこと、また、計算精度を任意に上げることができるならば、誤差範囲は ε_0 に比例することを示した点に本論文の意義があると思われる。

また、操作量や状態に制限がある場合には、見通しがないわけではないが、今後の拡張のための研究が必要である。

参 考 文 献

- 1) M. Urabe: The Newton Method and Its Application to Boundary Value Problems with Nonlinear Boundary Value Conditions, Proc. US-Japan Seminar on Differential and Functional Equations, Benjamin, New York, 383/414 (1967)
- 2) A. V. Balakrishnan: On a New Computing Technique in Optimal Control, SIAM J. on Control, 6-2, 149/173 (1968)
- 3) 伊藤, 高田: 連続系最適制御問題の解の存在定理と数値解の誤差範囲に関する一考察, 計測自動制御学会論文集 18-7, 647/652 (1982)