住宅供給者の最適補修行動[†]

板谷 雄二*・斎藤 制海**

Optimal Maintenance Behavior of Housing Suppliers

Yuji ITAYA* and Osami SAITO**

In urban economics housing has been treated as nondurable goods so far. If housing is nondurable, the spatial structure models of housing market are static and at long-run equilibrium and are concerned mainly with allocation of housing in a city. However, to consider dynamical models, housing must be thought of as durable goods, and in this case it is important to take account of maintenance, which compensates deterioration of housing quality.

In this paper, the behavior of housing suppliers to maintain housing is formulated as one of optimal control problems. Housing is characterized by its quality, and suppliers' profit is maximized with respect to maintenance investment. Some properties of their behavior are derived: The behavior is classified into six types, and if they cease to maintain housing, they will never do that again. Furthermore, the effects of the changes of housing structural characteristics on the maintenance are also considered.

Keyword: optimal control, maintenance, housing

1. 緒 言

都市が重要性を増し、都市化が進むにつれて、さまざまな都市問題が顕在化してきた。その一例として、住宅問題¹⁾が挙げられる。市民は都心周辺では狭く環境の悪い住宅に住まざるをえなく、広い土地を求めて郊外に移ったとしても、通勤時間が長くなるなどの不便を被っているのである。このように、住宅・土地問題は市民の生活環境を脅かし、市政に影響を及ぼしている。

このような問題を経済理論を基礎にして解析する都市経済学においては、その理論の中心を都市の空間構造の解析においている。都市の空間構造とは都市における土地利用の分布のことで、主に住宅地に関する研究が進められている。これは、住宅需要モデルと住宅供給モデルをたてることにより、その需要と供給の均衡から求めることができる。

最近、そのようなモデル化の際、住宅を耐久財として扱うようになり、それに伴って、住宅の老朽化と補修を考察することが重要になってきている。住宅供給者の住宅補修モデルには、Sweeney²⁾、Luenberger³⁾、Arnott ら⁴⁾のモデルがあり、住宅の老朽化を住宅の質の低下と考え、その質の低下を抑え、一定期間における利潤が最大になるような供給者の補修行動を考察している。

Sweeney は貸家人と持家人の補修行動を比較し、借家よりも持家のほうがよく補修されることを示した。Luenberger は、住宅の質のダイナミックスを特定化し、住宅供給者の補修を求めた。

本論文では、住宅供給者の補修行動について考察する。Arnott らは、著者らとは独立に本モデルと同様のモデルをたてているが、供給者の利潤が最大になるような建設時の住宅の質を求めることに主眼がおかれており、どのような補修がなされるかは考慮されていない。

まず、第2章では、本論文における仮定を述べ、モデルを最適制御問題として定式化する。第3章においては、最適解の必要条件からこの解の性質を述べる。以上のモデルにおける関数を特定化し、第4章において、種々のパラメータの変動による補修費の変化を考察する。

2. 住宅供給者のモデル

住宅供給者は補修しながら住宅を賃貸すると考え、モデルを構成する前につぎを仮定する。

(A 1) 供給者は自分の得る利潤が最大になるよう

† 第21回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭57・7)

* 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

** 豊橋技術科学大学 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘1-1

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

** Toyohashi University of Technology, Toyohashi

(Received October 17, 1983)

(Revised January 20, 1984)

に行動する。

(A 2) 供給者の資金に制限がなく、補修投資額に制限がない。

(A 3) 環境の変化に伴って、家賃は時間的に一定率で上昇する。家賃は外生的に与えられる。

(A 4) 供給者は将来における家賃の値を正確に予測できる。

(A 5) 住宅は住宅の質で特徴づけられる。

以上は供給者を考える際に基本となる仮定で、現実の供給者行動をある程度反映するものである。

供給者はまず質 q_0 の住宅をもっているとする。補修をしなければ、質は低下し、住宅は老朽化する。補修をすると、質は良くなるか、あるいは、質の低下は抑えられる。高い質の住宅は高く賃貸することができるので、補修をすれば家賃が高くなり、収入がふえる。しかし、補修費が増加し、支出がふえるので、この収入から支出を差し引いた金額（利潤）はある補修費で最大になると考えられる。

供給者は総利潤の現在価値を最大にするように行動し、その価値は、各期の利潤に割引率をかけ、供給者の計画期間 $[0, T]$ で積分することにより求められる。

以上述べたことを定式化すると

$$\pi = \max_{m(t)} \int_0^T \{R(q(t))e^{\eta t} - m(t)\} e^{-rt} dt \quad (2.1)$$

subject to

$$\dot{q}(t) = -\alpha q(t) + g(m(t)) \quad (2.2)$$

$$q(0) = q_0 > 0 \quad (2.3)$$

$$q(t) \geq 0 \quad (2.4)$$

$$m(t) \geq 0 \quad (2.5)$$

ここで、 π は住宅一単位当りの総利潤の現在価値、 $q(t)$ は時刻 t における住宅の質、 $R(q)$ は住宅の質が q であるときの現在 ($t=0$) の家賃、 $\eta(>0)$ は家賃の上昇率、 m は補修費、 $r(>0)$ は割引率、 $\alpha(>0)$ は住宅の質の老朽化率、 $g(m)$ は補修の質への効果関数、 q_0 は住宅の初期の質である。このように、供給者の補修行動は最適制御問題の解となる。

$R(q)$ と $g(m)$ の関数について以下を仮定する。

(A 6) $R(0)=0$

(A 7) $R(q)$ は q に関して 2 階微分可能

(A 8) $R(q)$ は q について増加関数で、限界逓減的である。すなわち、 $dR/dq > 0$ 、 $d^2R/dq^2 \leq 0$

(A 9) $g(0)=0$

(A10) $g(m)$ は m に関して 2 階連続微分可能

(A11) $g(m)$ は m について増加関数で、限界逓減的である。すなわち、 $dg/dm > 0$ 、 $d^2g/dm^2 < 0$

(A12) $dg/dm \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)

(A 6) は住宅が存在しない ($q=0$) とき、収入がないことを示し、(A 9) は補修をしないとき、質が指数関数的に減少することを保証する。(A 6)～(A11) から $R(q)$ と $g(m)$ は原点を通る凹関数となる。

(A 9)～(A11) と (2.5) 式から $g(m) \geq 0$ であるので、(2.2)、(2.3) 式により (2.4) 式が成立し、(2.4) 式の条件は取り除ける。

3. 最適補修

3.1 最適解の必要条件

(2.1)～(2.5) 式の問題について最適解が満たすべき条件は、Bolza の問題の解の必要条件 (Euler の方程式)⁵⁾ から、つぎを満足する連続な補助変数 $\phi(t)$ と $\lambda(t)$ が存在することである。

$$\dot{q}(t) = -\alpha q(t) + g(m(t)) \quad (3.1)$$

$$\dot{\phi}(t) = \alpha \phi(t) - R'(q(t))e^{(\alpha-r)t} \quad (3.2)$$

$$q(0) = q_0 \quad (3.3)$$

$$\phi(T) = 0 \quad (3.4)$$

$$-e^{-rt} + \phi(t)g'(m(t)) + \lambda(t) = 0 \quad (3.5)$$

$$m(t) \geq 0 \quad (3.6)$$

$$\lambda(t)m(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$\lambda(t) \geq 0 \quad (3.8)$$

ただし、 $R'(q) = dR(q)/dq$ 、 $g'(m) = dg(m)/dm$ である。 $\phi(t) \equiv \phi(t)e^{rt}$ 、 $\mu(t) \equiv \lambda(t)e^{rt}$ とすると、(3.1)～(3.8) 式はつぎのように書きかえられる。

$$\dot{q}(t) = -\alpha q(t) + g(m(t)) \quad (3.9)$$

$$\dot{\phi}(t) = (\alpha + r)\phi(t) - R'(q(t))e^{\eta t} \quad (3.10)$$

$$q(0) = q_0 \quad (3.11)$$

$$\phi(T) = 0 \quad (3.12)$$

$$-1 + \phi(t)g'(m(t)) + \mu(t) = 0 \quad (3.13)$$

$$m(t) \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\mu(t)m(t) = 0 \quad (3.15)$$

$$\mu(t) \geq 0 \quad (3.16)$$

最適解に * を付け、以上の条件から最適解の性質を論じる。

3.2 最適解の連続性

(3.10) と (3.12)～(3.16) 式からつぎの定理が成立する。

《定理 1》

最適解 $m^*(t)$ は連続関数である。さらに、 $Z = \{t | m^*(t) > 0\}$ の区間では C^1 関数である。また、 $m^*(T) = 0$ となる。

(証明)

$t \in Z$ では、(3.13)～(3.16) 式から $\phi(t)g'(m^*(t)) = 1$ となる。(A10)、(A11) より、 $g'(m)$ の連続微分可能な逆関数 $(g')^{-1}$ が存在し、 $\phi(t)$ は (3.10) 式と (A 7) より

連続微分可能であるから、 $m^*(t) = (g')^{-1}(1/\phi(t))$ は連続微分可能となる。

$\mu(t) = \lambda(t)e^{-rt}$ は連続であるから、(3.13) 式より $g'(m^*)$ は連続となり、 m^* は連続となる。

(3.12) と (3.13) 式より $\mu(T) = 1$ となり、(3.15) 式から $m^*(T) = 0$ が導ける。 [証明終り]

3.3 最適解の非再現性

《定理 2》

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ を満たすある t_1, t_2 に対して

$$m^*(t) > 0 \quad t \in (t_1, t_2)$$

$$m^*(t) = 0 \quad t \in [0, t_1] \cup [t_2, T]$$

となる。ただし、 $t_1 = 0$ のときは

$$m^*(t) > 0 \quad t \in [0, t_2]$$

$$m^*(t) = 0 \quad t \in [t_2, T]$$

とし、 $t_1 = t_2 = 0$ のときは

$$m^*(t) = 0 \quad t \in [0, T]$$

とする。

(証明)

$m^*(t) = 0, t \in [0, T]$ であれば、定理は成立するから ($t_1 = t_2 = 0$ とおく)、それ以外の場合を考える。そのとき、Fig. 1 のように τ を

$$\tau = \min \{t | m^*(t) = 0 \text{ and } \exists t' < t, m^*(t') > 0\}$$

と定義すると、定理 1 の $m^*(T) = 0$ により、 τ は必ず存在する。定理を証明するためには、 $m^*(t) = 0, t \in [\tau, T]$ を示せばよい。

(3.10), (3.12) 式, (A 8) により $\phi(t) \geq 0$ であり、 $g' > 0, g'' < 0, \dot{m}^*(\tau-) < 0$ であるから、(3.13) 式を時間で微分した $\dot{\phi}(\tau-)g'(m^*(\tau-)) + \phi(\tau-)g''(m^*(\tau-))\dot{m}^*(\tau-) = 0$ により $\dot{\phi}(\tau-) \leq 0$ が求まる。ゆえに、 $\phi(t)$ の連続性により、 $\dot{\phi}(\tau) \leq 0$ となる。 $\dot{q}(\tau) < 0$ と (3.10) 式により、十分小さな $\Delta t > 0$ に対して、 $\dot{\phi}(\tau + \Delta t) \leq \dot{\phi}(\tau)$ となり、このとき $1 > \phi(\tau)g'(0) \geq \phi(\tau + \Delta t) \cdot g'(0)$ から $m^*(\tau + \Delta t) = 0$ 、ゆえに $\dot{q}(\tau + \Delta t) < 0$ がいえる。この議論を繰り返すと、 $\dot{\phi}(t) \leq 0, \dot{q}(t) \leq 0, m^*(t) = 0, t \in [\tau, T]$ が得られる。 [証明終り]

定理 2 により、住宅供給者は一度補修をやめると、再び補修をすることがないのがわかる。

3.4 最適解のタイプ

$Z = \{t | m^*(t) > 0\}$ となる時間区間での供給者の補修行動を調べる。まず、家賃の上昇がない場合 ($\eta = 0$) を述べ、つぎに家賃の上昇がある場合 ($\eta > 0$) を述べる。

3.4.1 家賃の上昇がない場合 ($\eta = 0$)

$t \in Z$ のとき、(3.15) 式より $\mu(t) = 0$ となるから、最適解が満たす条件は

$$\dot{q} = -\alpha q + g(m^*) \quad (3.17)$$

$$\dot{\phi} = (\alpha + r)\phi - R'(q) \quad (3.18)$$

Fig. 1 The definition of τ

Fig. 2 The solution of (3.17)-(3.19)

Fig. 3 The optimal trajectories when $\eta = 0$

$$\phi g'(0) > \phi g'(m^*) = 1 \quad (3.19)$$

となる。

(3.19) 式から

$$\phi(t) = 1/g'(m^*) \quad (3.20)$$

となり、(3.10) と (3.12) 式から

$$\phi(t) = e^{(\alpha+r)t} \int_t^T R'(q(\xi)) e^{-(\alpha+r)\xi} d\xi \quad (3.21)$$

となる。ゆえに、供給者は、住宅の質を一単位増したときの時刻 t で評価した収益の増加分 ((3.21) 式で表わされる) が、補修の限界効果の逆数 ((3.20) 式) に等しくなるように、住宅を補修する。

(3.17)~(3.19) 式の解を q - ϕ 平面に示す。 $g(m)$ は (A11) より m に関して増加関数であり、 $\phi (= 1/g'(m))$ も m に関して増加関数である。ゆえに、 $\dot{q} = 0$ を満たす曲線上 ($\alpha q = g(m)$) では、 q が増加すると、 m が増加し、 ϕ が増加する。 $R'(q)$ は (A 8) により q に関して減少関数であるから、同様に、 $\dot{\phi} = 0$ を満たす曲線上 ($(\alpha + r)\phi = R'(q)$) では、 q が増加すると ϕ が減少する。これらの曲線を Fig. 2 に示す。図中の小さな矢印は $(\dot{q}, \dot{\phi})$ の方向を示す。ゆえに、(3.17)~(3.19) 式の解は図の長い矢印のようになるが、(3.12) 式から最適解は $\phi(T) = 0$ を満足しなければならないため、結局、最適解は Fig. 3 のようにタイプ I~III

のいずれかをとる。Fig. 3 からつぎのことが定性的にいえる。

(i) 初期の質 q_0 が比較的低いとき、解はタイプ I をとる。このとき $\phi(t) < 0$ であるから、 $m^*(t) = (g')^{-1}(1/\phi)$ は常に減少する。 $q(t)$ はある時刻まで増加し、その後減少する。すなわち、供給者は、質を最初良くするように補修計画を立てる (Fig. 4(a))。

(ii) q_0 が中程度であれば、タイプ II の解となる。 $m^*(t)$ と $q(t)$ は時間が経つにつれて常に減少する (Fig. 4(b))。

(iii) q_0 が高いとき、解はタイプ III をとり、 $q(t)$ は常に減少する。 $m^*(t)$ はある時刻まで増加し、その後減少する (Fig. 4(c))。

3.4.2 家賃の上昇がある場合 ($\eta > 0$)

このとき、最適解が満足する条件は、(3.17)と(3.19)式と(3.18)式の $R'(q)$ を $R'(q)e^{\eta t}$ におき換えた式である。前節と同様に解を q - ϕ 平面に描くと、 $\dot{q}=0$ の曲線は Fig. 2 と同じであるが、 $\dot{\phi}=0$ の曲線は Fig. 5 に示すように時間が経つにつれて右上に移動する。解の進行方向は Fig. 2 と同様になる。 $\phi(T)=0$ の条件から、最適解は Fig. 5 のように 6 つのタイプをもち、つぎのことがいえる。Fig. 5 のタイプ I ~ III は Fig. 4 で述べたタイプ I ~ III に対応する。

(i) T が比較的小さいとき、最適解は軌道が短い方 (タイプ I ~ III) をとるから、このとき前節の (i) ~ (iii) と同様に、住宅の初期の質 q_0 によって解はタイプ I ~ III のいずれかになる。

(ii) T が長いとき、解はタイプ IV ~ VI のいずれかをとる。 q_0 が比較的低いとき、タイプ IV の解となり (Fig. 6(a))、 q_0 が中程度のとき、タイプ V の解となる (Fig. 6(b))、 q_0 が高ければ、解はタイプ VI をとる (Fig. 6(c))。

4. 比較静学分析

2~3 章における $R(q)$ 、 $g(m)$ の関数を特定化して、パラメータ (住宅の特性定数) の変化によって、補修費がどのように変化するかという比較静学分析を行う。

4.1 $q(m) \equiv \beta\sqrt{m}$ の場合

$R(q) \equiv R_0 \cdot q$ 、 $g(m) \equiv \beta\sqrt{m}$ (R_0 、 β は定数) とおく。これらは (A 6) ~ (A 12) を満足する関数である。このとき、(3.9) ~ (3.16) 式はつぎのように計算される。

$$\dot{q} = -\alpha q + \beta\sqrt{m} \quad (4.1)$$

$$\dot{\phi} = (\alpha + r)\phi - R_0 e^{\eta t} \quad (4.2)$$

$$q(0) = q_0 \quad (4.3)$$

$$\phi(T) = 0 \quad (4.4)$$

$$-1 + \beta\phi/2\sqrt{m} + \mu = 0 \quad (\text{注 1}) \quad (4.5)$$

Fig. 4 The optimal maintenance when $\eta = 0$

Fig. 5 The optimal trajectories when $\eta > 0$

Fig. 6 The optimal maintenance when $\eta > 0$

$$m \geq 0 \quad (4.6)$$

$$\mu \cdot m = 0 \quad (4.7)$$

$$\mu \geq 0 \quad (4.8)$$

(4.2) と (4.4) 式により

$$\phi(t) = e^{(\alpha+r)t} \int_t^T R_0 e^{\eta \xi} e^{-(\alpha+r)\xi} d\xi \quad (4.9)$$

← (注 1) $g(m) = \beta\sqrt{m}$ は $m=0$ で微分係数が定義されないの
で、このときは $m=0$ で考えることにする。

であり、(4.5)～(4.9)式から $\mu(t)=0$ ($t < T$) (注2) となるので、(4.5)式と定理1により

$$m^*(t) = \{\beta\phi(t)/2\}^2 \quad t < T \\ m^*(T) = 0 \quad (4.10)$$

ゆえに、(4.9)と(4.10)により、最適補修費は

$$m^*(t) = \left[\frac{R_0\beta}{2(\alpha+r-\eta)} e^{(\alpha+r)t} \{e^{-(\alpha+r-\eta)t} - e^{-(\alpha+r-\eta)T}\} \right]^2 \quad (4.11)$$

となり、 $\alpha+r-\eta > 0$ と仮定し、 $T \rightarrow \infty$ とすると

$$m^*(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0 e^{\eta t} \beta}{\alpha+r-\eta} \right)^2 \quad t < \infty \quad (4.12)$$

と求められる。

(4.11)～(4.12)式からつぎのことがいえる。

(i) 木造建築物のように、鉄筋コンクリート製に比べて質の老朽化が激しい (α が大きい) 住宅には、供給者は補修にあまり投資しない。これは、 α が大きいと、補修した効果が将来に大きく及ぼさないためである。

(ii) 家賃の上昇率 η が大きいときは、補修投資も大きくなる。

(iii) 現在の家賃 R_0 が高ければ、供給者は補修に力を入れる。

(iv) 補修の質への効果 β が大きければ、補修投資は大きくなる。

(i)において、木造と鉄筋コンクリート製の住宅を α の大きさのみで比較したが、実際には R_0, β も異なるので、これらも含めて、総合的に比較・評価しなければならない。

4.2 $g(m) \equiv \beta \log(m+1)$ の場合

つぎに、(A 9)～(A12)を満足する関数として、 $g(m) \equiv \beta \log(m+1)$ を選ぶ。 $R(q)$ に関しては前節と同様に仮定する。このとき、(3.9)、(3.13)式はつぎのように書かれる。

$$\dot{q} = -\alpha q + \beta \log(m+1) \quad (4.13)$$

$$-1 + \beta\phi/(m+1) + \mu = 0 \quad (4.14)$$

また、(3.10)～(3.12)、(3.14)～(3.16)の式はおのの(4.2)～(4.4)、(4.6)～(4.8)式と同様である。

$m > 0$ のときは、(4.7)式より $\mu = 0$ となることから、(4.14)式より

$$m^* = \beta\phi - 1 \quad (4.15)$$

と計算でき、(4.9)式から

$$m^*(t) = \frac{R_0\beta}{\alpha+r-\eta} \left[e^{(\alpha+r)t} \{e^{-(\alpha+r-\eta)t} - e^{-(\alpha+r-\eta)T}\} \right] - 1 \quad (4.16)$$

となる。ゆえに、 $m^*(0) > 0$ となる条件

$$\frac{R_0\beta}{\alpha+r-\eta} \{1 - e^{-(\alpha+r-\eta)T}\} > 1 \quad (4.17)$$

が成り立てば、

$$m(t') = 0$$

すなわち

$$e^{\eta(t'-T)} - e^{(\alpha+r)(t'-T)} = \frac{\alpha+r-\eta}{R_0\beta e^{\eta T}} \quad (4.18)$$

を満足する t' 以降では、定理2により、 $m^*(t) = 0$ ($t \geq t'$) となる。(4.18)式の両辺を $(R_0\beta)$ で微分すると

$$\frac{\partial t'}{\partial(R_0\beta)} = -\frac{\alpha+r-\eta}{(R_0\beta)^2 e^{\eta T}} \left[-(\alpha+r-\eta) e^{\eta(t'-T)} + (\alpha+r) \frac{\alpha+r-\eta}{R_0\beta e^{\eta T}} \right]^{-1} \quad (4.19)$$

が得られ、 $T \rightarrow \infty$ のとき $\alpha+r-\eta > 0$ の仮定から

$$\frac{\partial t'}{\partial(R_0\beta)} < 0 \quad (4.20)$$

となる。

(4.16)、(4.17)、(4.20)式からつぎがいえる。

(i) $m > 0$ であれば、前節の(i)～(iv)が成り立つ。

(ii) 現在の家賃 R_0 が高いか、あるいは、補修の質への効果 β が大きければ、供給者が補修する期間 $[0, t']$ は短くなる。

(iii) $R_0\beta/(\alpha+r-\eta)$ が十分小さいか、あるいは、供給者の計画期間 T が十分短ければ、(4.17)式が成り立たないため、住宅は補修されず、放置されてしまう。

5. 結 言

本論文では、住宅供給者の補修行動を最適制御問題の解として論じた。供給者は一度補修をやめると再度補修をすることはせず、最初にもっている住宅の質 q_0 によって6タイプにわかれるような補修行動をすることがわかった。たとえば、計画期間が短く、 q_0 が小さいとき、住宅は、最初質がよくなるように補修される。

また、住宅の質の老朽化率・補修の質への効果率・家賃などが補修費に及ぼす影響も考察した。例を挙げれば、老朽化率が大きい住宅に対しては、補修費は小さくなり、家賃が高くなれば、補修費が大きくなることはいえた。これらは妥当な結果だと考えられる。

本論文の供給者のモデルは時間に関して連続的なも

(注2) (4.5)～(4.8)式を満たし、 $\mu(t') > 0$ となる $t' (< T)$ があるとする。(4.9)式から $\phi(t') > 0$ 、(4.7)式から $m(t') = 0$ なので、(4.5)式より $\mu(t') < 0$ となり、(4.8)式に矛盾する。

のであるが、実際の供給者は定期的に補修をするというような離散的な行動をしていると考えられる。しかし、離散的モデルから導かれる結果⁶⁾が本論文の結果とほぼ等しいため、連続形のモデルが実際の供給者行動の十分良い近似になっていると思われる。

今後、以上の結果を評価するために実証分析を行う必要がある。また、都市の中で住宅がどのように分布しているかを調べるには、本論文で述べた供給者のモデルだけでは不十分であり、A3の仮定を取り除き、消費者のモデルをも含ませ、家賃を内生化した均衡論的分析が必要となろう⁷⁾。

最後に、本研究を進めるにあたり、有益な助言を与えてくださった豊橋技術科学大学折下功教授、京都大学山田浩之教授に深く感謝いたします。また、板谷は日頃からご指導いただいております東北大学竹田宏教授、阿部健一助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 早川和雄：住宅貧乏物語，岩波新書（1979）
- 2) J.L. Sweeny：Housing Unit Maintenance and the Mode of Tenure, Journal of Economic Theory 8, 111/138 (1974)
- 3) D.G. Luenberger：A Nonlinear Economic Control Problem with a Linear Feedback Solution, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-20-2, 184/191 (1975)
- 4) R.J. Arnott, R. Davidson and D. Pines：Housing Quality and Maintenance, Discussion Paper No. 396, Dept. of Economics, Queen's University (1980)
- 5) 坂和愛幸：最適化と最適制御，森北出版（1980）
- 6) 板谷，斎藤，折下：地価の最適制御論的評価，計測自動制御学会論文集，18-3, 306/308 (1982)
- 7) 板谷，竹田，斎藤：都市における住宅立地に関する一考察，第25回自動制御連合講演会前刷，469/470 (1982)
- 8) 山田浩之：都市の経済分析，東洋経済新報社（1980）
- 9) 板谷，折下，斎藤：都市発展過程における builder の意思決定モデル，第20回 SICE 学術講演会予稿集，89/90 (1980)
- 10) 板谷，斎藤：住宅所有者の最適補修行動，第21回 SICE 学術講演会予稿集，105/106 (1982)