強連結成分を有するシステムのグラフ自動作図化手法[†]

原 良 憲*・茅 陽 一**

Automatic Display of the Structure of a Strongly Connected System

Yoshinori HARA* and Yoichi KAYA**

Automatic display of a given system structure is a useful tool in the analysis of large scale systems.

This paper presents a method for drawing a graph representing the system structure, which is basically an extensive application of Tutte's method to a system consisting of components strongly connected with each other.

Steps are, firstly to extract a strongly connected graph from a given system, secondly to condense the graph and extract a proper planar graph, thirdly to locate its vertices on the two-dimensional space so as to construct a graph without any crossing of edges, and finally to complete the entire figure by adding both the condensed vertices and the deleted edges.

Application to a few system models such as a model of climatic effects of carbon dioxide and a social event map in Japan demonstrates usefulness of this method. The graphs envisaged by this method have the following characteristics.

- 1) A system can be expressed as a graph with straight edges in which the number of edge crossings are almost minimized.
- 2) A system can be easily disaggregated into sub-blocks, as the graph is drawn on the principle that the closer related vertices are, the nearer they are located to each other.
- 3) The process is flexible enough to allow some important cycles in the system to be located in the center of the system graph, which may help realize the entire system

structure, especially in the case of closely connected social systems.

Keyword: automatic display, system structure, strongly connected graph, barycentric mapping, planar graph

1. はじめに

一般に、システムの分析やモデル化に当っては、まず対象システム内の要素間の関係を二次元平面上のグラフとして表現してみるのが普通である。これにより、要素間の関係を全体的に把握できるし、また、いくつかのサブシステムへの分割も必要に応じ可能となる。

このような作業は、要素数の少ないときは直感に頼って行うことができるが、システムが大規模化すると手作業では困難で計算機を利用した自動作図が必要となる。従来、その手法としては大別して二つの手法がある。その第一は、システムの階層構造化を基本目標とするもので、ISM (Interpretive Structural Modeling)¹⁾や DEMATEL (Decision Making Trial and Evaluation Laboratory)²⁾などの構造分析手法に基礎をおいている。杉山らのスケッチシステム^{3),4)}、藤田らによる PPDS, HSA^{5),6)}、Carpano の方法⁷⁾などはいずれもこの手法に属する。その第二は、要素間の関連性の強さを尺度に、関連の強いもの同士を近くに、という考え方で要素群を平面上に配置するもので、従来から行動計量学などの分野で広く用いられている数量化理論IV類^{8),9)}や、斥力・引力の概念を用いた西部・寺野の方法¹⁰⁾などはこの範疇に属する。

しかし、社会・経済システムなどでしばしばみられるように、要素間の関係が有向的でしかも強連結性が強く、システム内にループ（ないしはサイクル）が数多く存在する場合は、上記の諸手法は必ずしも有効なものではない。第一の手法は、本来ループの少ない階層形のシステムに対するもので、この形の手法では比較的有効とみられるグエン・寺野の方法¹¹⁾も、結局は階層構造のサブシステムをベースにグラフを構築す

[†] 第8回システムシンポジウムで発表（昭和57・8）

* 日本電気(株) C&C システム研究所 川崎市宮前区宮崎 4-1-1

** 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* C&C Systems Research Laboratories, NEC Corp., Kawasaki

** Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received September 2, 1983)

(Revised March 10, 1984)

るもので、適用範囲に限界がある。一方、第二の方法は、システムのグラフ理論的構造関係は直接扱わず、要素間の関連を比例尺度でとらえ図を描くので、しばしば要素間の関連を示す線（グラフ理論でいう辺）の交差数が非常に多くなり、図から要素間関連を視覚的に把握することは困難となる。

本論文で提案する手法は、このような事情を考慮し、いくつかのループを有する強連結性の強いシステムに対し、無向平面グラフに対する Tutte の直線表示手法¹²⁾を修正拡張し、みやすいグラフの自動作図法としたものである。すなわち、システム中の強連結成分をまず抽出（それ以外の部分は階層化が可能である）し、これを無向グラフとみなしてその中からさらに平面グラフを構成する成分を抜き出す。しかるのち、Tutte の手法を拡大適用することにより、辺交差のない、直線のみで構成され、しかも頂点が平面上に比較的均一に配置された見やすいグラフが得られる。最後に、平面グラフを抽出する際取り残された辺がグラフに追加される。

この方法は、辺交差数が少ないグラフ表現ができるので、グラフが見やすく、また関連の遠い頂点同士はグラフ上で遠く離れて配置されることとなるので、システムのサブブロックへの分割が容易に行い得るという特徴をもつ。なお、LSI チップ上の配線問題も広義にはこの種の手法と考えられるが、システム構造の把握という本論文の目標とは目的が異なっており、そのままシステム構造表現手法として用いることはできないことを断っておこう。

以下、2章では本手法の基礎事項を、3章では開発した作図アルゴリズムを、4章では適用例を述べる。

2. バリセントリック写像

本章では、手法の基礎となる Tutte のバリセントリック写像 (Barycentric mapping)¹²⁾について説明する。一般に、グラフが平面グラフであれば、2次元上で辺の交差なしに直線のみで表示できることが証明されている¹³⁾。バリセントリック写像は、3連結な平面グラフに対して、直線描画可能な頂点配置を与える作図法である。本手法では、大部分の頂点配置を計算により決定できる点、および平面グラフを構成する辺間では直線で辺を描いても交差しないというバリセントリック写像の特徴を利用して要素配置を行っている。

まず、用語の定義を行う。単純グラフとは、自己ループおよび平行辺を含まないグラフである。3連結グラフとは、単純グラフであり、かつ2頂点を分割しても、トリビアルでない部分グラフに分けることのでき

ないグラフである。周辺多角形(peripheral polygon)とは、平面グラフの面(face)を構成する閉路である。各面に対応する閉路をまとめて周辺多角形集合と総称する。

つぎにバリセントリック写像の手順を示す。これは、3連結平面グラフに対して適用するものである。ある一つの周辺多角形を構成する頂点を $v_1, v_2, \dots, v_n$ とし、残りの頂点を $v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_m$ とする。また頂点 v_i の X, Y 座標をおのおの $X(v_i), Y(v_i)$ とする。(Step 0) 対象とする3連結平面グラフに対して、あらかじめ、周辺多角形集合を抽出しておく。

(Step 1) ある一つの周辺多角形を凸形に適当に配置する。すなわち、

$$X(v_i) = X_i \quad (1)$$

$$Y(v_i) = Y_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

と与える。

(Step 2) 全ての辺を1 Ω の抵抗回路網とみなす。ここで、 $v_i (i=1, \dots, m)$ の電圧を $E(v_i)$ と記す。

(Step 3) $v_i (i=1, \dots, n)$ の頂点に対して X 座標と同じ値の電圧を与える。

$$E(v_i) = X(v_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

$E(v_i) (i=n+1, \dots, m)$ は(4)式の節点方程式を解くことにより求められる。

$$\begin{bmatrix} g_{n+1n+1} & g_{n+2n+1} & \dots & g_{nn+1} \\ g_{n+2n+1} & g_{n+2n+2} & \dots & g_{nn+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{mn+1} & g_{mn+2} & \dots & g_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(v_{n+1}) \\ E(v_{n+2}) \\ \vdots \\ E(v_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^n g_{n+1j} E(v_j) \\ -\sum_{j=1}^n g_{n+2j} E(v_j) \\ \vdots \\ -\sum_{j=1}^n g_{mj} E(v_j) \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、

対角要素 g_{ii} : 頂点 v_i に接続されている全コンダクタンスの和 (隣接頂点数)

非対角要素 g_{ij} : 頂点 v_i と頂点 v_j とに接続されているコンダクタンス $\times (-1)$

すなわち、 $g_{ij} = \begin{cases} 0 : v_i \text{ と } v_j \text{ とが隣接していない。} \\ -1 : v_i \text{ と } v_j \text{ とが隣接している。} \end{cases}$

得られた電位 $E(v_i) (i=n+1, \dots, m)$ をその点の X 座標とする。すなわち、

$$X(v_i) = E(v_i) (i=n+1, \dots, m) \quad (5)$$

(Step 4) Y 座標に対しても Step 3 と同様の操作を行う。すなわち、

$$E(v_i) = Y(v_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (6)$$

として(4)式の節点方程式を解き、

Fig. 1 Barycentric mapping

$$Y(v_i) = E(v_i) \quad (i = n+1, \dots, m) \quad (7)$$

とする。

このようにして、直線描画可能な頂点配置を決定することができる。Fig. 1 は $n=5$, $m=8$ の場合の 1 例で、実際に計算して配置したものである。この場合、 $v_1 \sim v_5$ の頂点配置を行うことにより、 $v_6 \sim v_8$ の配置を決定することができる。ここで閉路 $v_1 v_2 v_6$ や $v_1 v_6 v_8 v_5$ などとも周辺多角形であるので、最初に凸形に配置して作図可能である。

またこのとき、節点方程式を解いたこと、および最初に配置した周辺多角形が凸形になっていることより明らかに、節点方程式を解いて求められた頂点は、この周辺多角形の内部に配置される。

つぎに頂点数を V 、辺数を E 、面数(周辺多角形数)を F とすれば、オイラの公式

$$V - E + F = 2 \quad (8)$$

および、平面グラフの頂点と辺の関係

$$E \leq 3V - 6 \quad (9)$$

より、周辺多角形の総数は、

$$F \leq 2V - 4 \quad (10)$$

により限定される。この中で適切なもの(たとえば、最大長のものや、重要な意味をもつもの)を選び出し、周辺に配置させれば良い。

バリセントリック写像を実行する場合、つぎの点に注意の要がある。もし、3 連結グラフでなければ、内

部の頂点が一直線上に並ぶ場合が生ずる。(Fig. 2(a)において、破線内の頂点が一直線上に並ぶ。)また、周辺多角形でない閉路を最初に配置した場合、内部の部分グラフが二つ以上存在して独立に配置されるので、内部の辺が交差し得る。(Fig. 2(b)) さらに初期形状を凹にした場合、この閉路の外側に頂点が出て交差する場合が起こり得る。

よって、3 連結平面グラフに対して、周辺多角形を凸形に配置することが、バリセントリック写像を適用するための条件である。しかしこのままでは、頂点配置にかたよりができたり、要素の意味を考慮した関連配置が行えない。そこで、この問題点を補い、システムの強連結成分の表現を行うに適切な手法とするために、次章に示す検討を行った。

3. 平面グラフに基づく自動作図化手法の検討

一般に、強連結成分を無向グラフ化したグラフは非平面グラフとなる。これを、できるだけ少ない辺交差数のグラフに表現するには、できるだけ多くの辺を含む平面グラフを元の非平面グラフから抜き出す必要がある。そのためには、つぎの手順をとる。

まず、従来より知られている発見的手法¹⁴⁾で平面グラフを抽出、これを初期解とする。つぎに、その双対グラフ(面を頂点、面と面に隣接する辺を辺とするグラフ)を用い、非平面辺の代替の評価を行う。この方法とその意味はつぎの通りである。

(1) 双対グラフ上で非平面辺に対応する最短経路は、もとの平面グラフのどの辺と交差するかを表わしており、しかも最小の交差数を与えるものである。ここで、頂点は、双対グラフ上で面に対応するので、最短経路は、双対グラフ上の、(もとの平面グラフの二つの頂点に対応する)二つの面を構成する頂点間の最短パスと定義する。たとえば、Fig. 3(a)における一点鎖線の非平面辺は、Fig. 3(b)の双対グラフ上では、4 本の最短経路に相当している。

Fig. 2(a) Two-terminal subgraph

(b) Example of arranging peripherally the circuit which does not satisfy the condition of being a peripheral polygon

Fig. 3(a) Planar graph and a nonplanar edge
(b) Dual planar graph and shortest paths which correspond to the nonplanar edge

(2) またこの最短経路は、平面グラフを抽出する際の競合関係を表わしている辺とみなすことができる。そこで、全ての非平面辺に対して、対応する最短経路を重ね合わせることににより、現在平面グラフを構成している辺のうちで、ネックとなっているものを検出することができる。このネックとなる辺は、最短経路の重ね合わせが多いものである。このネックとなる辺を切断して、そのかわりに切断した辺より多くの辺が平面グラフの構成辺となれば、改善が行えたことになる。厳密には、う回する場合も考慮しなければならない。しかし、計算時間が増大するため、ここでは、最短経路のみに着目する。このような操作を用いて、除去する非平面辺が最小になる方向で、平面グラフの抽出を行うことができる。

つぎに、作られたグラフの辺の長さ、頂点位置の修正を行う。すなわち、全抵抗 $1\ \Omega$ のままで、バリセントリック写像を行った場合には、内部の頂点間の配置に疎密があり、必ずしもバランスのとれた配置が行えるとは限らない。そこで、各辺の長さの下限を設定した、各面の面積の分散最小化アルゴリズムを考案し、各辺の抵抗値を変化させて適用した。ここでは、アルゴリズムの簡単化のため、1本ずつ抵抗値を順次最適化していく次元探索を採用した。なお、本論文の趣旨は、評価基準の設定にあるため、特に非線形最適化手法は用いなかった。以下に手順を示す。

(Step 1) 初期値として、全抵抗 $1\ \Omega$ のままで、バリセントリック写像を行う。

(Step 2) 内部の辺に対して、長い辺から順次、抵抗の変更を行う。ここでは、一つの辺のみを変化させて最適化を行う次元探索である。すなわち、対象とする辺に対して、 $2^m (m = -10, \dots, 10)$ 程度の離散的な値をとらせ、各辺の長さが、下限値 l_0 を満たす範囲で、最小の分散値を示す抵抗値を決定するものである。面積分散の最小化に対しては、 l_0 は小さいほうが

良いが、あまり小さいと、シンボルと辺とが交差する場合がある。そこで l_0 は、要素を表わすシンボルの幅の数倍程度としている。

(Step 3) 分散の変化率が、一定値以下になれば、ほぼ収束したものとみなし、終了する。そうでなければ、(Step 2) に戻り、繰り返し実行する。

Fig. 4 を見てもわかるように、上記の操作を施せば、バランスのとれた配置が可能となる。

上記の各処理を組合わせた手順を以下にまとめて示す。これは、要素の隣接情報をもとにして、それに対応するグラフを作図するものである。

(Step 1) 隣接行列の入力。

(Step 2) 強連結成分の抽出および、無向グラフ化。

(Step 3) 無向グラフの縮約。計算量の軽減と、単純グラフ化のため、隣接辺が2本以下の頂点、平行辺、および自己ループの縮約を行う。

(Step 4) 縮約平面グラフの抽出。PQ-木¹⁵⁾ (制約付き順列を表わす一種の縮約木である。)を用いて、極大平面部分グラフの抽出¹⁴⁾を行う。(ここで、極大平面部分グラフとは、除去したいかなる辺を付加しても、平面性が保てなくなる平面グラフである。) つぎに Step 3 と同様の縮約により、縮約平面グラフを得る。

(Step 5) 3 連結グラフでないときの処理。この場合は、適当な2点分割することより部分グラフ分解される。適宜、グラフの分割、またはダミー辺の挿入を行って、個々のグラフを3 連結グラフとする。

(Step 6) 非平面辺の評価。前ステップまでの平面グラフを初期グラフとし、双対グラフを用いた非平面辺の代替評価を対話的に行う。この後、前述の考察をもとに、適切な非平面辺集合を得る。

(Step 7) 周辺多角形の抽出。まず、最短長の閉路を抽出し、これにバリセントリック写像を適用する。この要素配置をもとにして、各面を構成する閉路 (周辺

Fig. 4(a) Barycentric mapping when all resistances are $1\ \Omega$
(b) Barycentric mapping after resistances were modified

Fig. 5 Flow chart of this method

Table 1 Adjacency matrix of a model of climatic effects of carbon dioxide

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1																														
2																														
3																														
4																														
5																														
6																														
7																														
8																														
9																														
10																														
11																														
12																														
13																														
14																														
15																														
16																														
17																														
18																														
19																														
20																														
21																														
22																														
23																														
24																														
25																														
26																														
27																														
28																														
29																														
30																														

多角形)を全て抽出し、周辺多角形集合を得る。

(Step 8) 修正バリセントリック写像の適用. 抽出周辺多角形集合の中で適切なもの(たとえば, 最大長のもの)を周辺に配置し, 前述のアルゴリズムを用いて, バランスのとれた要素配置を行う。

(Step 9) 除去辺, 縮約頂点の挿入, および要素間の結線. これにより, みやすいグラフが描けたならば, 最終出力図とする. そうでなければ, Step 4 (平面グラフが不適切), または Step 8 (周辺に配置した周辺多角形が不適切または, 初期配置の形状が不適切)に戻る. これは利用者が判断する. 以下同様の操作を繰返す。

なお, 対話回数は最小で, Step 6, 8, 9 および最終図に対する判断の合計 4 回である。

本手法のフローチャートを Fig. 5 に示す。

4. 適用例

本論文の提案作図法の有効性を調べるため, これを以下の二例に対し適用してみた. 第一は, 鈴木¹⁶⁾の炭酸ガスと気候変動関連図¹⁶⁾, 第二は, 筆者らによる我国社会問題関連図¹⁷⁾である. 前者については, Table 1 のように隣接行列が与えられている. 後者については, 隣接行列をもとに数量化理論 IV 類^{8), 9)}を適用した図表現が与えられている. このうちの強連結成分のみを抽出した図を Fig. 7 に示す。

まず前者の例では, 強連結成分として 23 の要素が抽出された. 縮約の後, 2 本の非平面辺を除去すると, 平面グラフが得られる. このとき, 12 の周辺多角形が抽出されるが, ここでは最大長のものを周辺に配置した. このグラフに対し, 面の面積分散を最小化するアルゴリズムを適用したものが Fig. 4(b) であり, さらにこれに縮約頂点, 縮約辺, 非平面辺, 非強連結

Fig. 6 Final output of a model of climatic effects of carbon dioxide by this method

部分を付加した最終出力図が Fig. 6 である。これらの頂点の要素の意味は Table 2 に示されているが、Fig. 6 を見ると、化石燃料使用と CO₂ 濃度増大の問題が、気候変動を通じ食糧問題につながり、それが森

Table 2 List of a model of climatic effects of carbon dioxide

1.	Increase in population
2.	Increase in industrial production
3.	Deforestation
4.	Increase in energy demands
5.	Increase in CO ₂ density in the air
6.	Rise in average temperature of the globe
7.	Rise in climate in the North Pole
8.	Decrease of floating ices in the Arctic Ocean
9.	Decrease in albedo of the Arctic area
10.	Decrease in albedo of the globe
11.	Warming of the northern hemisphere
12.	Destruction of plants
13.	Destruction of soil
14.	Increase in arable lands
15.	Increase in fertilizer use
16.	Increase in production of foods
17.	Increase in food demands
18.	Increase in biomass use
19.	Increase in fossil fuel consumption
20.	Increase in asymmetric circulation of the air around the globe
21.	Desertification
22.	Increase in NO ₂ density in the air
23.	Development of Siberia and Canada
24.	Degradation of river water quality
25.	Decrease in water supply
26.	Increase in salt content of the surface water in the Arctic Ocean
27.	Explosion of volcanos
28.	Increase in dust density of the air in the Arctic (Antarctic) area

Fig. 7 Strongly connected component of the EVENT MAP

Table 3 List of the strongly connected components of the EVENT MAP

2.	Development of motorization
3.	Development of transportation system
6.	Change in the pattern of food consumption
7.	Enlargement of gigantic enterprises
9.	Development of means of communication
10.	Progress of data processing
11.	Shortening of working hours
13.	Progress of medical techniques
14.	Flood of information
16.	Pollution of sea water
19.	Enlargement of scale of industrial disasters
22.	Decrease in fishery resources
25.	Revolution of vocational conscience
26.	Increase of monotonous labor
28.	Lack of opportunity of employment for older people
29.	Increase in the number of people without purpose of life
30.	Backwardness of agriculture
31.	Spreads of management system using computers
32.	Rise in Prices
34.	Existence of income and wealth differentials
35.	Expansion of tertiary industry
36.	Insufficient social security
37.	Increase in older population
38.	Overcrowding of cities
44.	Spread of the feeling of human alienation
46.	Shortage of houses
47.	Soaring land prices
49.	Shortage of social capital related to life
51.	Disregard of social norms
53.	Spread of pattern media
54.	Development of leisure industry
56.	Increase in political apathy
69.	Increase in foreign enterprises in Japan
70.	Progress in trade liberalization
71.	Increase in the surplus balance of payments

- 5) 梶, 薦田, 中尾, 春名: グラフィックディスプレイを用いたシステム構造分析システムの提案, 情報処理学会第20回全国大会, IF-2, 669/670 (1979)
- 6) 薦田, 春名, 中尾: サイクルを含むシステムの階層的構造分析—HSA, 電気学会論文誌, **C-100-12**, 395/401 (1980)
- 7) M. J. Carpano: Automatic Display of Hierarchized Graphs for Computer-Aided Decision Analysis, IEEE Trans. on System, Man & Cybernetics, **SMC-10-11**, 705/715 (1980)
- 8) 林, 樋口, 駒沢: 情報処理と統計数理, 産業図書 (1970)
- 9) 林知己夫: 数量化の方法, 東洋経済新聞社 (1974)
- 10) 西部, 寺野: グラフの自動作画における節点配置問題に関する一考察, 第20回自動制御連合講演会前刷, 3023, 357/358 (1977)
- 11) 寺野, グエン: ボトルネック法による強連結グラフの分割法とその応用, 計測自動制御学会論文集, **12-6**, 681/686 (1976)
- 12) W. T. Tutte: How to Draw a Graph, Proc. London Math. Soc. **3-13**, 743/768 (1963)
- 13) I. Fáry: On Straight Line Representation of Planar Graphs, Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math. **11**, 229/233 (1948)
- 14) 小沢, 高橋: PQ-木を用いたグラフの平面化アルゴリズム, 電子通信学会研究会資料, **CAS 79-150**, 25/30 (1979)
- 15) K. S. Booth, et al.: Testing for the Consecutive Ones Property, Internal Graphs, and Graph Planarity Using PQ-Tree Algorithms, J. of Com. and Sys. Sci. **13**, 335/379 (1976)
- 16) ローマクラブ東京コンファレンス(1982)working groupにおける鈴木氏の discussion paper
- 17) Y. Kaya, et al.: An Approach to General Social System Simulation, Tokyo 1971 AICA Symposium on Simulation of Complex Systems, **1-2**, 1/6 (1971)