多分割ペトリネットの記述と発火†

大塚 浩 仁*・久 村 富 持*

Description and Firing of the Decomposed Petri Net

Hirohito OHTSUKA* and Tomiji HISAMURA*

1. ま え が き

ペトリネットは並列、競合システムの記述、解析に有用であるが、最近、シーケンス制御などの制御問題へも応用され始めている^{1)~7)}。一般に、システムをペトリネットでモデル化する場合、多数のプレースやトランジションが必要となる場合が多く、全システムをいくつかの適当な大きさのブロックに分割して記述、解析できれば便利である。本文はこの観点から、先に発表した2分割の場合⁸⁾を一般の $n(\geq 2)$ 分割の場合に拡張したもので、接続行列表現を用いて分割ペトリネットおよび統合ペトリネットの記述と発火条件、マーキング遷移について考察した。2分割の場合は、結合ブロックは他の一つに限られるが、3分割以上の場合は、その結合状態を示す「仮想ノード接続行列」の導入が必要になる。

2. n 分割ペトリネットの記述

マーク付ペトリネットを $N=(P, T, A^-, A^+, \mu)$ で表わす。ただし、

$P=[p_1 p_2 \dots p_r]^T$; プレースを表わす p -ベクトル
 $T=[t_1 t_2 \dots t_s]^T$; トランジションを表わす t -ベクトル
 A^- ; トランジションへの入力プレースを表わす $(t \times p)$ 接続行列
 A^+ ; トランジションからの出力プレースを表わす $(t \times p)$ 接続行列
 $A \triangleq A^+ - A^-$; ペトリネットの接続行列
 $\mu=[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r]^T$; プレースのマーキングを表わす p -ベクトル
 (肩の T は行列の転置)

2.1 n 分割システムの記述 ($n \geq 2$)

一般的な手順を以下に説明する。

ステップ 1; アークと分割線の交点において、アーク上に交点をはさんでプレース側には仮想のトランジション (ct) を、トランジション側には仮想のプレース (cp) を置き (図中 印), アークの向きも書く。

ステップ 2; それぞれの分割されたペトリネットについて ct, cp をも含む接続行列 $A_i^-, A_i^+ (i=1 \sim n)$ をつぎのように作る。

ブロック $i (i=1 \sim n)$

$$A_i^\pm = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \text{本来の} & \text{仮想の} \\ \text{プレース} & \text{プレース} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{cc} A_{i1}^\pm & A_{i2}^\pm \\ A_{i2}^\pm & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{本来のトランジション} \\ \text{仮想のトランジション} \end{array} \end{array} \quad (1)$$

ステップ 3; システム全体の仮想トランジションと仮想プレースの接続関係を示す「仮想ノード接続行列 $C^\pm$ 」をつぎのように作る。ここで $C_{ij}^\pm$ の要素は、 ct から cp への接続があるときは1、ないときは0とし、また $C_{ij}^\pm$ については前文で cp と ct の関係を置きかえたものである。

$$C^\pm = \begin{array}{c|ccc|c} \begin{array}{c} \text{ブロック} \\ 1 \text{ の仮想} \\ \text{のプレース} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ブロック} \\ 2 \text{ の仮想} \\ \text{のプレース} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \text{ブロック} \\ n \text{ の仮想} \\ \text{のプレース} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ C_{21}^\pm \\ \vdots \\ C_{n1}^\pm \end{array} & \begin{array}{c} C_{12}^\pm \\ 0 \\ \vdots \\ C_{n2}^\pm \end{array} & \dots & \begin{array}{c} C_{1n}^\pm \\ \dots \\ C_{2n}^\pm \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{ブロック 1 の仮想} \\ \text{のトランジション} \\ \text{ブロック 2 の仮想} \\ \text{のトランジション} \\ \vdots \\ \text{ブロック } n \text{ の仮想} \\ \text{のトランジション} \end{array} \end{array} \quad (2)$$

なお、ブロック i に仮想のプレースまたは仮想のトランジションが存在しない場合は、(1)においては $A_{i2}^\pm = [0, \dots, 0]^T$ (本来のトランジションと同じ数の0をもつ列ベクトル) あるいは $A_{i1}^\pm = [0 \dots 0]$ (本来のプレースと同じ数の0をもつ行ベクトル) を、また、(2)においては $[C_{i1}^\pm, \dots, C_{in}^\pm]^T = [0 \dots 0]^T$ (仮想のトランジションと同じ数の0をもつ列ベクトル) あるいは $[C_{i1}^\pm \dots C_{in}^\pm] = [0 \dots 0]$ (仮想のプレースと同じ数の0を

† 第6回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 58・12)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo
(Received December 7, 1983)
(Revised March 24, 1984)

Keyword: Petri net, decomposition, firing condition

もつ行ベクトル) を該当箇所へ挿入する。

2.2 統合システムの記述

一般に n 分割されたシステムを統合した接続行列を

$$A^{\pm} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ブロック} & \text{ブロック} & & \text{ブロック} \\ \text{1の本来} & \text{2の本来} & \cdots & \text{nの本来} \\ \text{のプレー} & \text{のプレー} & & \text{のプレー} \\ \text{ス} & \text{ス} & & \text{ス} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{cccc} A_{11}^{\pm} & A_{12}^{\pm} & \cdots & A_{1n}^{\pm} \\ A_{21}^{\pm} & A_{22}^{\pm} & \cdots & A_{2n}^{\pm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^{\pm} & A_{n2}^{\pm} & \cdots & A_{nn}^{\pm} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{ブロック 1 の本来} \\ \text{のトランジション} \\ \text{ブロック 2 の本来} \\ \text{のトランジション} \\ \vdots \\ \text{ブロック n の本来} \\ \text{のトランジション} \end{array} \quad (3)$$

と書くとき、 $A_{ij}^{\pm}$ は各ブロックの接続行列と仮想ノード接続行列を用いてつぎのようにして求められる。

$$A_{ij}^{\pm} = \begin{cases} A_{ij}^{\pm} & (i=j) \\ A_{i2}^{\pm} (C_{ji}^{\mp})^T A_{1j}^{\pm} & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j=1 \sim n) \quad (4)$$

3. 接続行列による各ブロックの発火条件

全システムの、 i 段階での発火可能なトランジ

$$\mathbf{1}_i \mu_i^T - A^- = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{i1} \mu_{i1}^T - A_{11}^- & \cdots & \mathbf{1}_{i1} \mu_{in}^T - A_{12}^- C_{n1}^{+T} A_{21}^- \\ \mathbf{1}_{i2} \mu_{i1}^T - A_{12}^- C_{12}^{+T} A_{21}^- & \cdots & \mathbf{1}_{i2} \mu_{in}^T - A_{12}^- C_{n2}^{+T} A_{21}^- \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1}_{in} \mu_{i1}^T - A_{12}^- C_{1n}^{+T} A_{21}^- & \cdots & \mathbf{1}_{in} \mu_{in}^T - A_{11}^- \end{bmatrix} \quad (7)$$

であるから、ブロック j に対しては

$$\delta_{ij} = \text{Sgn}[\mathbf{r}_{\min}(\mathbf{1}_{ij} \mu_{ij}^T - A_{12}^- C_{ij}^{+T} A_{21}^-, \dots, \mathbf{1}_{ij} \mu_{ij}^T - A_{11}^-, \dots, \mathbf{1}_{ij} \mu_{in}^T - A_{12}^- C_{nj}^{+T} A_{21}^-)] \quad (j=1 \sim n) \quad (8)$$

が得られる。

4. ブロック j 中のトランジションの発火によるブロック k のマーキング遷移

i 段階で発火させるトランジションを δ_i 中の要素 1 の中から選び、つぎの「発火決定ベクトル d_i 」を作る。

$$d_i = [0, \dots, \overset{(t_1)}{0}, \overset{(t_{j-1})}{0}, \overset{(t_j)}{1}, \overset{(t_{j+1})}{0}, \dots, \overset{(t_n)}{0}]^T \quad (9)$$

(上の例では t_j を発火と決定)

この発火により $(i+1)$ 段階のマーキングは

$$\mu_{i+1} = \mu_i + A^T d_i, \quad (A = A^+ - A^-) \quad (10)$$

と表わされる。 μ_i, d_i を各ブロックごとに区切り

$$\mu_i = [\mu_{i1}^T, \mu_{i2}^T, \dots, \mu_{in}^T]^T,$$

$$d_i = [0^T, \dots, 0^T, d_{ij}^T, 0^T, \dots, 0^T]^T$$

とすれば、(3), (10) 式より i 段階におけるブロック j 中のトランジションの発火による $(i+1)$ 段階

のマーキング μ_i を用いて

$$\delta_i = \text{Sgn}\{\mathbf{r}_{\min}(\mathbf{1}_i \mu_i^T - A^-)\} \quad (5)$$

と表わすことができる⁸⁾。ただし、

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\min}\{M\}; \text{行列 } M \text{ の各行の最小要素を要素とする} \\ \text{列ベクトル,} \\ \text{Sgn}\{x\} = \begin{bmatrix} \text{sgn } x_1 \\ \vdots \\ \text{sgn } x_n \end{bmatrix}, \quad \text{sgn } x_i = \begin{cases} 1 & (x_i \geq 0) \\ 0 & (x_i < 0) \end{cases} \\ \mathbf{1}_i = [1, 1, \dots, 1]^T; (i \times 1) \text{ 列ベクトル} \end{cases}$$

2. の結果を (5) 式に応用すると、ブロック j の i 段階での発火可能ベクトル δ_{ij} は、以下のように求められる。すなわち、

$$\delta_i = [\delta_{i1}^T, \delta_{i2}^T, \dots, \delta_{in}^T]^T \quad (6)$$

(δ_{ij} はブロック j のトランジションの数の要素をもつベクトル)

t_j をブロック j の本来のトランジション数とすると

のブロック k のマーキング $\mu_{i+1,k}$ はつぎのように求められる。

$$\begin{bmatrix} \mu_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mu_{i+1,k} \\ \vdots \\ \mu_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i,1} \\ \vdots \\ \mu_{i,k} \\ \vdots \\ \mu_{i,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1k} \cdots A_{1n} \\ \vdots \\ A_{j1} \cdots A_{jk} \cdots A_{jn} \\ \vdots \\ A_{n1} \cdots A_{nk} \cdots A_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{ij} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_{jk} &= A_{jk}^+ - A_{jk}^- \\ &= \begin{cases} A_{11}^+ - A_{11}^- & ; (j=k) \\ A_{12}^+ (C_{kj}^-)^T A_{21}^+ - A_{12}^- (C_{jk}^+)^T A_{21}^- & ; (j \neq k) \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\therefore \mu_{i+1,k} = \mu_{i,k} + A_{kj}^T d_{ij} \quad (13)$$

5. 例 題

Fig. 1 の各ブロックの接続行列、仮想ノード接続行列は、それぞれつぎようになる。

Fig. 1 Decomposition of petri net into three blocks

(ブロック 1)

$$A_1^- = \begin{array}{c|ccc|c} & p_1 & p_2 & p_3 & cp_2 \\ \hline t_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline ct_1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ ct_2 & 1 & 0 & 0 & \end{array}, \quad A_1^+ = \begin{array}{c|ccc|c} & p_1 & p_2 & p_3 & cp_2 \\ \hline t_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline ct_1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ ct_2 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

(ブロック 2)

$$A_2^- = \begin{array}{c|ccc|ccc} & p_4 & p_5 & p_6 & cp_1 & cp_4 & cp_5 \\ \hline t_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline ct_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & & \end{array}, \quad A_2^+ = \begin{array}{c|ccc|ccc} & p_4 & p_5 & p_6 & cp_1 & cp_4 & cp_5 \\ \hline t_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline ct_2 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & & \end{array}$$

(ブロック 3)

$$A_3^- = \begin{array}{c|cc|c} & p_7 & p_8 & cp_3 \\ \hline t_7 & 0 & 1 & 1 \\ ct_4 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ ct_5 & 0 & 0 & \end{array}, \quad A_3^+ = \begin{array}{c|cc|c} & p_7 & p_8 & cp_3 \\ \hline t_7 & 1 & 0 & 0 \\ ct_4 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ ct_5 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$C^+ = \begin{array}{c|ccc|ccc} & cp_2 & cp_1 & cp_4 & cp_5 & cp_3 \\ \hline ct_1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ct_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline ct_2 & 0 & \mathbf{0} & & 0 & \\ ct_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ ct_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$C^- = \begin{array}{c|ccc|ccc} & cp_2 & cp_1 & cp_4 & cp_5 & cp_3 \\ \hline ct_1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ct_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline ct_2 & 1 & \mathbf{0} & & 0 & \\ ct_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ ct_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

初期 (0 段階) マーキングを $\mu_0 = [\mu_{01}^T, \mu_{02}^T, \mu_{03}^T] =$
 $(\begin{smallmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{smallmatrix})$
 $[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ としたときのブロック

2 の発火可能ベクトルは, (8) 式から

$$\delta_{02} = \text{Sgn} [r_{\min} (1_{t_2} \mu_{01}^T - A_{12}^T (C_{12}^+)^T A_{21}^T, \\ 1_{t_2} \mu_{02}^T - A_{12}^T, 1_{t_2} \mu_{03}^T - A_{12}^T (C_{32}^+)^T A_{21}^T)] \\ = \begin{pmatrix} t_4 & t_5 & t_6 \end{pmatrix}^T \\ = [1 \ 1 \ 0]^T$$

となり, t_4 と t_5 が発火可能であることがわかる. よって t_5 を発火と決定すると発火決定ベクトルは $d_{02} =$
 $\begin{pmatrix} t_4 & t_5 & t_6 \end{pmatrix}^T$ となり, ブロック 2 のトランジション t_5 の発火によるブロック 1 のマーキングは (12), (13) 式よりつぎのように求められる.

$$\mu_{11} = \mu_{01} + A_{21}^T d_{02} \\ = \mu_{01} + \{A_{12}^T (C_{12}^+)^T A_{21}^+ - A_{12}^T (C_{12}^+)^T A_{21}^T\}^T d_{02} \\ = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}^T \\ = [1 \ 0 \ 0]^T$$

6. む す び

数種の類似のブロック結合からなる大規模システムの解析, 設計などに, ここで述べた分割, 結合を用いた手法が有効と思われる. 他の分割方法 (プレスで分割する方法など) との比較などが今後の課題である.

参 考 文 献

- 1) Peterson: Petri Nets, Computing Surveys, **9**-3, 223/252 (1977)
- 2) Agerwala: Putting Petri Nets to Work, IEEE Comp. **12**-12, 85/94 (1979)
- 3) Peterson: Petri Net theory and the Modeling of Systems, Prentice Hall (1981)
- 4) 長谷川: マークフロウグラフと FA への応用, 計測と制御, **22**-11 (1983), ほか
- 5) Murata: Circuit Theoretic Analysis and Synthesis of Marked Graphs, IEEE, **CAS**-24-7, 400/405 (1977)
- 6) Murata: Petri Nets and Applications, 計測と制御, **22**-3, 265/273 (1983)
- 7) 角, ほか: 電力系統におけるスイッチ開閉シーケンスのペトリネットによる解析, システムと制御, **26**-9, 605/612 (1982)
- 8) 久村, 大塚: ペトリネットの分割, 統合とその発火条件, 第 26 回自動制御連合講演会前刷 (1983)