等式・不等式制約最適化問題の安定性理論†

相 吉 英 太 郎*

Stability Theory for Equality and Inequality Constrained Optimization Problems

Eitaro AIYOSHI*

1. はじめに

最適化問題の安定性の理論とは、最適化問題中のパラメータの変動が、最適値や最適解にどのような影響を与えるかを、関数や点対集合写像(注1)の連続性の概念を用いて論じるものである。このような理論は文献1)~4)によって考察されているが、目的関数にのみパラメータが存在する場合か、制約式右辺がパラメータ化されている場合、あるいは特殊な形の最適化問題に限られていた。これに対し Hogan⁵⁾(または6))は、目的関数および制約関数にパラメータを含むより一般的な型の不等式制約問題に対し、諸結果をまとめている。しかし、等式・不等式制約問題に対しては、それらの結果を直接拡張することができない。そこで本報告では、等式も有する最適化問題に対し Hogan の結果を一般化する。

2. 問題の記述と定義

パラメータ $x \in X \subset R^p$ を含む変数 y に関する等式・不等式制約条件つき最適化問題をつぎのように表わし、 $Y \subset R^n$, $f: R^p \times R^n \rightarrow R^1$, $g: R^p \times R^n \rightarrow R^m$, $h: R^p \times R^n \rightarrow R^l$, $l \leq n$ とする。

$$\min_y f(x, y) \quad (1a)$$

$$\text{subj. to } g(x, y) \leq 0 \quad (1b)$$

$$h(x, y) = 0 \quad (1c)$$

$$y \in Y \quad (1d)$$

このとき等式・不等式写像 $Q: X \rightarrow 2^Y$, 最適値関数 $\phi: X \rightarrow R^1$, 最適解写像 $S: X \rightarrow 2^Y$ を以下の式で定義する。

$$Q(x) = \{y \in Y \mid g(x, y) \leq 0, h(x, y) = 0\} \quad (2)$$

$$\phi(x) = \inf \{f(x, y) \mid y \in Q(x)\} \quad (3)$$

$$S(x) = \{y \in Q(x) \mid f(x, y) = \phi(x)\} \quad (4)$$

ここでは簡単化のため、任意の $x \in X$ に対し $Q(x) \neq \emptyset$ で有限の $\phi(x)$ が存在し、 $S(x) \neq \emptyset$ とする。

3. 等式・不等式写像・最適解写像の性質

《定理1》 $\{\bar{x}\} \times Y$ において、関数 g が下半連続、関数 h が連続、 Y が閉集合ならば、等式・不等式写像 Q は $\bar{x} \in X$ で閉写像である。

(証明) $\{x^k\} \subset X$, $x^k \rightarrow \bar{x}$, $y^k \in Q(x^k)$, $y^k \rightarrow \bar{y}$ とする。まず集合 Y の閉性より $\bar{y} \in Y$ 。一方、 g の下半連続性と $g(x^k, y^k) \leq 0$, および h の連続性と $h(x^k, y^k) = 0$ より

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} g(x^k, y^k) \leq 0,$$

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(x^k, y^k) = 0.$$

以上より $\bar{y} \in Q(\bar{x})$ である。

つぎに、等式・不等式写像の開写像性を与えるため、

$$Q^-(x) = \{y \in \text{int } Y \mid g(x, y) < 0, h(x, y) = 0\} \quad (5)$$

なる点対集合写像 $Q^-: X \rightarrow 2^Y$ を用意する。

《定理2》 関数 g が $\{\bar{x}\} \times Y$ で上半連続、関数 h が $\{\bar{x}\} \times Y$ で連続かつ y に関し連続微分可能で、 $h(\bar{x}, y) = 0$ なるすべての y に対し $\nabla_y h_i(\bar{x}, y)$, $i = 1, \dots, l$ が1次独立であり、 $Q(\bar{x}) = \text{cl } Q^-(\bar{x})$ がなりたつとする。このとき、等式・不等式写像 Q は $\bar{x} \in X$ で開写像である。

(証明) $Q^-(x)$ に対する仮定より $Q^-(\bar{x}) \neq \emptyset$ 。また $x^k \rightarrow \bar{x}$, $\bar{y} \in Q(\bar{x}) = \text{cl } Q^-(\bar{x})$ とすると、 $y^i \rightarrow \bar{y}$ なる $\{y^i\} \subset Q^-(\bar{x})$ が存在して

(注1) 点対集合写像 $Q: X \rightarrow 2^Y$ がつぎの性質をもつとき、 $\bar{x} \in X$ でそれぞれ (i) 閉写像, (ii) 開写像, (iii) 連続写像であるという。

(i) $\{x^k\} \subset X$, $x^k \rightarrow \bar{x}$, $y^k \in Q(x^k)$, $y^k \rightarrow \bar{y}$ ならば、 $\bar{y} \in Q(\bar{x})$ である。

(ii) $\{x^k\} \subset X$, $x^k \rightarrow \bar{x}$, $\bar{y} \in Q(\bar{x})$ ならば、すべての $k \geq K$ に対し $y^k \in Q(x^k)$ かつ $y^k \rightarrow \bar{y}$ なる自然数 K と点列 $\{y^k\}$ が存在する。

(iii) $Q: X \rightarrow 2^Y$ が $\bar{x} \in X$ で閉かつ開写像である。

† 第26回自動制御連合講演会で発表 (昭58・11)

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received December 7, 1983)

(Revised February 25, 1984)

Keyword: optimization problem, stability theory

$$g(\bar{x}, y^i) < 0, \quad h(\bar{x}, y^i) = 0, \quad y^i \in \text{int } Y$$

$$(6a, b, c)$$

がなりたつ。一方 h に対する仮定と $h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ より, ある分割 $\bar{y}^T = (\bar{y}_N^T, \bar{y}_B^T)$, $\bar{y}_N \in R^{n-l}$, $\bar{y}_B \in R^l$ に対し, $\nabla_{y_B} h(\bar{x}, \bar{y})$ が正則になり, かつ $(\bar{x}, \bar{y}_N)$ の近傍 $B(\bar{x}, \bar{y}_N; \varepsilon) \subset R^{p+n-l}$ と連続な関数 $\eta: B(\bar{x}, \bar{y}_N; \varepsilon) \rightarrow R^l$ が存在し, $\bar{y}_B = \eta(\bar{x}, \bar{y}_N)$ かつ

$$h(x, y_N, \eta(x, y_N)) = 0$$

$$\text{for } \forall (x, y_N) \in B(\bar{x}, \bar{y}_N; \varepsilon) \quad (7)$$

がなりたつ (陰関数定理). $y^i \rightarrow \bar{y}$ だから,

$$(\bar{x}, y_N^i) \in B(\bar{x}, \bar{y}_N; \varepsilon) \quad \text{for } \forall i > I_1 \quad (8)$$

なる自然数 I_1 が存在する. ゆえに

$$h(\bar{x}, y_N^i, \eta(\bar{x}, y_N^i)) = 0 \quad \text{for } \forall i > I_1. \quad (9)$$

これと式 (6b) および $y_B^i \rightarrow \bar{y}_B$, $\eta(\bar{x}, y_N^i) \rightarrow \bar{y}_B$ から

$$y_B^i = \eta(\bar{x}, y_N^i) \quad \text{for } \forall i > I_2 \quad (10)$$

なる自然数 I_2 が存在する. これと (6a) 式より

$$g(\bar{x}, y_N^i, \eta(\bar{x}, y_N^i)) < 0 \quad \text{for } \forall i > I_2. \quad (11)$$

となる. また (6c) 式と (10) 式より

$$(y_N^i, \eta(\bar{x}, y_N^i)) \in \text{int } Y \quad \text{for } \forall i > I_2. \quad (12)$$

一方, $x^k \rightarrow \bar{x}$ と (8) 式より, 各 $y^i \in \text{int } Y$, $i > I = \max\{I_1, I_2\}$ に対応した自然数 $l_1(i)$ が存在し,

$$(x^k, y_N^i) \in B(\bar{x}, \bar{y}_N; \varepsilon) \quad \text{for } \forall k > l_1(i)$$

がなりたつ. ゆえに (7) 式より

$$h(x^k, y_N^i, \eta(x^k, y_N^i)) = 0 \quad \text{for } \forall k > l_1(i). \quad (13)$$

また (11) 式と $x^k \rightarrow \bar{x}$, g の上半連続性, η の連続性より, 各 $y^i \in \text{int } Y$, $i > I$ に対応した自然数 $l_2(i)$ が存在し,

$$g(x^k, y_N^i, \eta(x^k, y_N^i)) < 0 \quad \text{for } \forall k > l_2(i). \quad (14)$$

さらに, $x^k \rightarrow \bar{x}$ と η の連続性および (12) 式より, $i > I$ に対応した自然数 $l_3(i)$ が存在し

$$(y_N^i, \eta(x^k, y_N^i)) \in Y \quad \text{for } \forall k > l_3(i). \quad (15)$$

各 $i > I$ に対応するすべての $l_1(i)$, $l_2(i)$, $l_3(i)$ の集合のうち, おのおの最小のもの $\min\{l_1(i)\}$, $\min\{l_2(i)\}$, $\min\{l_3(i)\}$ をとり, $n^I = 0$ とし, $i = I+1, I+2, \dots$, に対して

$$n^i = \max[n^{i-1} + 1, \min\{l_1(i)\}, \min\{l_2(i)\}, \min\{l_3(i)\}]$$

なる数列 $\{n^i\}$ を考えると, (14), (13), (15) 式より,

$$g(x^k, y_N^i, \eta(x^k, y_N^i)) < 0 \quad \text{for } \forall k > n^i,$$

$$h(x^k, y_N^i, \eta(x^k, y_N^i)) = 0 \quad \text{for } \forall k > n^i,$$

$$(y_N^i, \eta(x^k, y_N^i)) \in Y \quad \text{for } \forall k > n^i.$$

ゆえに $k > n^{i+1}$ なる x^k に対応して, $n^i < k \leq n^{i+1}$ なる i の $(y_N^i, \eta(x^k, y_N^i))$ をとり, これを $\bar{y}^k$ とおくと $\bar{y}^k \in Q_j(x^k)$. このことを $k > n^{i+1}$ なるすべての x^k に対して考えると点列 $\{\bar{y}^k\}$ をうる. $k \rightarrow \infty$ のとき $i \rightarrow \infty$ で, $y^i \rightarrow \bar{y}$ だから $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$ となり, Q_j は開写像であ

る.

等式 $h=0$ を不等式 $h \leq 0, -h \leq 0$ とみなすと, 集合 $\{y | g(x, y) < 0, h(x, y) < 0, -h(x, y) < 0\}$ はつねに空集合となる. 一方 Hogan の結果には, 不等式写像が開写像になる条件の一つに $\{y | g(x, y) \leq 0\} = \text{cl}\{y | g(x, y) < 0\}$ の成立がある. したがって, 等式を不等式に置換する操作をおこなっても, Hogan⁵⁾ の結果から定理 2 の結果が得られないことに注意されたい. 定理 1, 2 を用いて, 最適値関数や最適解写像の性質が得られる.

《定理 3》 (i) $\{\bar{x}\} \times Y$ で関数 f, g が下半連続, 関数 h が連続, 集合 Y がコンパクトならば, 最適値関数 ϕ は $\bar{x} \in X$ で下半連続である.

(ii) 関数 f, g が $\{\bar{x}\} \times Y$ で上半連続, 関数 h が $\{\bar{x}\} \times Y$ で連続かつ y に関し連続微分可能で, $h(\bar{x}, y) = 0$ なるすべての y に対し $\nabla_{y_i} h_i(\bar{x}, y), i=1, \dots, l$ が 1 次独立で, さらに $Q_j(\bar{x}) = \text{cl } Q_j^-(\bar{x})$ がなりたつならば, 最適値関数 ϕ は $\bar{x} \in X$ で上半連続である.

(証明) (i), (ii) はそれぞれ, 等式-不等式写像 Q_j が仮定と定理 1 より閉写像, 仮定と定理 2 より開写像になることを用い, 文献 5) と同様にして証明される.

つぎにパラメータに対する最適解の連続性を保証する定理をあげる.

《定理 4》 $\{\bar{x}\} \times Y$ で関数 f, g, h が連続, とくに h は y に関し連続微分可能で, $h(\bar{x}, y) = 0$ なるすべての y に対し $\nabla_{y_i} h_i(\bar{x}, y), i=1, \dots, l$ が 1 次独立で, さらに集合 Y がコンパクトかつ $Q_j(\bar{x}) = \text{cl } Q_j^-(\bar{x})$ がなりたつとする. このとき最適解写像 S に関し, $S(\bar{x})$ が単集合ならば, S は $\bar{x} \in X$ で連続写像である.

(証明) まず, 仮定と定理 1 より等式-不等式写像 Q_j が閉写像になること, および仮定と定理 3 より最適値関数 ϕ が上半連続になることを用い, S の閉写像性が文献 5) と同様にして示される. そこで開写像性を示すため, $x^k \rightarrow \bar{x}$, $\bar{y} \in S(\bar{x})$ とし, $y^k \in S(x^k)$ なる点列 $\{y^k\} \subset Y$ をとり, さらにこの部分点列をあらためて $\{y^k\}$ とする. Y のコンパクト性より $y^k \rightarrow \bar{y} \in Y$ であり, S の閉写像性より $\bar{y} \in S(\bar{x})$ である. $S(\bar{x})$ は単集合だから $\bar{y} = \bar{y}$ となり, $y^k \rightarrow \bar{y}$ である. ゆえに S は開写像である.

以上の結果の数値例をあげる. $n=p=m=l=1$ とし,

$$f(x, y) = (x+y-1)^2$$

$$g(x, y) = (y+x-2)(y^2-2y+2-x)$$

$$h(x, y) = x(y-x)(y-x+2)$$

Fig. 1 Graphs of $QJ(x)$, $S(x)$ and $\phi(x)$

$$X = \{x | -1 \leq x \leq 5\}, Y = \{y | -3 \leq y \leq 3\}$$

とすると、写像 QJ, S 関数 ϕ は Fig. 1 の太線で示される。 $x=0$ において $\nabla_y h(0, y) = 0$ で、 QJ は開写像でなく、 S は開でも閉写像でもなく、 ϕ は上半連続でない。 $x=2$ では $QJ(2) \neq \text{cl } QJ^{-}(2)$ で QJ が開写像でない。 $x=1$ では QJ は連続だが、 $S(1)$ が単集合でなく S は開写像でない。

4. おわりに

本報告の重要な定理は 1 と 2 で、この定理をもとに以下の定理が導かれるが、主要な結果は定理 4 である。この結果は、関数空間にも一般化され、最適制御の感度解析、最適制御問題のパラメータ決定などにその応用が期待される。

参考文献

- 1) G. B. Dantzig, J. Folkman and N. Shapiro: On the Continuity of the Minimum Set of a Continuous Function, J. Mathe. Anal. Appl., **17**-3, 519/548 (1967)
- 2) J. P. Evans and F. J. Gould: Stability in Nonlinear Programming, Operations Research, **18**-1, 107/118 (1970)
- 3) H. J. Greenberg and W. P. Pierskalla: Extension of the Evans-Gould Stability Theorems for Mathematical Programming, Operations Research, **20**-1, 143/153 (1972)
- 4) S. M. Robinson and R. H. Day: A Sufficient Condition for Continuity of Optimal Sets in Mathematical Programming, J. Mathe. Anal. Appl., **45**-2, 506/511 (1974)
- 5) W. W. Hogan: Point-to-Set Maps in Mathematical Programming, SIAM Review, **15**-3, 591/603 (1973)
- 6) 福島雅夫: 非線形最適化の理論, 産業図書 (1981)