幾何計画問題の近似最適化法における分解可能性[†]

吉 田 要*

On the Decomposability in the Approximate Optimization Method of Geometric Programming Problem

Kaname YOSHIDA*

This paper concerns with the decomposability in the approximate optimization method of geometric programming problem.

There are some cases of that we need only an approximate optimum of the given problem with a little calculation. The approximate optimization is proposed to satisfy such the request. This method is especially effective for the problem which can be decomposed into some smaller scale problems whose degree of difficulties are all zero. But it is not easy to check whether the sufficient condition which has already been shown to decompose the given problem into the zero degree of difficulty problem is satisfied or not. So, the checking the condition has been a stumbling block, when we apply the approximate optimization method to the given geometric programming problem.

Here we show a class of the problem which can be decomposed in to some smaller scale problems whose degree of difficulties are all zero. The condition that the problem belongs to the class is described with simple form such that

$$F = d - 1(0) + 1$$

where d is a number of degree of difficulty and $1(0)$ is a number of the terms included in the objective function. If the sign of F is not positive, then the problem can be decomposed in to the zero degree of difficulty problems with probability 1. As the condition can be easily checked, we can use the approximate optimization method to many problems. Last we apply this result to the ship operation problem and sea power system design.

Keyword: geometric programming, approximate optimization, degree of difficulty, decomposition

1. はじめに

幾何計画法 (Geometric Programming) は種々なシステムの最適化問題に適用されており, それらに関する報告はかなりの数にのぼっている^{1)~3)}. また, 応用研究のみならず, 解法アルゴリズムに対しても種々の改良拡張がなされている^{4)~11)}. 著者も, 与えられた幾何計画問題をいくつかの低難度問題に近似分解し, それらの最適値を用いて, もとの問題の最適値の下限を得る近似最適化手法を提案し, 数値例などで有効性の検証を行った¹⁰⁾. その後, 低難度問題の解を用いて, もとの問題の近似最適解を構成する方法を提案している. また, 構成された近似最適解によって実現できる評価値と近似最適値とは一般には一致しないのであるが, それら二つの評価値の関係を表わす評価式を誘導した¹¹⁾. この近似最適化法が特に有効なのは, 項の総数と (変数の数+1) が等しくなる 0 難度問題に分解できる場合で, この 0 難度問題は代数方程式を解くだけで解を得ることができる. しかし与えられた問題によっては 0 難度問題に分解できないことがあり, 分解可能であるためには若干の条件を満足しなければならない. すなわち, 各, 0 難度問題に含まれる項がもとの問題の項すべてに渡っていることと, 一意的に存在する双対解が正要素のみからなることである¹⁰⁾が, この条件を検証することはそれ程簡単ではなく近似最適化法を適用するためには, より簡便な条件を得る必要がある.

本論文では, 確率 1 で 0 難度問題に分解できるクラスについて取り扱い, 与えられた問題がこのクラスに属するための十分条件を示す. この条件は非常に簡単で, 難度 d から評価関数に含まれる項の数 $l(0)$ を差し引いたものが -1 より小さいか否かを調べればよい. すなわち,

$$d - l(0) + 1 = q - n - l(0) \leq 0$$

であれば, この問題は, 0 難度問題に確率 1 で分解で

[†] 第 26 回自動制御連合講演会で発表 (昭 58・11)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received October 26, 1983)

(Revised April 16, 1984)

ける。ここで、 q, n は問題に含まれる項の数であり、 n は変数の個数である。この結果を、船舶のチャータ問題や海洋発電システムの設計問題などに適用する。

2. 問題の設定

まず、次下の便宜上、本論文で用いる記号の説明をする。

〔記号〕

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$: 主問題変数, T は転置

$\delta = (\delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{p \in \{p\}})^T \in \mathbb{R}^q$: 双対問題変数

C_{ki} : 係数で正の定数

a_{kij} : x_j の指数で実数

$g_{ki}(\mathbf{x}) = C_{ki} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kij}} = C_{ki} \mathbf{x}^{a_{ki}}$: 主問題に含まれる項

$\mathbf{a}_{ki} = (a_{ki1}, \dots, a_{kin})^T \in \mathbb{R}^n$: 指数ベクトル

$q = \sum_{k=0}^p l(k)$: 主問題に含まれる項の総数

$A = [a_{01}, a_{02}, \dots, a_{l \in \{l\}}] \in \mathbb{R}^{n \times q}$: 指数行列

$L(k) = \{1, 2, \dots, l(k)\}$: 添字集合

$l(k)$: 制約式 $G_k(\mathbf{x})$ に含まれる項の数, $k=0$ の場合は評価関数に含まれる項数

$\Omega_s = \{\mathbf{s} | \mathbf{s} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{s}_i,$

$\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_l\}, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$

対象とする幾何計画問題 $[P]$ をつぎのように定義する。

$[P]$ 主問題 (Primal Problem)

$$\min_{\mathbf{x} > 0} G_0(\mathbf{x}) = \sum_{i \in L(0)} g_{0i}(\mathbf{x})$$

$$\text{sub. to } G_k(\mathbf{x}) = \sum_{i \in L(k)} g_{ki}(\mathbf{x}) \leq 1,$$

$$k \in P = \{1, 2, \dots, p\} \quad (1)$$

双対問題 $[P_D]$ はつぎようになる。

$[P_D]$ 双対問題 (Dual Problem)

$$\max_{\delta \geq 0} v(\delta) = \prod_{k=0}^p \left\{ \prod_{i \in L(k)} \left(\frac{C_{ki} \cdot \lambda_k}{\delta_{ki}} \right)^{\delta_{ki}} \right\}$$

$$\text{sub. to } A \cdot \delta = 0 \quad \text{直交条件}$$

$$\lambda_0 = \sum_{i \in L(0)} \delta_{0i} = 1 \quad \text{正規化条件} \quad (2)$$

$$\text{ただし, } \lambda_k(\delta) = \sum_{i \in L(k)} \delta_{ki}, \quad k \in P$$

この $[P]$ と $[P_D]$ は若干の条件のもとで、最適値が等しくなることから、幾何計画法では扱いやすい $[P_D]$ を解くことによって最適値、最適解を求めている。

問題 $[P]$ より低難度問題 $[P_s]$ を構成する。

$[P_s] \quad s \in M = \{1, 2, \dots, m\}$

$$\min_{\mathbf{x} > 0} G_0(\mathbf{x})$$

$$\text{sub. to } G_k(\mathbf{x}) \leq 1, \quad k \in P \setminus \{p\}$$

$$G_{p(s)}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in L(s,1)} \beta_{is} G_{pi}(\mathbf{x})$$

$$+ \sum_{j \in L(s,2)} G_{pj}(\mathbf{x}) \leq \alpha_s \quad (3)$$

ここで、 $L(s, 1), L(s, 2)$ は $L(p)$ の部分集合で、

$$L(s, 1) \cap L(s, 2) = \phi$$

$$\bigcup_{s \in M} \{L(s, 1) \cup L(s, 2)\} = L(p)$$

を満足するようにとられる。また、 $[P_s]$ は分解する対象が $G_p(\mathbf{x})$ のみであるが、ほかの式を含むときや評価関数を含むときについては、

$$[P_y] \quad \min_{y, \mathbf{x} > 0} y$$

$$\text{sub. to } G_0(\mathbf{x}) \cdot y^{-1} \leq 1$$

$$G_k(\mathbf{x}) \leq 1 \quad k \in P \quad (4)$$

あるいは、

$$[P_y] \quad \min_{y, \mathbf{x} > 0} y$$

$$\text{sub. to } \gamma_0 G_0(\mathbf{x}) \cdot y^{-1} + \sum_{k \in P(1)} \gamma_k G_k(\mathbf{x}) \leq 1$$

$$G_k(\mathbf{x}) \leq 1, \quad k \in P(2) \quad (5)$$

ただし、

$$P(1) \cup P(2) = P$$

としている。ここで、 α, β, r については文献 10) を参照されたい。

さて、 $[P_y]$ と $[P]$ の指数行列をそれぞれ A_y, A とすると、つぎのようになっている。

$$A_y = \begin{matrix} y \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & A & & \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & & & & \vdots & & \\ & & & & & 1, 2, \dots, l(0), l(0)+1, \dots, q \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 A に対して定義を行う。

【定義】 A が一般の位置にあるとは、 A のどの $n+1$ 個の列ベクトルも n 単体となるときのいうものとする。

3. 近似分解可能定理

3.1 近似分解可能なクラス

近似最適化法では、近似分解の仕方に 3 段階の方法がある。各方法ごとに導入するパラメータが異なっている。また、分解後の問題の難度がすべて 0 の場合と、そうでない場合とがあるが、ここでは、近似最適化を適用する場合、有効な分解後の問題がすべて 0 となるための条件を考察していく。

まず、分解可能なクラスをつぎのように分類する。

(I) C_1 クラス (第 1 種分解可能なクラス)

制約式のうちのただ一つに対してのみ分解法を適用

すれば、0 難度問題に近似分解可能となる問題のクラス。すなわち、 α, β によって 0 難度問題 $[P_s]$ が構成できる。

(II) C_2 クラス (第 2 種分解可能なクラス)

制約式の複数個に対して分解法を適用しなければ、0 難度問題に近似分解できない問題のクラス。導入するパラメータは α, β, r となる。

(III) C_3 クラス (第 3 種分解可能なクラス)

制約式のみならず、評価関数をも、分解法の対象としなければならない問題のクラスで独立変数 y と α, β, r のパラメータが導入される場合である。

(注意) 単に 0 難度問題といえ、難度 $d = \text{項数} - \{(\text{主問題の変数の数}) + 1\} = 0$ をいうのであるが、この場合は、双対解が一般的には一意であるが、全て正の要素からなる解である必要はない。しかし、0 や負を要素としてもつ解では、主問題と双対問題の間に、双対関係が成立しないことがあるのみならず、負の要素が存在する場合は双対問題が不成立となる。以上のことから、特に断らない限り 0 難度問題の解が全て正の要素のみで構成されているものとして C_1, C_2, C_3 クラスを考える。それゆえ、以下の考察も、0 難度問題の解が全て正要素のみからなる問題で構成できるか否かについて行っていく。

さて、上で導入した各クラスの間には、

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3$$

なる関係が成立している。以下で、 C_3 クラスの近似分解可能性について考察を行うが、分解した結果、 C_1, C_2 クラスに属することがわかる場合もある。また、すくなくとも、 C_3 クラスに属していない問題は 0 難度問題に近似分解できないということになる。

3.2 近似分解可能定理

C_3 クラスで近似分解できるためには、各 0 難度問題が同じ評価関数をもち、もとの問題の項は、いずれも、どれかの 0 難度問題に含まれ、かつ、0 難度問題の双対解は正要素のみからなることが必要である。ここでは、つぎの近似分解可能定理を証明する。

《定理》 意味のある正多項式型幾何計画問題 (Posynomial Geometric Programming Problem) $[P]$ の難度 d と評価関数 $G_0(x)$ に含まれる項の総数 $l(0)$ との間に

$$d - l(0) + 1 = q - n - l(0) \leq 0 \quad (7)$$

が成立すれば、問題 $[P]$ は確率 1 で C_3 クラスに属している。ここで、意味があるとは、 $[P_b]$ が許容解をもつことである。

上の事柄をいいかえと、(7) が成立していれば、

ほとんどの問題が 0 難度問題に近似分解できるということである。

さて、上の定理を証明するために若干の準備を行う。

《補助定理 1》

n 単体の頂点集合を $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n+1}\}$ とすると n 単体は $s_1, \dots, s_{n+1}$ の凸包 Ω_S となる。また、 $s_i; i=1, \dots, n+1$ と原点 0 とで作る凸包を $\Omega\{s, 0\}$ とする。また、 $S_i = \{s_1, \dots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \dots, s_{n+1}\}$ とするとき、

$$\Omega_S \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_{S_i}$$

が成立する。

(証明) 付録 1 参照。

上の補助定理 1 では、 S を n 単体としたが、 S が張る線形多様体の次元 d が $d \leq n$ として、 $S = \{s_1, \dots, s_{d+1}\}$ としても同様の結果が導けることは証明より明らかである。また、つぎのことがいえる。

《補助定理 2》

行列 $A \in R^{n \times q}$ が、 $\Omega_A \ni 0$ かつ $\text{rank } A = d$ としよう。すると、

任意の $\alpha \in \Omega_A$ に対して、適当な $B\alpha \subset A$, $\Delta B\alpha = d$ が存在して、

$$\Omega\{\alpha, B\alpha\} \ni 0$$

とすることができる。ここで、 $\Delta B\alpha$ は $B\alpha$ に含まれる列ベクトルの個数で、 $A, B\alpha$ は行列かつ列ベクトル集合とする (注 1)。

(証明) 付録 2 参照。

以上の準備のもとで定理を証明しよう。

(定理の証明)

問題 $[P]$ が意味をもつならば、 $\Omega_A \ni 0$ である。また、 A は確率 1 で一般の位置にあり、以下、 A は一般の位置にあるとして考察する。指数行列 A と A_y の関係 (6) より、 A_y が 0 難度問題に分解できるためには、

$$d - l(0) + 1 \leq 0$$

であれば十分である。実際、このとき、 $\Omega_A \ni 0$ と $\Omega_{A_y} \ni 0$ は同値であり、 A_y が 0 難度問題に分解できるには、 A_y の第 1 列とほかの $n+1$ 個の列で作る行列が正要素のみの解をもち、そのようなベクトルの取り方で A_y のすべての列ベクトルをつくすことである。しかるに、 $d - l(0) + 1 \leq 0$ であれば、 $q - l(0) \leq n$ となり、 A_y の第 2 列以降で $n+1$ 個の列ベクトルを選べ

(注 1) A が行列かつ列ベクトル集合であるとは、 $[a_1, \dots, a_n]$ なる行列を A で表わし、かつ $\{a_1, \dots, a_n\}$ なる列ベクトル $a_i, i=1, \dots, n$ の集合をも A で表わすときにいうものとする。それゆえ、 $B = [a_i, a_j, \dots, a_k], 1 \leq i, j, k \leq n$ であれば B は行列であるが、 A の部分集合として、 $B \subset A$ と書くことがある。

ば、必ず $1 \sim l(0)$ のどれかの列ベクトルは少なくとも一つ含まれねばならない。よって、 A の適当な $n+1$ 個の列ベクトルからなる行列 A_{n+1} に対して、対応する A_v の行列は、ある正の数 r が存在して、

$$A_{yn+2} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \overbrace{-1 \cdots -1}^r & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & A_{n+1} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} n$$

となる。ここで、 A は一般の位置にあることと、 A_{n+1} を補助定理 2 を満足する $\alpha, B\alpha$ として選んでおけば、

$$\Omega_{A_{n+1}} \ni 0$$

となる。よって、 A_{n+1} の最初の n 列を対角化すると、

$$A_{n+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \end{array} \right]$$

となり、 $b_i < 0, i=1, \dots, n$ がいえる。このことを利用して、 A_{yn+2} の最初の $n+1$ 列を対角化すると、

$$A_{yn+2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \cdots 0 & b_0 \\ \vdots & I & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ 0 & & \end{matrix} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} n, \quad b_0 = \sum_{i=1}^r b_i < 0$$

となり、 $\Omega_{A_{yn+2}} \ni 0$ がいえる。しかも、補助定理 2 によって、このような A_{n+1} の選び方は A のすべての列ベクトルに渡るようにとることができることから、 A_v についても A_{yn+2} の選び方は A_v のすべての列ベクトルに渡るようにとることができる。（証明終り）

4. 例題

以上の結果を簡単な例で示そう。

[例題 1]

$$A = \begin{array}{c|cccccccc} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \textcircled{7} & \textcircled{8} \\ \hline 1 & 1.0 & -2.3 & 3.2 & 2.1 & 2.3 & -5.4 & -2.2 & -2.3 \\ 2 & 2.0 & 3.2 & -3.2 & 8.9 & -3.5 & 3.5 & -4.4 & -4.5 \\ 3 & 3.0 & 4.2 & 5.4 & -2.3 & -6.4 & -6.6 & 5.5 & -6.7 \end{array} = [\alpha_1, \dots, \alpha_8]$$

この場合、ベクトル列の組合せを求めると、つぎのようになる。

(1) $(\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{8})$

$$\text{解 } \lambda_1 = (2.21, 0.02, 0.01, 1)^T$$

(2) $(\textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{8})$

$$\text{解 } \lambda_2 = (0.75, 0.89, 0.56, 1)^T$$

(3) $(\textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6})$

$$\text{解 } \lambda_4 = (1, 0.13, 0.09, 0.68)^T$$

(4) $(\textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6}, \textcircled{7})$

$$\text{解 } \lambda_4 = (0.67, 0.53, 0.08, 1)^T$$

ここで、解は、各列で作る行列たとえば

$$[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_8], \lambda_1 = 0, \lambda_1 > 0$$

なる解で、すべて正要素からなっている。しかも、(1)~(4)の全体で、 A のすべての列ベクトルが用いられていることから、補助定理 2 が成立していることがわかる。ただし、補助定理 2 では解に 0 要素が含まれることがある。解が全て正要素のみにするためには、 A が一般の位置にあれば十分であり、近似分解可能定理の結果となっている。

[例題 2]^{9),10)}

船舶の長期チャータに関する問題として、荷役能力が既知の二つの港の間で、ある物資を一年当り一定量輸送する場合の最小経費問題について考える。

変数として、 D : 船一隻の自重容積、 V : 速度、 U : 利用率(全操作時間に対する航海時間)、 N : 船数と

する。

評価関数は建造費、機関の設備費、燃料費の合計を表わし、制約条件としては、積荷に対する船の処理能力に対する制約と停泊時間に対する制約を表わす。

すると、つぎの幾何計画問題が得られる。

[P]

$$\min_{x>0} G_0(x) = 200ND + 1/2ND^{2/3}V^3$$

$$+ 4/5ND^{2/3}V^3U$$

$$\text{sub. to } G_1(x) = 2.75 \times 10^6(NDVU)^{-1}$$

$$+ 2V^2D^{-1/3} \times 10^{-3} \leq 1$$

$$G_2(x) = 0.67 \times 10^{-6}DVU + U \leq 1$$

難度 $d = 7 - (4 + 1) = 2$ なので、 $d - l(0) = 2 - 3 \leq -1$ となり、定理を満足する。よって、確率 1 で 0 難度問題に分解可能で、分解法および、分解後の問題については文献 10), 11) を参照されたい。

[例題 3]¹¹⁾

太陽熱利用の海洋発電システムの設計に関する問題を扱ってみる。このシステムは、太陽熱により暖められた海水の表面温度とより下層の低温部との間の温度差を利用してタービンを駆動するもので、タービンを駆動するものとしては常温で高圧ガスが得られるアンモニアを用いている。ここでは、システムの建造費を最小にすることを考えている。この場合、建造費は熱交換器のサイズによって、大略決定されることか

ら、評価関数としては、熱交換器の断面積を採用しており、単位エネルギーを採取するに必要な最小の断面積を決定するものとする。

システムに対する制約として、温度境界層における熱量の収支に関する関係、熱エンジン内でのアンモニアの熱的抵抗、全体のエネルギー収支、熱量損失係数に関する制約などである。以上より、問題はつぎのように記述されている。

[P]

$$\begin{aligned} \min_{x>0} \quad & G_0(x) = C_1 \cdot A \\ \text{sub. to} \quad & G_1(x) = C_2 \cdot Q (UA\beta)^{-1} \leq 1 \\ & G_2(x) = C_3 \cdot Q \cdot (A\beta')^{-1} \leq 1 \\ & G_3(x) = C_4 \cdot (Q\alpha)^{-1} + C_5 \cdot A \cdot U^3 (Q\alpha)^{-1} \\ & \quad + C_6 \cdot U^2 \cdot (\alpha\gamma)^{-1} \leq 1 \\ & G_4(x) = C_7 \cdot \alpha + C_8 \cdot \beta + C_9 \cdot \beta' + C_{10} \cdot \gamma \leq 1 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} C_1 &= C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 1 \\ C_2 &= 4 \cdot P_7^{2/3} / (f \cdot C \cdot \Delta T) \\ C_3 &= 2 / (h' \Delta T) \\ C_4 &= P_N / \varepsilon (\Delta T / T) \\ C_5 &= f_p \times 10^7 / \varepsilon \varepsilon' (\Delta T / T) \\ C_6 &= \eta T \times 10^{-7} / \varepsilon \varepsilon' C \Delta T^2 \\ P_7 &= 7, \quad f = 1/125, \quad \rho = 1 \text{ gram/cm}^3, \\ C &= 4.18 \text{ joules/gram } T = 300^\circ\text{K}, \\ \varepsilon &= 0.6, \quad \varepsilon' = 0.6, \quad \eta = 0.2 \end{aligned}$$

となっている。

また、各変数は、 A : 熱交換器の断面積、 Q : 熱流量、 U : 熱伝達率の増加係数、 β : 境界層における温度減少率、 β' : 過熱係数、 α : 熱エンジンの熱量利用率、 γ : 熱交換器のチューブを通過するときの温度減少率である。

この問題の難度は 2 で、評価関数に含まれる項の数は 1 個なので、

$$d - l(0) + 1 = 2 - 1 + 1 > 0$$

となって、定理の条件は満足していない。しかし、定理を満足しなくても、 C_3 クラスに含まれる可能性があるので、一応分解してみると、つぎのようになった。

$$(1) \quad (1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$\lambda_1 = (1, 1, 1, 0.5, 1.5, 1, 0, 0.5)^T$$

$$(2) \quad (1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10)$$

$$\lambda_2 = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)^T$$

$$(3) \quad (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$\lambda_3 = (0.67, 1, 0, 0.67, 0.33, 0, 1, 1)^T$$

形式的には、上の三つのケースで、すべての項を含

んでいる。しかも、各ケース共、評価関数である第 1 項を含むように分解されており、 λ_i がすべて正要素からなっておれば C_3 クラスに属していることになるが、各 λ_i は 0 要素を含んでいる。よって、0 要素に対応する項を各ケースから除けば、すなわち、~の項を除くと、すべて正要素からなるものが構成できる。しかも、第 1 項はそのまま保存されており、なおかつ ~を除いた場合でも、3 ケースですべての項をカバーしている。そのうえ、各ケースで減少した項の数だけ、含まれる変数の数も減少しており、3 ケースとも 0 難度問題となっている。以上のことから、この問題は C_3 クラスに属していることがわかる。よって、近似最適化法によって、0 難度問題に近似分解できる。実際、 $d - l(0) + 1 \leq 0$ の条件は評価関数に含まれる項が一つでもあればよいことを示しているの、条件が成立しなくても近似分解できることがある。

5. おわりに

本論文では、文献 10) で示した 0 難度問題に近似分解できる条件を満足する問題のクラスについて考察し、ここで、導入した C_3 クラスでは、(難度-項数+1) が負または 0 であれば、確率 1 で 0 難度問題に分解できることを示した。この結果によって、近似最適化法の扱いが有効な方法であることがわかった。また、具体的な例題に対して、本結果を適用して 0 難度問題に近似分解できることを示した。

0 難度問題に分解できる項の選び方は、行列のピボット演算により発見することができるが、詳細については次回の報告としたい。

参考文献

- 1) R. J. Duffin, E. L. Peterson and C. Zener: Geometric Programming, Theory and Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York (1967)
- 2) C. Zener: Engineering Design by Geometric Programming, John Wiley & Sons, Inc., New York (1971)
- 3) J. S. Folker: Ship Operation and Design, in Optimization and Design, Edited by D. J. Wilde, M. Avriel and M. J. Pijkaert, in Prentice-Hall, Inc. (1973)
- 4) D. J. Wilde and C. S. Beightler: Foundations of Optimization, Prentice-Hall, Inc. (1967)
- 5) M. Heymann and M. Avriel: On a Decomposition for a Special Class of Geometric Programming Problems, J. Opt. Theory and Application, **3**-6, 389/409 (1969)
- 6) U. Passy and D. J. Wilde: Generalized Polynomial Optimization, SIAM J. Appl. Math., **15**, 1344/1356 (1967)
- 7) 吉田, 平井: 正多項式幾何計画法の分割, システムと制御, **19**-7, 391/401 (1975)
- 8) 吉田, 児玉, 馬場: 大規模幾何計画法問題の分割法, シス

- テムと制御, 20-12, 689/697 (1976)
- 9) H. J. Greenberg and W. P. Pierskalla: Surrogate Mathematical Programming, Operations Res., 18, 924/939 (1970)
- 10) 吉田：幾何計画法の近似最適化法, 計測自動制御学会論文誌, 19-8, 642/649 (1983)
- 11) 吉田：幾何計画問題の近似最適解の構成, 計測自動制御学会論文誌, 20-2, 130/136 (1984)
- 12) J. Stoer, C. Witzgall: Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Spring-Verlag, 35/36 (1970)

《付 録》

〈付録 1〉 補助定理 1 の証明

任意の $\mathbf{a} \in \Omega_S$ に対して, Caratheodry の錐の定理より, S の中の適当な n 個のベクトルの集合 $\bar{S}_i = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{i-1}, \mathbf{s}_{i+1}, \dots, \mathbf{s}_{n+1}\}$ が存在して, それらの正結合で作る集合すなわち凸錐

$$\hat{Q}\bar{S}_i = \{\mathbf{s} | \mathbf{s} = \sum_{j \neq i}^{n+1} \lambda_j \mathbf{s}_j, \lambda_j \geq 0\}$$

に $\mathbf{a}$ を含むようにできる。すなわち,

$$\mathbf{a} \in \hat{Q}\bar{S}_i$$

$$\text{ここで, } \sum_{j \neq i}^{n+1} \lambda_j \leq 1 \text{ ならば,}$$

$$\mathbf{a} \in \Omega_{S_i}$$

となって題意がいえる。

よって, $\sum_{j \neq i}^{n+1} \lambda_j > 1$ としよう。ところで, $\mathbf{a} \in \Omega_S$ より, 適当な $\lambda^* \in \Lambda_{n+1} = \{\lambda | \lambda \geq R^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$ が存在して,

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^* \cdot \mathbf{s}_i$$

となっている。よって,

$$\frac{\lambda_p^*}{\lambda_p} = \theta = \min_k \frac{\lambda_k^*}{\lambda_k}, \quad \lambda_k > 0$$

となる p が存在する。しかも, $\theta < 1$ である。実際, $\theta \geq 1$ であれば, すべての k で,

$$\lambda_k^* \geq \lambda_k$$

となり, 両辺を k について加えると,

$$1 \geq \sum_{k \neq i}^{n+1} \lambda_k^* \geq \sum_{k \neq i}^{n+1} \lambda_k > 1$$

であることからいえる。

よって,

$$\mathbf{a} \cdot (1-\theta) = \lambda_i^* \mathbf{s}_i + \sum_{j \neq p, i}^{n+1} (\lambda_j^* - \theta \lambda_j) \mathbf{s}_j$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{1-\theta} \{ \lambda_i^* \mathbf{s}_i + \sum_{j \neq p, i}^{n+1} (\lambda_j^* - \theta \lambda_j) \mathbf{s}_j \}$$

で, $1-\theta > 0$, $\lambda_j^* - \theta \lambda_j \geq 0$ から,

$$\mathbf{a} \in \hat{Q}S_p$$

となっている。しかるに, 各係数

$$\bar{\lambda}_i = \frac{1}{1-\theta} \cdot \lambda_i^*, \quad \bar{\lambda}_j = \frac{\lambda_j^* - \theta \lambda_j}{1-\theta} \quad j \neq p, i$$

を加えてみると,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq p}^{n+1} \bar{\lambda}_j &= \frac{1 - \lambda_p^*}{1-\theta} - \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \sum_{j \neq p, i}^{n+1} \lambda_j \\ &= \frac{1 - \lambda_p^* - \theta \{ \sum_{j \neq p, i}^{n+1} \lambda_j - \lambda_p \}}{1-\theta} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1 \end{aligned}$$

となることから, $\mathbf{a} \in \Omega_{S_p}$ がいえる。(証明終り)

〈付録 2〉 補助定理 2 の証明

$\text{rank } A = d < n$ の場合は, A を含む線形多様体上で考えれば, R^n 空間で $\text{rank } A = n$ の場合と同様である。よって, $\text{rank } A = n$ として考える。

つぎのことがいえれば十分である。任意の $\mathbf{a} \in \Omega_A$ に対して,

$$\Omega_A = \bigcup_{B \subset A} \Omega\{\mathbf{a}, B\}, \quad \Delta B \mathbf{a} = n$$

簡単のために, $\mathbf{a}$ を原点に移動しておく。すると,

$$\Omega_A = \bigcup_{B_0 \subset A} \Omega\{0, B_0\}, \quad \Delta B_0 = n$$

となる。今, Ω_A の勝手な点を $\mathbf{x}$ とする。すると, $\text{rank } A = n$ より, Caratheodry の凸包の定理によって, 適当な $B_x \subset A$, $\Delta B_x = n+1$ が存在して,

$$\mathbf{x} \in \Omega_{B_x}$$

とすることができる。ここで, Ω_{B_x} が, n 単体でない場合は, Ω_{B_x} は高々 $n-1$ 次元多様体に含まれている。よって, B_x の適当な n 個の列ベクトルの組の凸包に $\mathbf{x}$ が含まれているから, 題意を満足している。ゆえに, Ω_{B_x} が n 単体であるとすれば, 補助定理 1 から

$$\Omega_{B_x} = \bigcup_i \Omega_{B_x(i)}$$

となる。ただし,

$$B_x = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n+1}\}$$

$$B_x(i) = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{0}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{n+1}\}$$

となる。よって, ある i が存在して,

$$\mathbf{x} \in \Omega_{B_x(i)}$$

となり, もとの座標に戻すと, 任意の $\mathbf{a} \in \Omega_A$ に対して, 適当な $B \subset A$, $\Delta B \mathbf{a} = n$ が存在して,

$$\Omega\{\mathbf{a}, B\} \ni \mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{y}$$

とすることができる。しかるに, $\mathbf{y}$ は Ω_A の任意の点であることから,

$$\bigcup_{B \subset A} \Omega\{\mathbf{a}, B\} \supset \Omega_A$$

がいえる。一方, 原点 $\mathbf{0}$ は Ω_A の点であることから, 適当な $B \subset A$, $\Delta B \mathbf{a} = n$ に対して,

$$\mathbf{0} \in \Omega\{\mathbf{a}, B\}$$

となる。

(証明終り)

〈付録 3〉 Caratheodry の錐の定理¹²⁾

S を R^n の任意の部分集合とし, その正結合集合 $\hat{Q}_S$ を含む最小の線形多様体の次元が d であれば, つぎのことがいえる.

任意の点 $x \in \hat{Q}_S$ に対して, 適当な d 個の点 $x_i \in S$ が存在して,

$$x \in \hat{Q}_{\{x_1, \dots, x_d\}}$$

が成立する.

Caratheodory の凸包の定理¹²⁾

任意の部分集合 $S \subset R^n$ に対して, S を含む最小の線形多様体 MS の次元が d であるとき

任意の $x \in Q_S$ に対して, 適当な $d+1$ 個の点 $x_i \in S$ が存在して

$$x \in Q_{\{x_1, \dots, x_{d+1}\}}$$

が成立する. ここで, Q_S は S の凸包である.