多入力振動系の最適アクチュエータ配置に関する考察†

田 中 正 吾*

A Consideration on the Optimal Actuator Placement
in Multi-Input Oscillatory Systems

Shogo TANAKA*

1. ま え が き

われわれは先に、最小エネルギー制御問題の観点から三つの規範（行列式、トレースおよびミニ・マックス規範）に基づき多入力振動系の最適アクチュエータ配置をそれぞれ議論し、システムの固有角周波数の和、差で与えられる角周波数の周期の整数倍の終端時刻に対し最適アクチュエータ配置が解析的に求まることを示した³⁾。さらに、多入力アクチュエータの自由度を活用すれば上の条件はもっと緩やかになることも示した³⁾。

しかしこれ以外の終端時刻に対しては、解析的なアプローチが困難なことから数値的に解を求めることとし、数値解の最適性を調べるため最適評価値の下界あるいは上界を導いた。しかしながら、これらの上界、下界は比較的大きな終端時刻 T に対しては有効であるものの、小さな T に対しては余り有効でないことが判明した。

そこで本論では、先の報告³⁾とは少し見方を変え、最適アクチュエータ配置を数値的に求める際の計算労力を節減できるよう、最適化変数の選び方およびその数を減らす方法について考察する。また最終的に使用する最適化変数のとる最適値などについても検討し、最適アクチュエータ配置をうる指針を与える。

2. 解析のための準備

考えるシステムはつぎの多入力振動系である³⁾。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0 \mathbf{x}(t) + B_0 \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

† 第1回計測自動制御学会九州支部学術講演会で一部発表（昭57・12）

* 山口大学工学部 宇部市常盤台 2557

* Faculty of Engineering, University of Yamaguchi, Ube

(Received August 8, 1983)

(Revised March 26, 1984)

Keyword: oscillatory system, actuator, optimal placement

ただし、

$$A_0 = \begin{bmatrix} O & I_n \\ -A & O \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} O \\ B \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) \in R^{2n}$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ はそれぞれ $2n$ 次元および m 次元の状態値、操作量（入力）ベクトルである。また A は $n \times n$ 正値対称行列、 I_n は n 次の単位行列、 B は $n \times m$ アクチュエータ行列である。

最小エネルギー制御問題（ただし、終端時刻 T ）の観点から望ましいアクチュエータ行列 B の設計規範には、文献3)で述べたようにつぎのようなものが考えられる。

$$(i) \quad \det [W(0, T)] \longrightarrow \max_B \quad (3)$$

$$(ii) \quad \text{tr} [W^{-1}(0, T)] \longrightarrow \min_B \quad (4)$$

$$(iii) \quad \lambda_{\min} [W(0, T)] \longrightarrow \max_B \quad (5)$$

ここに、 $W(0, T)$ は可制御行列であり¹⁾、

$$W(0, T) = T_0^{-1} W_*(0, T) (T_0^{-1})' \quad (6)$$

ただし、“ $'$ ”は転置の意であり、 T_0 , $W_*(0, T)$ はそれぞれ次式により定義される。

$$T_0 = \begin{bmatrix} U^{-1} & O \\ O & U^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$W_*(0, T) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}' & W_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、 U は A の対角化行列、つまり A の固有ベクトル行列（直交行列）であり、 W_{11} , W_{12} , W_{22} はそれぞれ (i, j) 要素が次式で定義される $n \times n$ 行列である。

$$\begin{aligned} W_{11}(i, j) &= G_{ij} \int_0^T \beta_i \beta_j dt \\ W_{12}(i, j) &= G_{ij} \int_0^T \beta_i \alpha_j dt \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ W_{22}(i, j) &= G_{ij} \int_0^T \alpha_i \alpha_j dt \end{aligned} \quad (9)$$

なお、 G_{ij} および $\alpha_i, \beta_i (i, j = 1, 2, \dots, n)$ はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} = GG', \quad G = U^{-1}B \quad (10)$$

$$\alpha_i = \cos \omega_i t, \quad \beta_i = -(1/\omega_i) \sin \omega_i t \quad (11)$$

で定義され、 $\omega_i (i=1, 2, \dots, n)$ は振動系の固有角周波数、つまり A の固有値の 2 乗根である。

3. 最適アクチュエータ行列の決定

3.1 最適化変数の選択

B に対する制約は種々考えられるが、ここでは文献 3) で使用したつぎの制約を考える。

$$\|B\|^2 \triangleq \text{tr}[BB'] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2 = c_0^2 \quad (12)$$

(もちろん、 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |b_{ij}| = c_0$ の場合も可能)。したがって、形式的に最適化変数の数を計算すると、制約の数 1 を差し引いた $(n \cdot m - 1)$ となるが、本論で問題にしている制御問題では、 G の n 個の行ベクトル (m 次元) 間の内積である $G_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n, i \leq j)$ のみが評価関数値に寄与する ((9) 式参照)。したがって、いま

$$G' \triangleq [g_1, g_2, \dots, g_n] \quad (m \times n) \quad (13)$$

$$(g_j \in R^m, j=1, 2, \dots, n)$$

と定義すると、設計に際しては m 次元空間内の n 個のベクトル $g_j (j=1, 2, \dots, n)$ の相対的な位置を決定するだけで十分であり、最適化変数の数は上記の $(n \cdot m - 1)$ から $(m-1) + (m-2) + \cdots + 1 = (1/2)m(m-1)$ だけ減少する。これは、 R^m の直交座標軸を $e_1, e_2, \dots, e_m$ としたとき、 g_1 を e_1 方向、つまり $\text{Span}\{e_1\}$ に、 g_2 を $\text{Span}\{e_1, e_2\}$ に、以下同様にして g_{m-1} を $\text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$ に含ませるようにすることができるからである。

以下では、行列式およびトレース規範に対してそれぞれ最適化すべき評価関数が $g_j (j=1, 2, \dots, n)$ のノルムとそれらのなす角度に関するものとの積に分離され、このうちノルムについては容易に最適化され最適化変数の数はさらにノルムの分だけ、つまり n 個だけ減らせることを示す。

3.2 ノルムについての最適化

まず文献 3) より次式を得る。

$$\det[W(0, T)] = \det[W_z(0, T)] \quad (14)$$

$$\text{tr}[W^{-1}(0, T)] = \text{tr}[W_z^{-1}(0, T)] \quad (15)$$

(13) 式の定義を用いて G_{ij} を書き表わせば

$$G_{ij} = (g_i, g_j) = \|g_i\| \cdot \|g_j\| \cdot \cos \theta_{ij} \quad (16)$$

ここに、 $(\cdot, \cdot)$ は内積記号を、また θ_{ij} は g_i と g_j のなす角度を表わす。制約 (12) 式を $\{g_i\}_{i=1}^n$ に関して

書き表わすと、(10) 式および U が直交行列であることにより

$$\|B\|^2 = \text{tr}[UGG'U'] = \text{tr}[GG'] = \sum_{i=1}^n \|g_i\|^2 = c_0^2 \quad (17)$$

一方、(8), (9) および (16) 式により $W_z(0, T)$ は

$$W_z(0, T) = \begin{bmatrix} N & O \\ O & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & O \\ O & N \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここに、 N および $\tilde{W}_{11}, \tilde{W}_{12}, \tilde{W}_{22}$ の (i, j) 要素は次式で定義される。

$$N(i, j) = \|g_i\| \delta_{ij} \quad (19)$$

$$\tilde{W}_{11}(i, j) = \cos \theta_{ij} \int_0^T \beta_i \beta_j dt$$

$$\tilde{W}_{12}(i, j) = \cos \theta_{ij} \int_0^T \beta_i \alpha_j dt \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

$$\tilde{W}_{22}(i, j) = \cos \theta_{ij} \int_0^T \alpha_i \alpha_j dt$$

($\delta_{i,j}$ は Kronecker の δ 記号)。よって、(14), (15), (18) 式より

$$\det[W(0, T)] = \left(\prod_{i=1}^n \|g_i\|^2 \right) \gamma(T, \{\theta_{ij}\}) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}[W^{-1}(0, T)] &= \sum_{i=1}^n \{ \eta_i(T, \{\theta_{ij}\}) \\ &\quad + \eta_{n+i}(T, \{\theta_{ij}\}) \} / \|g_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i(T, \{\theta_{ij}\}) / \|g_i\|^2 \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 $\gamma(\cdot, \cdot)$ は $\begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & \tilde{W}_{12} \\ \tilde{W}_{12}' & \tilde{W}_{22} \end{bmatrix}$ の行列式、 η_i

$(\cdot, \cdot)$ は $\begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & \tilde{W}_{12} \\ \tilde{W}_{12}' & \tilde{W}_{22} \end{bmatrix}$ の逆行列の (i, i) 要素のことである。いずれも、 $\{\theta_{ij}\}$ と T だけの関数である。

よって評価関数 (21), (22) 式の最適化は、 $\{g_i\}_{i=1}^n$ のノルムとそれらのなす角度の最適化に分離して行える。

まず (21) 式を取り上げる。 $\{\|g_i\|\}_{i=1}^n$ に関する (21)

式の最大化は、制約 (17) 式の下での $\sum_{i=1}^n \|g_i\|^2$ の最大

化で置き換えられ、これは良く知られているように相加平均・相乗平均の関係を用いて簡単に求まり、最適なノルムは次式で与えられる。

$$\|g_i^*\|^2 = c_0^2 / n \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

つぎに (22) 式を考える。制約 (17) 式の下での (22) 式の $\{\|g_i\|\}_{i=1}^n$ に関する最小化は Lagrange の未定係数法により簡単に行われ、最適なノルムは次式で与え

Fig. 1 Norm of optimal g_j ($j=1, 2, 3$) for trace criterion

Fig. 2 Norm of optimal g_j ($j=1, 2, 3$) for min-max criterion

られる。

$$\|g_i^*\|^2 = (\sqrt{\delta_i} / \sum_{l=1}^n \sqrt{\delta_l}) c_0^2 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

以上、最適なノルム $\{\|g_i^*\|\}_{i=1}^n$ は、行列式規範では $T, \{\theta_{ij}\}$ に無関係に、またトレース規範では $T, \{\theta_{ij}\}$ に依存して定まることが (23), (24) 両式の結果からわかる。

3.3 角度についての最適化

前節の議論により、最適化変数は $\{g_i\}_{i=1}^n$ のなす角度 $\{\theta_{ij}\}$ をとればよいこと、しかもその数は $(n \cdot m - 1) - (1/2)m(m-1) - n$ だけで済むことがわかった。

ここでは、こうして採用した最適化変数 $\{\theta_{ij}\}$ のとる最適値について検討してみよう。まず文献 3) の数値例に対し、行列式、トレースおよびミニ・マックス規範の観点からそれぞれ $\{\theta_{ij}\}$ の最適化を図ってみた。ただし、ミニ・マックス規範では、ノルムについての最適化も同時に図った。この結果、どの規範とも最適な θ_{ij} は $\cos \theta_{ij} = 0$ (つまり g_i と g_j が直交) をできるだけ満たすようにし、満たせない部分 (なぜなら、一般に $m < n$ だから) についてはベクトルを同方向、つまり $\cos \theta_{ij} = 1$ としていることがわかった。さらに、この同方向のペア g_i, g_j は、 $W_z(0, T)$ の非対角成分の時間積分項 ((9) 式参照) の小さい部分に対応して定められていることがわかった。この意味するところは、 $W_z(0, T)$ をできるだけ対角行列に近づけるよう、互いに直交する $\{g_i\}_{i=1}^n$ のグループ群が決定されるということである。これは、先の報告³⁾で下界、上界を導くときに $W_z(0, T)$ の非対角成分を無視し、できるだけ大きな正値対称行列を作ったのと同じ思想である。

したがって、このような $\{g_i\}_{i=1}^n$ の直交性と先に求

めた $\{g_i\}_{i=1}^n$ のノルム (23), (24) 式を用いれば、 G つまりは $B=UG$ の設計を非常にたやすく行うことができる。ただこの直交性は評価関数の非線形性のため証明が困難であるが、 (n, m) の組を (4, 2), (5, 2), (5, 3) と種々変えてみたときにも同じ結果が得られており、 $\{g_i\}_{i=1}^n$ に関する直交性は最適アクチュエータの設計の際の大きな指針になりうることを示している。この直交性の証明が今後の課題であろう。

最後に、Fig. 1, 2 に文献 3) の数値例に対しトレースおよびミニ・マックス規範の観点から $\{\theta_{ij}\}$ の最適化を図ったときの g_i^* のノルム $\|g_i^*\|$ の変化を示す (行列式規範に対しては (23) 式に示したように $\|g_i^*\|$ は一定値 $1/\sqrt{3}$ である)。なおミニ・マックス規範に対しては、 $\{\|g_i^*\|\}_{i=1}^n$ の最適化も同時に図っている。本論では、ミニ・マックス規範を用いたときの $\{\|g_i^*\|\}_{i=1}^n$ の最適化については解析的アプローチの困難さゆえにふれなかったが、図よりノルムはトレース規範のときと類似しており、しかも $\{g_i\}_{i=1}^n$ のなす角度についても上記のようにほかの規範と同様である。それゆえ、トレース規範の解が準最適なものとして、あるいは厳密な数値解を得るときの初期値として利用できることがわかる。この数学的な根拠としては

$$\lambda_{\min} [W(0, T)] = \lim_{p \rightarrow \infty} \{\text{tr} [W^{-p}(0, T)]\}^{-1/p} \quad (25)$$

があげられる。

4. む す び

本論は、多入力振動系に対する最適アクチュエータ配置の解を少ない計算労力で得るという立場から、行列式およびトレース規範の観点から最適化変数の選び方およびその数を低減化する方法を議論した。その結果最終的に残る最適化変数は、(比較的少ない) アクチュエータ行列 B を生成する行列 $G (=U^{-1}B)$ の行ベクトルのなす角度であり、これらも 0° あるいは 90° のいずれかの値をとり、それらの組み合わせは可制御行列 $W_z(0, T)$ ができるだけ対角行列に近づくようなものが望ましいことが数値例によりわかった。

今後の課題は、このような G の行ベクトル間の直交性の証明である。

参 考 文 献

- 1) Arbel.: Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems, International J. Control, **33-3**, 565/574 (1981)
- 2) 田中ほか: スカラー入力をもつ振動系および非振動系に対する最適アクチュエータの設計, 電気学会論文誌 **102-C-6**, 141/148 (1982)
- 3) 田中ほか: 多入力振動系に対する最適アクチュエータの設計, 計測自動制御学会論文集 **19-11**, 866/872 (1983)