非線形システムのハイゲインフィードバックによる安定化

安 藤 嘉 則*・鈴 木 正 之*

Stabilization of a Class of Nonlinear Systems by High-Gain Feedback

Yoshinori ANDO* and Masayuki SUZUKI*

1. はじめに

古くから増幅器においてその非線形歪を補正するためにフィードバックが有効であることが知られている¹⁾。一般の線形システムにおいても、フィードバックによって非線形歪 (nonlinear distortion) の影響を小さくすることができる²⁾。このように、非線形要素のシステムへの影響の軽減に有効なフィードバックの特性をさらに高めるには、フィードバックゲインを大きくすることが考えられる。本報告では、非線形システムにおいてハイゲインフィードバック (HGF) を用いることによって、一部の非線形要素を無視して安定化することを試みる。

2. 安 定 性

本章では3章で HGF を用いた非線形システムの安定化を考察するにあたって、その準備としてつぎのよう

$$\dot{x} = f(x, z) \quad (1a)$$

$$\mu \dot{z} = \mu h(x, z) + A(x) + B(x)z \quad (1b)$$

の安定性を調べる。ここで $x \in R^n$, $z \in R^m$ であり、原点は平衡点であるとする。つぎの仮定が成り立つとする。

【仮定 1】 f, h, A, B は原点を含むある閉集合 D の内部で有界であり、 f は微分可能である。

【仮定 2】 D 内の任意の x に対して

$$Re \lambda[B(x)] \leq -\sigma < 0, \sigma > 0 \quad (2)$$

【仮定 3】 (1) 式で $\mu=0$ として得られるシステムの安定を保証する Lyapunov 関数 $V(x)$ が存在する。

上の三つの仮定が満足される場合に、システム(1)が安定であることを示そう。まず、 $\mu=0$ として退化システム

$$\dot{x} = f(x, -B^{-1}(x)A(x)) = a(x) \quad (3)$$

を得る。仮定 3 よりこのシステムは安定である。つぎ

に境界層システムとして

$$\frac{dz}{d\tau} = B(\alpha)z \quad (4)$$

を考える。仮定 2 より、任意の $\alpha \in D$ に対して

$$B'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)B(\alpha) = -Q(\alpha) \quad (5)$$

を満たす正定な $P(\alpha), Q(\alpha)$ が存在する。

つぎに、変数変換

$$\eta = z - B^{-1}(x)A(x) \quad (6)$$

をすると、適当に $b(x, \eta), q(x, \eta)$ を定めると(1)式を

$$\dot{x} = a(x) + b(x, \eta)\eta \quad (7a)$$

$$\mu \dot{\eta} = \mu q(x, \eta) + B(x)\eta \quad (7b)$$

と書き換えることができる。さてシステム(7)に対して、スカラー関数

$$U(x, \eta, \varepsilon) = V(x) + \varepsilon \eta' P(x) \eta \quad (8)$$

を考える。ここで ε は正のパラメータである。 U が正定であることは、 $V(x)$ と $P(x)$ の正定性より明らかである。

$$\dot{\xi} = \eta - \frac{\mu}{\varepsilon} Q^{-1} w \quad (9)$$

$$w = \left(\frac{\partial V}{\partial x} f \right)' + 2\varepsilon V q \quad (10)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \dot{U} = & \frac{\partial V}{\partial x} a(x) - \frac{\varepsilon}{2\mu} \eta' (Q - 2\mu \dot{P}) \eta - \frac{\varepsilon}{2\mu} \xi' Q \xi \\ & + \frac{\mu}{2\varepsilon} w' Q^{-1} w \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。ここで $r > 0$ に対して D_r を

$$D_r = \{(x, \eta) | U \leq r\} \quad (12)$$

とする。 D に対応する (x, η) における閉集合を $\tilde{D}$ としたときに、 $\tilde{D}$ に含まれる最大の D_r を $\tilde{D}^*$ としそのときの r を r^* とする。このとき $\tilde{D}^*$ 内では η と x はそれぞれ高々 $0(1/\sqrt{\varepsilon})$ と $0(1)$ であることがわかる。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して μ^* が存在して $[0, \mu^*]$ 内のすべての μ に対して $\dot{U}$ は負となる。したがって(7)ならびに(1)は安定となる。以上をまとめてつぎの補題を得る。

【補題】 非線形特異摂動システム(1)において仮定 1~3 が満足されるとき、 D 内に閉集合 D^* が存在して D^* 内から出発する解は原点に漸近する。

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received July 25, 1983)

(Revised April 23, 1984)

Keyword: nonlinear system, high-gain feedback, singular perturbation method, robustness

この結果は Chow³⁾の結果を拡張したものになっている。上の補題は、二つのサブシステム（退化システムと境界層システム）がそれぞれ安定ならば全体のシステムが安定であることを意味している。個々のサブシステムの安定性の判定は、次元が低いために全体の安定性の判定より簡単である。特に、境界層システムは線形システムとなるので特に容易である。また、安定判別において、 $p(x, \eta)$ は影響を与えていないことも容易にしている一因である。これは、(1)の安定性が $h(x, \eta)$ の変動に対してロバストであるともいえる。

3. 安定化

ここでは前章の補題を用いて、つぎの非線形システムの安定化を行う。

$$\dot{x} = f(x, z) \quad (13a)$$

$$\dot{z} = h(x, z) + H(x)u \quad (13b)$$

ここで $x \in R^n$, $z \in R^m$, $u \in R^m$ であり、 $f(0, 0) = 0$, $h(0, 0) = 0$ である。前章の仮定 2, 3 のかわりに、つぎの二つの仮定を考える。

【仮定 2'】 D 内の任意の x に対して $H(x)$ は正則である。

【仮定 3'】 $\dot{x} = f(x, K(x))$ が安定となる $K(x)$ が D 内の x に対して存在し、そのときの Lyapunov 関数が $V(x)$ で与えられる。

仮定 1, 2', 3' が満たされるときに、入力として

$$u = g[G(x) + F(x)z] \quad (14)$$

で示される x については非線形、 z については線形のハイゲインフィードバックを用いる。 g は十分大きい正のスカラーのパラメータである。(14)式を(13)式へ代入してつぎのシステムを得る。

$$\dot{x} = f(x, z) \quad (15a)$$

$$\mu \dot{z} = \mu h(x, z) + H(x)G(x) + H(x)F(x)z \quad (15b)$$

ここで $\mu \triangleq 1/g$ であり、 $g \rightarrow \infty$ に対して $\mu \rightarrow 0$ が対応する。(15)式は(1)式と同じ形をしているので、まず仮定 2 を満たすように $H(x)F(x)$ が安定になるように $F(x)$ を決める。これは仮定 2' より可能で、 B を安定としたときに $F(x) = H^{-1}(x)B$ とすればよい。つぎに、

$$G(x) = -F(x)K(x) \quad (16)$$

と選ぶ。このとき(15)式で $\mu = 0$ とすると

$$\dot{x} = f(x, K(x)) \quad (17)$$

を得る。仮定 3' より(17)式は安定となり、仮定 3 が満足される。結局(14)式は

$$u = gH^{-1}(x)B[z - K(x)] \quad (18)$$

となる。以上よりつぎの定理を得る。

《定理》 (13)式で表わされるシステムが仮定 1, 2', 3' を満たしているときに、このシステムは安定化可能である。そのときの入力は(18)式の形で与えられる。

この定理は、全体の安定化をより容易な二つの低次元システムの安定化の問題に帰着させている。また、 u の決定にあたっては $h(x, z)$ については考慮しなくてもよくなっている。これは、 $h(x, z)$ が変動しても安定性は損われないことも意味する。したがって、(18)式による安定化はロバストネスをもっている。これらがハイゲインフィードバックを用いた効果である。

最後につぎの系が成り立つ。

【系】 つぎのスカラーシステム

$$\begin{aligned} \frac{d^{n'}}{dt^{n'}} y = & \phi\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y, \dots, \frac{d}{dt} y, y\right) \\ & + \varphi\left(\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} y, \dots, \frac{d}{dt} y, y\right) u \end{aligned} \quad (19)$$

で、 ϕ, φ が有界であり、 $\varphi \neq 0$ のときに安定化可能である。

(証明) $x = \left(y, \frac{d}{dt} y, \dots, \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} y\right)$, $z = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y$ とす

れば(19)式は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \quad (20a)$$

$$\dot{z} = \tilde{\phi}(x, z) + \tilde{\varphi}(x)u \quad (20b)$$

となる。(20)式において、仮定 1, 2', 3' が成立するのは明らかであり、定理より安定化可能である。

4. おわりに

本報告では、(1)式で表わされる特異摂動システムが安定である条件を求め、(13)式 of 非線形システムをハイゲインフィードバックによって安定化した。これらの考察においては、一部の非線形要素を考慮する必要がなく、いいかえればこれらの非線形要素の変動によって制御則は不変である。このようなロバストネスはハイゲインフィードバックを用いた結果として得られたものである。

参考文献

- 1) H. W. Bode: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, D. Van Nostr and Company Inc., Princeton, N. J., (1945)
- 2) J. B. Cruz: Feedback Systems, McGraw-Hill (1971)
- 3) J. H. Chow: Asymptotic Stability of a Class of Nonlinear Singular Perturbed System, J. Franklin Institute, 306, 275/281 (1978)