位相特性を利用した二つの隣接周波数の分離同定

山本幸生*・原 裕一郎**・井口征士*

Frequency Identification of Two Nearby Frequencies by Phase Characteristics

Yukio YAMAMOTO*, Yuichiro HARA** and Seiji INOKUCHI*

This paper describes a high-resolution frequency identification method based on complex spectral analysis. In power spectral analysis, the resolution of frequency in periodic wave is limited by $1/T$, where T is the observation interval. When the two nearby frequencies produce a single peak in power spectrum, they can not be identified separately. But the phase component in complex spectrum gives us a useful method to increase the resolution of frequency identification. Complex spectrum of a periodic wave has the following characteristics as: 1) The direction of component-vector is identical and determined by original wave phase ϕ . 2) The inverse of amplitude of component-vector gives a linear function of component-frequency. And 3) the cross point of the linear function and the frequency axis gives the frequency of periodic wave. This paper proposes a method to determine whether the peak consists of one periodic signal or two-frequency signals, and to identify the accurate frequencies contained in the original wave signal.

Experimental result shows that two nearby frequencies in original signal can be accurately identified from a short-time complex spectrum. And the influence of the sidelobe of the other spectral peak on the identification accuracy is also discussed.

Key Words: frequency identification, spectral analysis, pitch detection, fourier transform

1. ま え が き

周期波形を周波数分析して、そこに含まれる成分の

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

** 松下電器産業(株) 豊中市稲津町 3-1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

** Matsushita Electric Industrial Co., Ltd., Toyonaka
(Received November 24, 1983)

(Revised September 25, 1984)

周波数を求めようとするとき、観測区間を T とすると、周波数分解能 ΔF は $1/T$ で制限を受ける。このような短時間スペクトルからピーク周波数を精度よく同定する方法として、対数ピリオドグラムのスペクトルであるケプストラムから長ケフレンシイピークを検出する方法¹⁾や、時間的に隔たった2つの観測区間でのピーク成分の位相変化で補正する方法²⁾が提案されている。筆者らも、先に複素スペクトルの位相特性を用いた周波数同定法について示した。これは、複素スペクトルにおいて、ピーク周波数の前後で位相が反転すること、振幅スペクトルの逆数が直線上にプロットされることを利用したものであり、高い精度でピッチ周波数を同定することを可能にした。

しかしながらこの方法は、一つのスペクトルピークを構成する周期成分がただ一つであることが前提となっており、周期波形に含まれる二つの周波数が非常に接近していて、スペクトル面においてそれらが一つのピークに含まれる場合には適用することはできない。このような場合には、観測区間を長くして、それぞれの周波数に対応する2つのスペクトルピークが分離されるようにする必要がある。

ここでは、複素スペクトルの位相特性を利用して、一つのピークに含まれる接近した二つの周波数の分離および同定を行う方法について述べる。これは、上記の複素スペクトルの特徴、すなわちピーク周波数の前後で位相が反転することのほかに、単一周波数をフーリエ変換した複素スペクトルにおいて、すべての成分の方向が等しいという特徴を用いている。この方法では、先に述べたように観測区間 T を長くする必要はなく、2つの周期成分が一つのピークを構成している状態で、位相の違いを利用してそれら二つの周波数の分離、同定が可能である。

2. スペクトルピークの判定

観測区間 T 、データ数 N 、観測区間内での波数 f 、

区間中心での位相が φ であるような単一周波数波形の離散データを x_k とすると

$$x_k = A \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi f k}{N} - \pi f + \varphi \right) \right\} \quad (2.1)$$

ここで、観測区間前後での不連続性補正のため、 x_0 を $(x_0 + x_N)/2$ で置きかえる。この x_k をフーリエ変換して得られる複素スペクトル z_m はつぎのようになる。

$$z_m = \frac{A}{N} \cdot \frac{\sin(\pi f)}{\tan \frac{\pi(f-m)}{N}} \cdot \exp(i\varphi) \quad (2.2)$$

特にピークの近傍では $|(f-m)/N|$ は小さく、 $\tan \{\pi(f-m)/N\} \doteq \pi(f-m)/N$ となるので、

$$z_m \doteq \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi f)}{(f-m)} \cdot \exp(i\varphi) \quad (2.3)$$

(2.2)、(2.3) 式より、単一周波数から得られる複素スペクトルにはつぎのような性質があることがわかる³⁾。

- (1) すべての成分のベクトルの方向は等しく、位相 φ によって決まる。
- (2) z_m のベクトルの φ 方向成分の逆数は、周波数 m についての 1 次関数で表わされる。
- (3) その 1 次関数の直線が周波数軸と交わる点はその周波数を与える。

ここではこの三つの性質を利用して、接近した二つの周波数の分離、同定を行う。

単一の周波数からなる信号をフーリエ変換した結果と、 $|f_1 - f_2| \leq 1$ であるような接近した二つの周波数からなる信号をフーリエ変換した結果は、ただ一つのスペクトルピークを構成し、パワースペクトルのみからその区別を行うのは不可能である。例として、**Fig. 1** に $f = 19.6$ 、 $\varphi = \pi/6$ 、 $N = 256$ の単一周波数の場合、**Fig. 2** に $f_1 = 19.3$ 、 $f_2 = 19.9$ 、 $\varphi_1 = \pi/6$ 、 $\varphi_2 = 2\pi/3$ 、 $A_1 = A_2$ 、 $N = 256$ の二つの周波数からなる場合の原波形とそのパワースペクトルおよびピーク近傍での振幅スペクトルをそれぞれ (a) (b) (c) に示す。そこで、スペクトルピーク判定のために、上記の単一周波数による複素スペクトルの特徴を用いる。

二つの周波数からなる信号の場合、個々の成分の複素スペクトルは上記の性質を満足するが、合成された信号の複素スペクトルは、それらのベクトル和で表わされるため、一般には上記の性質を満足しない。そこで、まずピークが単一周波数成分からなるか否かの判定に上記の性質を利用するが、性質 (1) では、偶然それぞれの位相が一致することがあるので、性質 (2) を用いる。Fig. 1 (d) および Fig. 2 (d) に二つの場合の φ 方向成分の逆数と直線近似を示している。今、ピー

Fig. 1 Spectral analysis of a sinusoidal wave

- (a) Waveform ($f=19.6$)
- (b) Amplitude spectrum of (a)
- (c) Spectral amplitude near the peak and
- (d) Inverse components and their linear approximation

Fig. 2 Spectral analysis of a signal containing two nearby frequencies

- (a) Compounded waveform of $f_1=19.3$ and $f_2=19.9$
- (b) Amplitude spectrum of (a)
- (c) Spectral amplitude near the peak and
- (d) Inverse components and their linear approximation

クが z_m と z_{m+1} の間にあるとき、 $1/z_m$ と $1/z_{m+1}$ の値から 1 次関数を決定し、その 1 次関数から $m-1$ 番目と $m+2$ 番目の値 $1/z_{m-1}$ 、 $1/z_{m+2}$ を推定する。これより求めるスペクトルの推定値 $\hat{z}_{m-1}$ 、 $\hat{z}_{m+2}$ と実際

Fig. 3
Vector presentation
of
(a) Spectral
components
and
(b) Unit vector

の値 z_{m-1} , z_{m+2} との差の絶対値の2乗和の値 g をピークの判定に用いる.

$$g = |z_{m-1} - z_{m-1}|^2 + |z_{m+2} - z_{m+2}|^2 \quad (2.4)$$

この g の値が、あらかじめ設定されているスレッシュホールドの値を越えると、スペクトルのピークが二つの周波数からなるものと判定する.

3. 周波数の分離と同定

前節の方法によってスペクトルピークが二つの接近した周波数によるものであることが判別するので、それらの分離・同定について述べる.

複素スペクトル z_m において、周波数 f_1 による成分を $z_m^{(1)}$, 周波数 f_2 による成分を $z_m^{(2)}$ とすると,

$$z_m = z_m^{(1)} + z_m^{(2)} \quad (3.1)$$

となる. まず f_2 を求める場合を考える. 周波数 f_2 を知るには、複素スペクトル z_m 中の f_1 による成分 $z_m^{(1)}$ の影響を取り除く必要がある. そのために、**Fig. 3** に示すように、 f_1 による成分 $z_m^{(1)}$ に直交する単位ベクトル u_1 を考え、この単位ベクトル u_1 と複素スペクトル z_m との内積をとる. このとき、

$$\begin{aligned} (z_m, u_1) &= (z_m^{(1)} + z_m^{(2)}, u_1) \\ &= (z_m^{(1)}, u_1) + (z_m^{(2)}, u_1) \\ &= (z_m^{(2)}, u_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

となり、 $z_m^{(1)}$ の影響が除去される. この内積の値については2節で述べた性質(2), (3)が成立し、これを用いて周波数 f_1 を求めることができる. f_2 を求めるときには、 $z_m^{(2)}$ に直交する単位ベクトル u_1 を用いればよい. しかし実際には、これらの単位ベクトル u_1 , u_2 は未知であるから、まずこれを知らなければならない. その方法についてつぎに述べる.

単位ベクトルの方向 θ を 0 から π まで変化させ、そ

Fig. 4 Approximation error as a function of unit vector phase θ

Fig. 5 Estimation of unit vector phase by second order interpolation

の単位ベクトルと複素スペクトル z との内積をとる. この値に対して、前節でスペクトルピークの判別に用いた1次関数による推定値と実際の値との差の2乗和の値 g を考える. この値は **Fig. 4** に示すように、二つの周波数に対応する2ヵ所で極小値をとり、それが求める単位ベクトルの方向となる. ここで用いた値は、 $f_1=19.3$, $f_2=19.9$, $\phi_1=\pi/6$, $\phi_2=2\pi/3$ である.

実際に計算を行うには、0 から π までの位相を分割する必要がある. 今、位相を N_p 個に分割し、その n 番目の g の値が極小になるとする. すなわち、

$$\begin{aligned} g[(n-1)\pi/N_p] &> g[n\pi/N_p] \quad \text{かつ} \\ g[(n+1)\pi/N_p] &> g[n\pi/N_p] \end{aligned} \quad (3.3)$$

であるときには、 g はこの近傍で極小値をとる. このままでは位相の分解能が悪いので、それを向上させる方法を考える. g が極小値をとる単位ベクトルの方向を $(n+\alpha)\pi/N_p$ とし、 g の値を **Fig. 5** に示すように2次曲線で近似すると、

$$\begin{aligned} P \cdot (\alpha+1)^2 + Q &\doteq g[(n-1)\pi/N_p] \\ P \cdot \alpha^2 + Q &\doteq g[n\pi/N_p] \\ P \cdot (\alpha-1)^2 + Q &\doteq g[(n+1)\pi/N_p] \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる. ここで P , Q は n , α に無関係な定数であり、第1項は単位ベクトルの方向による成分、第2項はノイズによる成分である. この連立方程式を解けば α の値が求まり、単位ベクトルの方向が決定される.

4. 実験結果・検討

分離・同定を行う二つの周波数を f_1 , f_2 , その位相を ϕ_1 , ϕ_2 , 振幅を A_1 , A_2 とし、これまで述べてき

Fig. 6

- (a) Identification error of f_1 and f_2
 $(\Delta f=0.5, \Delta \varphi=\pi/2, r_a=1)$ and
 (b) After suppression of negative peak

た方法による周波数同定の性能を知るために、

$$f_1$$

$$\Delta f = |f_1 - f_2| (\leq 1)$$

$$\Delta \varphi = |\varphi_1 - \varphi_2| (\leq \pi)$$

$$r_a = A_1/A_2 (\leq 1) \quad (4.1)$$

を変化させて実験を行う。また、同定された周波数と実際の周波数との差の絶対値を考え、これを同定誤差 f_{er} として、周波数分解能の尺度とする。

Fig. 6(a) は、 $\Delta f=0.5$, $\Delta \varphi=\pi/2$, $r_a=1$ のときの f_1 と同定誤差 f_{er} の関係を示したものである。2本の曲線はそれぞれ f_1 および f_2 の同定誤差を表わしており、以後の図においても同様である。この誤差は、主に負のスペクトルピークの影響によるものである。一般にスペクトルを取り扱う場合には、正の周波数領域のみを取り扱うことが多い。だが実際に信号(実数波形)をフーリエ変換して得られるスペクトルには、Fig. 7(a)に示すように正の領域に対称な負の周波数領域が存在する。ここでは、 $f_1=19.7$, $N=128$ を例として用いている。この負の周波数領域のピークによるサイドロープの影響が誤差を増大させており、 f_1 が大きくなるとともに正負のピーク間の距離が大きくなるために影響が減少し、誤差 f_{er} は小さくなる。このような他のピークの影響の大きさは干渉行列によって示される³⁾。干渉行列は、各ピークが他のピークから受ける干渉の大きさを行列によって表わすものであり、これによって除去すべきピークを知ることができる。Fig. 7(a) から負のピークを除去したものが Fig. 7(b) である。このようなピークの除去方法については、すでに文献3)に詳しく述べている。

Fig. 7

- (a) Amplitude spectrum of $f=19.7$ and
 (b) After suppression of negative peak

Fig. 8

- (a) Amplitude spectrum of $f_1=19.6(A_1=1)$,
 $f_2=20.3(A_2=1)$ and $f_3=26.6(A_3=10)$ and
 (b) after suppression of a peak f_3

Fig. 6(b) は、負のピークを取り除いたスペクトルによって周波数の同定を行ったときの f_1 と同定誤差 f_{er} との関係を示したものであり、 Δf や $\Delta \varphi$ は、Fig. 6(a) と同じ値を用いている。Fig. 6(a) と比較すると、誤差 f_{er} は周波数 f_1 に関係なく非常に小さな値となっている。たとえば、 $f_1=20.0$ の場合、Fig. 6(a) では f_{er} は約 0.1 であるのに対して、Fig. 6(b) ではその 1/5 以下となっている。

上記のピーク除去の方法は、Fig. 8(a) に示すような、大きなピークのサイドロープに同定を行おうとするピークが存在するときにも利用できる。ここで用いたのはつぎの 3 種類の値である。

$$f_1=19.6, \varphi_1=\pi/6, A_1=1$$

$$f_2=20.3, \varphi_2=2\pi/3, A_2=1$$

$$f_3=26.6, \varphi_3=\pi/2, A_3=10$$

Fig. 9 Identification error of f_1 and f_2 as a function of Δf or f_2 ($f_1=20.3$, $\Delta\varphi=\pi/2$, $r_a=1$)

- (a) $N_p=50$ and
(b) $N_p=100$

このうちで求めようとしているのは、周波数 f_1 および f_3 である。 f_3 の周波数によるピークを除去せずに、周波数の同定を行って得た値は 91.469 と 19.589 であり、同定誤差 f_{er} は 0.5 以上となっている。それに対して Fig. 8(b) は f_3 のピークを除去して得られたスペクトルであり、これを用いて同定された周波数は $f_1=19.599$, $f_2=20.299$ となり、ともに同定誤差 f_{er} が 0.001 という非常に良い結果が得られた。

Fig. 9(a) は、 $f_1=20.3$, $\Delta\varphi=\pi/2$, $r_a=1$ で一定な場合の Δf と誤差 f_{er} の関係を示したものである。非常に接近した周波数 ($\Delta f=0.02$) においても、高精度の分離が可能である。ここで $\Delta f=0.3$ ($f_2=20.0$) および $\Delta f=0.7$ ($f_2=21.0$) の近傍で誤差が増大している。これは、一方の周波数が整数に近い値となっているからである。整数に近い周波数はスペクトル面において鋭いピークを構成し、そのピークのサイドローブの値が小さくなるため、単位ベクトルの位相に用いる g の値の有効桁数が低下し、位相の 2 次曲線近似において誤差が増大するために生じる。したがって誤差を低下させるには、単位ベクトルの位相を求めるときの位相分割数 N_p を大きくし、位相の分解能を向上させればよい。Fig. 9(b) は、 N_p を 100 にしたものであり、 $N_p=50$ である Fig. 9(a) に比較して誤差は非常に小さくなっている。

Fig. 10 は、2 つの周期成分の位相差 $\Delta\varphi$ によって同定精度がどのように変化するかを示したものであり、 $f_1=19.6$, $\Delta f=0.7$, $r_a=1$ のときに $\Delta\varphi$ を 0 か

Fig. 10 Identification error of f_1 and f_2 as a function of $\Delta\varphi$ ($f_1=19.6$, $\Delta f=0.7$, $r_a=1$)

Fig. 11 Identification error of f_1 and f_2 as a function of r_a ($f_1=19.6$, $\Delta f=0.7$, $\Delta\varphi=\pi/2$)

ら π まで変化させた場合の同定誤差 f_{er} を示したものである。 $\Delta\varphi$ は 0 および π に近づくにつれて誤差 f_{er} が増大し、最終的には二つの周期成分の分離が不可能になる。二つの周波数の位相が接近するにつれ、(3.2) 式の内積の値が $\sin\Delta\varphi$ に比例して小さくなっていくために誤差 f_{er} は増大するのである。また、周波数の分離が不可能になるのは、Fig. 4 の g の値において二つの極小値のピークが接近してしまい、一つのピークとして検出してしまうためである。この欠点は、今回用いたアルゴリズム固有のものであり、取り除くことは不可能である。だが Fig. 10 よりわかるように、それはごく限られた範囲であり、1 つのピークに含まれる二つの周期成分の分離・同定は他の方法では不可能であるから、この方法の有用性を否定するものではない。データの区間の選択において、複素スペクトルの位相の変化の大きな部分のデータを選べばよい。周波数を分離するときに用いる単位ベクトル u_1, u_2 の位相をみることにより、2 つの周波数の位相 φ_1, φ_2 をチェックすることができる。

Fig. 11 は、 r_a を 0 から 1 まで変化させたときの周波数同定誤差 f_{er} を示している。このとき f_1 , Δf , $\Delta\varphi$ はそれぞれ 19.6, 0.7, $\pi/2$ に固定されている。 r_a が小さくなるにつれて f_{er} は急激に増大し、 r_a が小さくなりすぎると、ピークを判定する段階で単一周波数から構成されているピークであると判定され、周波数の分離・同定は不可能になる。

5. む す び

離散フーリエ変換において、複素スペクトルの位相

特性を利用することにより、一つのスペクトルピークに含まれる二つの接近した周波数の分離・同定が精度よく行えることを示した。また、周波数や二つの周波数差、位相差、振幅比などを変化させてその特性を調べ、広範囲にわたってこの方法が有効であることを示した。さらに、他のピークから受ける干渉が大きな場合でも、そのピークを除去することにより高精度の周波数同定が可能であることを明らかにした。他のピークによる干渉が問題にならない場合は、単一の観測窓において窓関数なしの 1 回の FFT に加えて、 N_p 回の内積の計算が必要となり、他のピークの干渉を除去する場合には、さらにデータの再構成と FFT 1 回の計算が加わり、全体としてかなり大きな計算量となる。しかし、二つ周波数が別々のピークを構成するように観測窓を長くして、FFT のポイント数を増加させるよりは、処理は高速であり、観測区間の定常性などの面からも有利である。また、その演算のほとんど

すべてが、複素定数と複素アレイデータの積和演算であり、アレイプロセッサに適したアルゴリズムであり、アレイプロセッサの普及とともに利用効果が生じるものと考えられる。一つのピークに含まれる周波数成分が三つ以上の場合も、ある特定の条件、たとえば二つの位相が同相あるいは逆相にある場合に、他の一つを分離抽出することは可能であるが、一般に本方式が有効なのは二つの周波数成分の場合に限られる。

最後に、日頃ご指導をいただく桜井良文教授に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) A. M. Noll and M. R. Schroeder: Short-Time 'Cepstrum' Pitch Detection, J. Acoust. Soc. Am., **36**-5 p. 1030 (1964)
- 2) M. D. Freedman: Analysis of Musical Instrument Tones, J. Acoust. Soc. Am., **41**-4 793/806 (1967)
- 3) 原裕一郎; 井口征士: 複素スペクトルを用いた周波数同定, 計測自動制御学会論文集, **19**-9 718/723 (1983)