スペクトル解析における Burg 法の改善[†]

花 崎 泉*・中 島 毅**・秋 月 影 雄*

An Improvement of Burg's Algorithm in Spectrum Analysis

Izumi HANAZAKI*, Tsuyoshi NAKAJIMA** and Kageo AKIZUKI*

Burg's algorithm and forward-backward linear prediction algorithm (FBLP algorithm) are effective for short data records in autoregressive spectrum analysis. But Burg's algorithm has several problems, including spectral line splitting and biases in frequency estimates. Burg's algorithm minimizes the sum of the forward and backward prediction powers subject to the constraint that the AR parameter estimates satisfy the Levinson recursion. The constraint causes the problems, but ensures the stable prediction filter. While FBLP algorithm minimizes it with respect to all AR parameters. This algorithm is the procedure in which the Levinson recursion constraint is removed, and includes less biases in frequency estimates and absence of spectral line splitting, however cannot guarantee the stable prediction filter.

In this paper, we propose a new algorithm possessing the advantage of Burg's algorithm and improving the estimates and show that spectral line splitting cannot be observed by using this algorithm.

Key Words: Burg's algorithm, FBLP algorithm, Levinson recursion, spectral line splitting

1. はじめに

AR 同定法によって推定されたパワースペクトル密度は、従来よく使われている Blackman-Turkey 法等のノンパラメトリック法に比べて高い分解能をもつといわれ、近年、地震学や音声の分野で非常に多く用い

られてきている。

AR 同定法は、時系列を AR モデルへあてはめることであり、本質的には 2 次評価を最小化してモデルのパラメータを決定する手法である^{1),2)}。しかし、実際に有限長のデータ列を扱う場合には、有限長ゆえに定式化の異なる種々の手法が存在し、多くの手法が提案されている。主な手法に、Yule-Walker 法、共分散法、Burg 法、前向後向線形予測法 (FBLP 法) がある。これらの手法は、十分長いデータに対してはほぼ同じ結果を示すが、短いデータに対しては異なる結果をもたらし、近年短いデータのスペクトル解析に関心がもたれていることから、検討されている問題である。

すでに、数多くの短いデータに対する各手法のシミュレーション実験より、Burg 法および FBLP 法が短いデータのスペクトル解析に有効であることが確認されている³⁾。これは、両手法が前向パワーだけでなく後向パワーを導入し、両者の和を評価関数にしているためと考えられる。しかし、Burg 法においては、推定値にバイアスが存在することや、スペクトルのラインズプリッティングが生じるなどの欠点があり、また FBLP 法においては安定性が保証されないという欠点がある。Burg 法と FBLP 法の違いは、Burg 法では Levinson の漸化式を仮定しているのに対し、FBLP 法はこの拘束を除いた最小 2 乗法となっている点である。

本稿では、Burg 法と FBLP 法の比較を通して、Burg 法における Levinson の漸化式の拘束がどのような影響を及ぼすかを明確にし、FBLP 法を order update に解く L. Marple⁶⁾ のアルゴリズムを導入することにより、Burg 法の利点を保持しつつ推定精度の改善を行う新アルゴリズムを提案し、シミュレーション実験によりこの手法の有効性を示す。さらに、Burg 法の欠点のひとつであるスペクトルのラインズプリッティング現象の原因を考察し、提案した手法がこの現象を抑制することを示す。

[†] 第 26 回自動制御連合講演会で発表 (昭 58・11)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

** 三菱電機(株)鎌倉製作所 鎌倉市上町屋 325

* Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

** Kamakura Works, Mitsubishi Electric Corp., Kamakura

(Received June 9, 1984)

(Revised October 9, 1984)

2. Burg 法の拘束に関して

2.1 Burg 法と FBLP 法

有限長データ列 $\{X(k): k=1, 2, \dots, N\}$ をつぎの AR モデルにあてはめる問題を考える。

$$X(k) + \sum_{i=1}^n a_{ni} X(k-i) = e(k) \quad (1)$$

a_{ni} : n 次 AR 係数

$e(k)$: 正規性白色雑音系列

ここで、つぎの n 次前向予測誤差系列, n 次後向予測誤差系列を定義する。

$$n \text{ 次前向予測誤差系列; } f_{nk} = \sum_{i=0}^n a_{ni} X(k+n-i) \quad (2)$$

$$n \text{ 次後向予測誤差系列; } b_{nk} = \sum_{i=0}^n a_{ni} X(k+i) \quad (3)$$

$a_{n0}=1, k=1, 2, \dots, N-n$; データ数

Burg 法と FBLP 法はともにデータ列と AR 係数のフィッティングの評価に、前向パワーと後向パワーとの平均

$$J_n = \sum_{k=1}^{N-n} \{f_{nk}^2 + b_{nk}^2\} \quad (4)$$

をとっている。

Burg 法は、(4)式で示された J_n を最小化することにより $\{a_{ni}\}$ を決定するが、その時、Levinson の漸化式中の一式

$$a_{nl} = a_{n-1,l} + a_{nn} a_{n-1,n-l} \quad l=1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

を拘束におき、 a_{nn} を評価 J_n を最小化するように決定する。そのアルゴリズムは下式である¹⁾。

$$a_{nn} = - \frac{2 \sum_{k=1}^{N-n} b_{n-1,k} f_{n-1,k-1}}{\sum_{k=1}^{N-n} \{b_{n-1,k}^2 + f_{n-1,k+1}^2\}} \quad (6)$$

$$b_{nl} = b_{n-1,l} + a_{nn} f_{n-1,l+1} \quad (7)$$

$$f_{nl} = f_{n-1,l+1} + a_{nn} b_{n-1,l} \quad (8)$$

$$a_{nl} = a_{n-1,l} + a_{nn} a_{n-1,n-l} \quad (9)$$

(5)式の拘束を置くことにより、評価 J_n は $(n-1)$ 次の AR 係数が既知であるとするならば、 n 次の反射係数 a_{nn} についてのみの最小化となっている。また、この拘束により、つぎの長所をもつ。

- i) 演算回数が推定次数の 2 乗の order ($O(n^2)$)
- ii) 推定される AR 係数が安定

((6)式で $|a_{nn}| < 1$)

一方、FBLP 法は、T. J. Ulrych と W. Clayton⁴⁾, A. H. Nuttal⁵⁾らによって別々に提案された。(4)式の J_n を無拘束で最小化するもので、そのときの AR

係数は次式を満たす。

$$\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0n} \\ r_{10} & r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n0} & r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで

$$r_{ij} = \frac{1}{2(N-n)} \sum_{k=1}^{N-n} \{X(k+n-i)X(k+n-j) + X(k+i)X(k+j)\} \quad (11)$$

σ_n^2 : n 次の最小予測誤差分散

FBLP 法も推定次数がかなり大きくなると (ほぼ $n > N/2$) 偽りのスペクトルピークを生じることがあるが、Burg 法のような周波数推定値のバイアスはほとんどない。しかし、FBLP 法では、予測誤差フィルタの安定性が保証されていない。

2.2 Burg 法の拘束に関する考察

ここでは、Burg 法において拘束式

$$a_{nl} = a_{n-1,l} + a_{nn} a_{n-1,n-l} \quad (5)$$

が推定に及ぼす影響について考察する。

n 次の AR 係数 $\{a_{ni}\}$ が (4) 式の評価関数 J_n を最小にしているならば、次式を満足する。

$$R_n [1, a_{n1}, \dots, a_{nn}]^T = [\sigma_n^2, 0, \dots, 0]^T \quad (12)$$

ただし

$$R_n = \begin{bmatrix} r_{00}^{(n)} & r_{01}^{(n)} & \dots & r_{0,n-1}^{(n)} & r_{0,n}^{(n)} \\ r_{10}^{(n)} & r_{11}^{(n)} & \dots & r_{1,n-1}^{(n)} & r_{1,n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1,0}^{(n)} & r_{n-1,1}^{(n)} & \dots & r_{n-1,n-1}^{(n)} & r_{n-1,n}^{(n)} \\ r_{n0}^{(n)} & r_{n1}^{(n)} & \dots & r_{nn-1}^{(n)} & r_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$r_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2(N-n)} \sum_{k=1}^{N-n} \{X(k+n-i)X(k+n-j) + X(k+i)X(k+j)\} \quad (14)$$

ここで、 R_n^{-1} , $R_n'^{-1}$ をつぎのように定義する。

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} r_{00}^{(n)} & r_{01}^{(n)} & \dots & r_{0,n-1}^{(n)} \\ r_{10}^{(n)} & r_{11}^{(n)} & \dots & r_{1,n-1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n-1,0}^{(n)} & r_{n-1,1}^{(n)} & \dots & r_{n-1,n-1}^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$R_n'^{-1} = \begin{bmatrix} r_{nn}^{(n)} & r_{n,n-1}^{(n)} & \dots & r_{n1}^{(n)} \\ r_{n-1,n}^{(n)} & r_{n-1,n-1}^{(n)} & \dots & r_{n-1,1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n}^{(n)} & r_{1,n-1}^{(n)} & \dots & r_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

(14) 式より

$$R_n^{-1} = R_n'^{-1} \quad (r_{ij}^{(n)} = r_{n-i,n-j}^{(n)}) \quad (15)$$

となる。 R_n^{-1} に対してつぎの方程式を満たす解 $\{\sigma_{n-1}^{*2}, a_{n-1,i}^*; i=1, 2, \dots, n-1\}$ を考える。

$$R_n^{-1} [1, a_{n-1,1}^{*2}, \dots, a_{n-1,n-1}^*]^T = [\sigma_{n-1}^{*2}, 0, \dots, 0]^T \quad (16)$$

(15) 式より、 $\{\sigma_{n-1}^{*2}, a_{n-1,i}^*\}$ は、

$$R_n'^{-1} [1, a_{n-1,1}^*, \dots, a_{n-1,n-1}^*]^T = [\sigma_{n-1}^{*2}, 0, \dots, 0]^T \quad (17)$$

を満たす。したがって、

$$\begin{aligned}
& R_n \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1,1}^* \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} + a_{nn} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{n-1,n-1}^* \\ \vdots \\ a_{n-1,1}^* \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} R_n^{n-1} & \vdots & r_{0n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n0}^{(n)} & \dots & r_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1,1}^* \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}^* \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ a_{nn} \begin{bmatrix} r_{00}^{(n)} & \dots & r_{0n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n0}^{(n)} & \dots & r_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{n-1,n-1}^* \\ \vdots \\ a_{n-1,1}^* \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_{n-1}^{*2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_n \end{bmatrix} + a_{nn} \begin{bmatrix} \Delta_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{n-1}^{*2} \end{bmatrix} \quad (18)
\end{aligned}$$

ただし

$${}_{1-u}^u R = \begin{bmatrix} r_{11}^{(n)} & r_{12}^{(n)} & \dots & r_{1n}^{(n)} \\ r_{21}^{(n)} & r_{22}^{(n)} & \dots & r_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}^{(n)} & r_{n2}^{(n)} & \dots & r_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

が成立し、 $\{\sigma_{n-1}^{*2}, a_{n-1,i}^*, i=1, 2, \dots, n-1\}$ は

$$a_{ni} = a_{n-1,i} + a_{nn} a_{n-1,n-i}^* \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (19)$$

を満たす。上式は Levinson の漸化式の形をしているが、実際には、

$$R_n^{n-1} \doteq R_{n-1} \quad (r_{ij}^{(n)} \doteq r_{ij}^{(n-1)}) \quad (20)$$

であるから、 $\{a_{ni}\}$ と $\{a_{n-1,i}\}$ の間には (19) 式の関係は成立しない。したがって、Burg 法では、各段の更新のたびに推定される反射係数 $a_{mn} (m=1, \dots, n)$ は、(4) 式の評価関数 J_n を最小化するという意味での最適性を失っていくことになる。

$r_{ij}^{(n)}$ と $r_{ij}^{(n-1)}$ はともに $\{X(k)\}$ の自己相関関数 $r_{|i-j|}$ の不偏一致推定値である。(14) 式より、

$$\begin{aligned}
& 2(N-n)r_{ij}^{(n)} - 2(N-n+1)r_{ij}^{(n-1)} \\
&= X(N-n+1+i)X(N-n+1+j) \\
&+ X(n-i)X(n-j) \quad (21)
\end{aligned}$$

であり、このデータ 2 個分の差が、各段の最適化に影響を及ぼす。また (21) 式より、データ数 N が小さく、推定次数 n が大きいとき影響が大きくなる。

3. Burg 法の改善

3.1 改善アルゴリズムの提案

ここで提案するアルゴリズムは、Levinson の拘束を用いずに反射係数を最適化するものである。すなわち、反射係数 a_{nn} は、Burg 法のアルゴリズム中の (6) 式を用いて得るのではなく、(12) 式を解いて得ることにある。それ以外は、Burg 法と同じである。ア

ルゴリズムを以下に示す。

(1) 次式を解いて a_{nn} を得る。

$$\begin{aligned}
& R_n [1, a_{n1}, \dots, a_{nn}]^T = [\sigma_n^2, 0, \dots, 0]^T \\
& R_n = [r_{ij}^{(n)}], r_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2(N-n)} \sum_{k=1}^{N-n} \\
& \quad \{X(k+n-i)X(k+n-j) \\
& \quad + X(k+i)X(k+j)\}
\end{aligned}$$

(2) $a_{ni} = a_{n-1,i} + a_{nn} a_{n-1,n-i}^* \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$

(3) $\sigma_n^2 = (1 - a_{nn}^2) \sigma_{n-1}^2$

(4) $n = n+1$ として (1) → (3) を繰り返す。

結局このアルゴリズムは、FBLP 法を各段で解いていることになり、一般的に逆行列演算の演算回数は $O(n^3)$ であるが、この手法では、各段で逆行列を解くことになり演算回数は $O(n^4)$ となる、しかし、FBLP 法における相関関数 R_n はつぎのように Toeplitz 行列から構成されている。

$$R_n = Y_n^T Y_n + (Y_n^T)^T Y_n$$

ここで、 Y_n はデータ行列であり、

$$Y_n = \begin{bmatrix} X(n+1) & X(n) & \dots & X(1) \\ X(n+2) & X(n+1) & \dots & X(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(N) & X(N-1) & \dots & X(N-n) \end{bmatrix}$$

Y_n^* は Y_n の reversed 行列である。L. Marple は R_n のこの構造を利用して、FBLP 法が order update に、しかも $O(n^2)$ で解けることを示した。したがって、このアルゴリズムを利用すれば、改善アルゴリズムの演算回数もまた $O(n^2)$ となり、演算の手間は Burg 法と同程度となる。

3.2 改善アルゴリズムの安定性

n 次の予測誤差エネルギーを

$$P_n = \sum_{k=1}^{N-n} \{f_{nk}^2 + b_{nk}^2\}$$

付加的な予測誤差エネルギーを

$$P_n^1 = \sum_{k=1}^{N-n-1} \{f_{n,k+1}^2 + b_{nk}^2\}$$

とすると、L. Marple のアルゴリズム中では、最小化後の予測誤差エネルギー間につぎの関係が成立している。

$$P_n = P_n^1 (1 - a_{nn}^2)$$

a_{nn} は改善アルゴリズムにおける反射係数であり、

$$P_n > 0, P_n^1 > 0$$

であるので、

$$|a_{nn}| < 1$$

となり、改善アルゴリズムで推定される AR 係数は理論的に安定となる。

3.3 シミュレーションによる検討

Table 1 に示す三つの AR モデルから生成したデータに対して FBLP 法および改善アルゴリズムを用

Table 1 Number of unstable cases using FBLP algorithm and the improved algorithm ($N=30$, samples 2000)

		$n=4$	$n=8$	$n=15$
model 1	FBLP	0	29	1064
	Algorithm Improved Algorithm	0	0	0
model 2	FBLP	0	330	1365
	Algorithm Improved Algorithm	0	0	0
model 3	FBLP	33	484	1497
	Algorithm Improved Algorithm	0	0	0

model 1	$a_1 = -1.8$	$a_2 = 1.65$	$a_3 = 1.176$	$a_4 = 0.442$
model 2	$a_1 = -0.8$	$a_2 = 1.1136$	$a_3 = -0.775$	$a_4 = 0.954$
model 3	$a_1 = -3.1$	$a_2 = 4.34$	$a_3 = -3.038$	$a_4 = 0.9604$

Table 2 The mean and the variance of the estimates of the reflection coefficient using Burg's algorithm and the improved algorithm ($N=30$, samples 2000)

m	true value a_{mm}	mean value		variance ($\times 100$)	
		Improved Algorithm	Burg's Algorithm	Improved Algorithm	Burg's Algorithm
1	-0.357	-0.373	-0.373	0.93	0.93
2	0.908	0.907	0.906	0.38	0.38
3	-0.700	-0.665	-0.659	0.66	0.68
4	0.874	0.879	0.868	0.47	0.49
5	-0.430	-0.439	-0.441	1.88	1.72
6	0.922	0.832	0.827	1.48	1.18
7	0.0	0.048	-0.038	4.36	3.71
8	0.0	0.029	0.095	5.18	5.13

いてシミュレーション実験を行った。ただし、データ数 N は 30、推定次数 n は $15(N/2)$ までとし、2000 個の場合について調べた。

Table 1 に FBLP 法と改善アルゴリズムを用いた場合の推定次数に対する不安定となる場合の数を示す。

改善アルゴリズムでは、推定される AR 係数の安定性は理論的に満たされているが、相関行列が非正則に近いとき、ill-condition が生じて安定性が満たされない場合も生じうる。どの例でも FBLP 法は推定次数が大きくなると不安定な場合が多くなり、 $n=15(n=N/2)$ では半分以上が不安定となっているのに対して、改善アルゴリズムでは $n \leq 15$ ですべての例で安定となった。 $n > 15$ または相関行列が非正則の場合不安定となる例も生じたが、ill-condition に注意していれば、不安定となる可能性はほとんどない。

Table 2 に、6 次の AR モデルに対する Burg 法と改善アルゴリズムの反射係数の推定値を示す。分散

値には大差はないが、平均値で改善アルゴリズムはより真値に近い。

4. ラインスプリッティングについて

(正弦波+白色雑音) のデータ列に Burg 法を用いた場合のラインスプリッティングについてつぎのことが報告されている⁷⁾。

① SN 比が高いとき生じる。

② 正弦波の 0.5 周期の倍数のデータ長では生じない。

③ 正弦波の 0.25 周期の奇数倍で生じやすい。

(初期位相が $0[\text{rad}]$, $\pi/2[\text{rad}]$ を除く)

④ 正弦波の 0.25 周期の奇数倍のデータ長で、かつ初期位相が $\pi/4$ の奇数倍のとき最も生じやすい。

そこで、(正弦波+白色雑音) のデータ例に対して、Burg 法を用いた場合に生じるラインスプリッティングの原因を考察し、改善アルゴリズムがこれを抑制することを示す。

4.1 正弦波に対する Burg 法の反射係数⁸⁾

データ列 $\{X(k)\}$ を次式で表わされる正弦波とする。

$$X(k) = A \cos \{(k-1)\omega + \phi\} \quad (22)$$

この場合、相関関数は、

$$r_l = \frac{A^2}{2} \cos l\omega \quad l=0, 1, \dots \quad (23)$$

となる。Levinson の漸化式により、反射係数 a_{1l} は、

$$\begin{cases} a_{11} = -\cos \omega & (24) \\ a_{22} = 1 & (25) \\ a_{1l} = 0 \quad (l > 2) & (26) \end{cases}$$

である。

ここで、データ列 $\{X(k)\}$ が有限長であるとする。有限長データ $\{X(k)\}$ に Burg 法を用いたときの反射係数 a_{1l}^B を求める。Burg のアルゴリズム (6)~(8) 式および (2), (3) 式より、

$$f_{0k} = b_{0k} = X(k) \quad (27)$$

$$a_{11}^B = -\frac{2 \sum_{k=1}^{N-1} X(k)X(k+1)}{\sum_{k=1}^{N-1} \{X^2(k) + X^2(k+1)\}} \quad (28)$$

$$f_{1k} = f_{0, k+1} + a_{11}^B b_{0k} = X(k+1) + a_{11}^B X(k) \quad (29)$$

$$b_{1k} = b_{0k} + a_{11}^B f_{0, k+1} = X(k) + a_{11}^B X(k+1) \quad (30)$$

$$a_{22}^B = -\frac{2 \sum_{k=1}^{N-2} (X(k) + a_{11}^B X(k+1))(X(k+1) + a_{11}^B X(k))}{\sum_{k=1}^{N-2} \{(X(k) + a_{11}^B X(k+1))^2 + (X(k+1) + a_{11}^B X(k))^2\}} \quad (31)$$

となる。ここで、

Fig. 1 The bias of the reflection coefficient a_{11}^B in Burg's algorithm

$$\begin{aligned}
 F(m, l_1, l_2) &= \sum_{k=1}^m X(k+l_1)X(k+l_2) \\
 &= \frac{m^2 A}{2} \{G(m, \omega) \cos(\phi_{m;d}^m + (l_1+l_2)\omega) \\
 &\quad + \cos(l_2-l_1)\omega\} \quad (32)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$G(m, \omega) = \frac{\sin m\omega}{m \sin \omega} \quad (33)$$

$$\phi_{m;d}^m = (m-1)\omega + 2\phi \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 F(m, l_1, l_2) + F(m, l'_1, l'_2) \\
 = m A^2 \left[G(m, \omega) \cos\left(\phi_{m;d}^m + \frac{l_1+l_2+l'_1+l'_2}{2}\omega\right) \right. \\
 \left. \cos \frac{l_1+l_2-l'_1-l'_2}{2}\omega \right. \\
 \left. + \cos \frac{l_2-l_1+l'_2-l'_1}{2}\omega \cdot \cos \frac{l_2-l_1-l'_2+l'_1}{2}\omega \right] \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\phi_{m;d}^{N-k} + k\omega = \phi_{m;d}^N \quad (36)$$

を用いると, a_{11}^B , a_{22}^B は次式になる.

$$\begin{aligned}
 a_{11}^B &= -\frac{2F(N-1, 0, 1)}{F(N-1, 0, 0) + F(N-1, 1, 1)} \\
 &= \frac{-\cos\omega - G(N-1, \omega) \cos\phi_{m;d}^N}{1 + G(N-1, \omega) \cos\phi_{m;d}^N \cos\omega} \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$a_{22}^B = -\frac{2[F(N-2, 0, 2) + a_{11}^B \{F(N-2, 0, 1) + F(N-2, 1, 2)\} + a_{11}^B F(N-2, 1, 1)]}{F(N-2, 0, 0) + F(N-2, 2, 2) + 2a_{11}^B \{F(N-2, 0, 1) + F(N-2, 1, 2)\} + 2a_{11}^B F(N-2, 1, 1)}$$

Fig. 2 The bias of the reflection coefficient a_{22}^B in Burg's algorithm

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-E_2)(1+2\cos\omega E_1 + E_1^2) - 2\sin^2\omega E_1^2}{(1-E_2)(1+2\cos\omega E_1 + E_1^2) + 2\sin^2\omega E_1^2 E_2} \quad (38)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$E_m = G(N-m, \omega) \cos\phi_{m;d}^N \quad (39)$$

Burg 法の反射係数 a_{11}^B , a_{22}^B の真値 a_{11} , a_{22} からの偏差 $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$ は,

$$\tilde{a}_{11} = a_{11} - a_{11}^B = \frac{E_1}{E_1 \cos\omega + 1} \sin^2\omega \quad (40)$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{22} - a_{22}^B = \frac{2\sin^2\omega E_1^2 (1+E_2)}{(1-E_2)(1+2\cos\omega E_1 + E_1^2) + 2\sin^2\omega E_1^2 E_2} \quad (41)$$

となり, $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$ は, 初期位相およびデータ長に依存していることがわかる. データ長 N が大きくなると,

$$E_1, E_2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

Table 3 Occurrence of Line Splitting in Burg's algorithm

(-: no existence, +: existence)

data length (cycle)	1.0	1.125	1.25	1.375	1.5
initial phase					
0	-	+	-	+	-
$\pi/4$	-	+	+	+	-
$\pi/2$	-	+	-	+	-

Fig. 3 Estimated power spectral density and estimated poles using Burg's algorithm for a sinusoidal signal in additive white noise

より,

$$a_{11}^p \rightarrow a_{11}, a_{22}^p \rightarrow a_{22} \quad (N \rightarrow \infty)$$

が示される.

$\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$ のデータ長に対する変化をそれぞれ **Fig. 1**, **Fig. 2** に示す. $\tilde{a}_{11}$ は初期位相が 0[rad] であるときは, 0.25 周期長で正負交互にピークが現れ, 初期位相が $\pi/4$ [rad] であるときは負に偏る. $\tilde{a}_{22}$ は Burg 法が $|a_{mm}| \leq 1$ を保証しているので必ず正である. $\tilde{a}_{22}$ は, 初期位相が 0[rad] のときは 0.25 周期長おきにピーク値を, 初期位相が $\pi/4$ [rad] のときは 0.5 周期長おきにピーク値をもち, このピーク値は他の初期位相の場合より大きい.

4.2 ラインスプリッティングの原因に関する考察

(正弦波+白色雑音) のデータ列に対して Burg 法を用いたシミュレーション実験を通し, ラインスプリッティングは, 現象的に見て「1つの正弦波数付近に2個あるいは多数個の近接した極を推定して, その周波数帯にエネルギーが集中する現象」と考えられる. シミュレーションは, SN 比が 80[dB], データ長を正弦波の 1.0~1.5 周期長を 0.125 周期長ごとにとり, 初期位相を 0[rad], $\pi/2$ [rad], $\pi/4$ [rad] にとった. ラインスプリッティングの有無を **Table 3** にまとめ

Fig. 4 Estimated power spectral density and estimated poles using Burg's algorithm for a sinusoidal signal in additive white noise

た. **Fig. 3** にはデータ長が 1.25 周期長である場合のパワースペクトル密度の推定値および極の推定値が示してある.

前節で求めた Burg 法の反射係数 a_{11}^p , a_{22}^p は SN 比が無大の場合に相当する. この $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$ のデータ長, 初期位相による変化と, このシミュレーション結果より, ラインスプリッティングの生ずるデータ長, 初期位相で $\tilde{a}_{22}$ が大きなピーク値をもつことから, Burg 法のラインスプリッティングの有無は $\tilde{a}_{22}$ に大きく依存する. (正弦波+白色雑音) の信号を次式で表わす.

$$X(k) = A \cos \{(k-1)\omega + \phi\} + e(k) \quad (42)$$

$e(k)$: 正規性白色雑音, 分散 σ_e^2

この場合, 信号のエネルギーは $A^2/2$, 雑音のエネルギーは σ_e^2 であり, SN 比は,

$$SNR = \frac{A^2}{2\sigma_e^2} \quad (43)$$

となる.

(42)式の形のデータ列は, ARMA(2,2)でモデリングすべきものであるが, 比較的 SN 比が高い (SNR=20[dB]) データ列を Burg 法を用いて AR モデルにフィッティングさせた場合の推定結果を **Fig. 4** に示す. **Fig. 4** からわかるように, 推定はまず信号に相当する極から行われ, 次数を上げていくにしたがい

Fig. 5 Prediction error power in Burg's algorithm and the improved algorithm

信号の極とは離れた方向に極が現れ、ほぼ同一円周上 ($r < 1$) に均等に分布するようになる。これは、AR 同定法がまず信号のエネルギーを抽出し、残った雑音のエネルギーを同一円周上の極によってなるべく均等に抽出しようとすることを示している。その結果として推定されるパワースペクトル密度は、次数の増加に伴い、Fig. 4 のように変化していく。

AR 同定法では n 次の予測誤差エネルギーは、

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}^2 (1 - a_{nn}) \quad (44)$$

で定まる。この n 次予測誤差エネルギーは n 次の予測誤差フィルタで予測できなかったエネルギーである。したがって、 σ_n^2 に占める雑音エネルギーの割合が増大する。

(42)式で SN 比が無限大の場合が (22)式である。このデータに対して FBLP 法では 2 次の反射係数が 1 となるはずであるが、Burg 法では雑音のない場合でさえ、Fig. 2 に示すように a_{22}^B は 1 よりかなり小さくなることもある。そのため、2 次で推定されなかったデータ列のエネルギーには多くの信号のエネルギーが含まれ、したがって 4 次で推定する極も信号周波数付近に生じることになる。一方、SN 比が低い場合には、2 次の予測誤差エネルギー中での雑音の占める割合が高くなり、4 次の極が雑音エネルギーに反応して信号周波数から離れたところに推定されると説明できる。以上の意味において、ラインスプリッティングの主な原因として $\hat{a}_{22}$ が考えられる。

4.3 改善アルゴリズムとラインスプリッティング

Fig. 6 Estimated power spectral density and estimated poles using the improved algorithm

前章で提案した改善アルゴリズムでは、2 次の反射係数 a_{22} が FBLP 法の a_{22} と同じであり、Burg 法のようにデータ長や初期位相の影響を受けないため、高 SN 比のデータに対してラインスプリッティングを生じない。Burg 法と改善アルゴリズムにおける次数に対する予測誤差エネルギーの変化のようすを Fig. 5 に示す。(データ長 1.25 周期長) 改善アルゴリズムが、初期位相にかかわらず 2 次で急激に予測誤差エネルギーが小さくなっているのに対し、Burg 法ではラインスプリッティングを生じる条件では、予測誤差エネルギーは 2 次以降もなめらかに推移している。このことは他のデータ長についてもいえる。前節の Burg 法と同じ条件で改善アルゴリズムを用いた場合、どの例についてもラインスプリッティングは生じなかった。データ長が 1.25 周期長の場合を Fig. 6 に示す。この点でも、改善アルゴリズムは有効的である。

しかし、周波数推定値にバイアスをもつ場合がある。これは、改善アルゴリズムの反射係数 a_{11} が Burg 法の a_{11}^B と同じであり、しかもそれは (37)式で表わされるように初期位相、データ長に依存してバイアスをもっているためである。

5. あとがき

Burg 法と FBLP 法の間的手法として新しいアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは安定であり、演算回数は Burg 法と同程度である。また Burg 法がラインスプリッティングを生じる条件のもとでもラインスプリッティングを生ぜず、推定精度も高いものである。

参考文献

- 1) 添田, 中溝, 大松: 信号処理の基礎と応用, 日新出版

- (1979)
- 2) S. M. Kay, and S. L. Marple: Spectrum Analysis-A Modern Perspective, Proc. of IEEE, **69**-11, 1380/1419 (1981)
 - 3) 秋月, 中島, 増石: 短いデータに対する Burg 法の特徴, 第 22 回 SICE 学術講演会予稿集, 469/470 (1983)
 - 4) T. J. Ulrych and R. W. Clayton: Time Series Modeling and Maximum Entropy, Phys. Earth and Plan. Int., **12**, 188/200 (1976)
 - 5) A. H. Nuttal: Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques, Naval Underwater Systems Center, New London, CT. Tech. Rep. 5303 (1976)
 - 6) L. Marple: A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm, IEEE. Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, **ASSP-28**-4, 441/454 (1980)
 - 7) P. F. Fougere, E. J. Zawalick and H. R. Radoski: Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power Spectrum Analysis, Phy. Earth and Plan. Int., **12**, 201/207 (1976)
 - 8) R. W. Herring: The Cause of Line Splitting in Burg Maximum-Entropy Spectral Analysis, IEEE. Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, **ASSP-28**-6, 692/701 (1980)
-