飽和状態をもつ確率分布定数系に対する状態推定

砂 原 善 文*・相 原 伸 一**・石 川 昌 明*・金 児 純 司***

On the State Estimations for Stochastic Distributed Parameter Systems with Saturation

Yoshifumi SUNAHARA*, Shin'Ichi AIHARA**, Masaaki ISHIKAWA* and Junji KANEKO***

This paper is concerned with the state estimation problems for the stochastic distributed parameter systems with saturation.

First, formulating the system model as stochastic variational inequality, the existence and uniqueness properties of the solution are investigated by using the penalization method.

Secondly, the dynamics of the state estimator is given under distributed observations. A practical implementation algorithm of the estimator dynamics is also proposed with the aid of the finite difference method with respect to time and spatial variables.

Finally, for the purpose of supporting the theoretical aspects developed here, an illustrative example is shown including results of digital simulations.

Key Words: stochastic distributed parameter systems, stochastic variational inequality, free boundary, noisy distributed observations

1. 緒 言

従来、拡散現象を記述する数学モデルとして放物形偏微分方程式が用いられてきたが、最近放物形偏微分方程式だけではモデル化できない拡散現象が注目され始めた。たとえば化学反応炉内の拡散問題において、反応物質の濃度を状態量 (u と表わす) に選べば、濃度は飽和値 (ϕ_0 とする) を越えることがないため、

Fig. 1 に示されたように、システムの定義域 G において、つぎの二つの領域が存在することになる。

(i) $G - G_C' = \{x \in G | u(t, x) < \phi_0(x)\}$: この領域においては反応物質が拡散状態にあるため、従来どおり濃度分布 u を、つぎのような放物形偏微分方程式の解としてモデル化することができる。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) = f(t, x) - \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \\ (t, x) \in T =]0, t_f[\times (G - G_C') \quad (1.1)$$

ただし、 $x = (x_1, x_2)$, Δ は 2 次元ラプラシアン, f は確定的な既知関数, $\partial w(t, x)/\partial t$ はブラウン運動過程 $w(t, x)$ の形式的微分であり、白色雑音を表わす。

(ii) $G_C' = \{x \in G | u(t, x) = \phi_0(x)\}$: 濃度分布 u が飽和値 ϕ_0 に達した領域であり、この領域では (1.1) 式のような等式のかわりにつぎのような不等式が成立することが知られている¹⁾。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) \leq f(t, x) - \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \\ (t, x) \in T \times G_C' \quad (1.2)$$

(1.1) および (1.2) 式に対する初期および境界条件は、つぎのように与えられるものとする。

Fig. 1 Illustration of the system state with saturation

* 京都工芸繊維大学工学部
京都市左京区松ヶ崎御所海道町

** Twente University

*** 富士通(株)国際情報社会科学研究所
東京都大田区新蒲田 1-17-25

* Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

** Twente University, Enschede, The Netherlands

*** The International Institute for Advanced Study of Social Information Science, Ohta-ku, Tokyo
(Received May 7, 1984)

(Revised September 8, 1984)

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in G \quad (1.3a)$$

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in T \times \partial G \quad (1.3b)$$

飽和状態を考慮した拡散問題と考慮しない場合との相異点は、飽和状態を考慮した場合には、(1.2)式のような不等式が数学モデルに現れるということに加えて、飽和領域 G_c' と不飽和領域 $G - G_c'$ との境界 Γ_i とする。) の挙動が状態量に依存するため、 Γ_i が自由境界になるということである。したがって先験的に飽和領域 G_c' の時間的進化を知ることはできない。そこで本論文の目的は、飽和状態を伴う拡散現象に対する状態推定問題を考察することである。まず、第2節において飽和状態を伴う拡散現象は、変分不等式としてモデル化されることを示す。そして定理2.1によって、変分不等式が飽和状態を伴う拡散現象に対して数学的に妥当な数学モデルであることを明らかにする。また定理2.1より、本論文で確立したシステムの数学モデルは、半浸透壁を有する拡散現象およびステファン問題など、いわゆる自由境界値問題におけるシステムの数学モデルとしても十分有効である。第3および4節においては、状態推定問題が考察され、変分不等式としてモデル化されたシステムに対して、推定誤差分散が評価できるような推定機構の構成法を提案し、第5節でシミュレーション実験の結果が示される。

本論文で用いられる主な記号はつぎのとおりである。

Ω ; 見本空間

$L^2(G)$; G 上で2乗可積分な関数の空間

$H_0^1(G)$; 次数1のソボレフ空間に属し、 G の境界で0になる関数の空間

$|\cdot|, \|\cdot\|$; それぞれ $L^2(G), H_0^1(G)$ のノルムを表わす。

$L^2(X; Y)$; つぎのような関数 f の空間, $\int_X \|f(x)\|_Y^2 dx < \infty$

$L^\infty(T; X)$; $\text{ess sup}_{t \in T} \|f(t)\|_X < \infty$ を満たす関数 f の空間

$C(X; Y)$; X から Y への連続関数の空間

$L^1(X; Y)$; X から Y へのトレース作用素の空間

2. 確率変分不等式

(1.1) および (1.2) 式の定義域, すなわち, $G - G_c'$ および G_c' は状態量に依存しながら時間とともに変化するため, 直接 (1.1) および (1.2) 式を取り扱うことは困難である。そこで, まず (1.1), (1.2) の両式を文献1) より, つぎのような全領域 G で成立する方程式に書き換える。

$$u(t, x) \leq \phi_0(x), \quad (t, x) \in T \times G \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \leq f(t, x) \quad (t, x) \in T \times G \quad (2.1b)$$

$$(u(t, x) - \phi_0(x)) \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} - f(t, x) \right) = 0 \quad (t, x) \in T \times G \quad (2.1c)$$

初期および境界条件は (1.3) 式で与えられる。

ここで, つぎのヒルベルト空間を考える。

$$V = H_0^1(G) \subset H = L^2(G) \subset V' = H^{-1}(G)$$

ただし V' は V の双対空間を表わす。さらにつぎのような空間 K を導入する。

$$K = \{ \varphi | \varphi \in L^2(\Omega; L^2(T; V)) \cap C(\bar{T}; H) \}, \\ \varphi \leq \phi_0 \text{ a.e. in } T \times G \text{ w.p. 1} \} \quad (2.2)$$

この空間 K を用いて, (2.1) 式はつぎのような確率変分不等式として定式化できる¹⁾。

$$\Sigma_1; \begin{cases} (u(t), \varphi) - \int_0^t \langle v(s), \varphi \rangle ds = (u_0, \varphi) - (w(t), \varphi) \\ \forall \varphi \in V \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \int_0^t \langle v(s), \varphi(s) - u(s) \rangle ds + \int_0^t \langle Au(s), \varphi(s) - u(s) \rangle ds \\ \geq \int_0^t \langle f(s), \varphi(s) - u(s) \rangle ds \quad \forall \varphi \in K \end{cases} \quad (2.4)$$

$$u \in K, \quad v \in L^2(\Omega \times T; V') \quad (2.5)$$

ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V と V' との内積

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^2 \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i, \quad \forall \varphi, \psi \in V$$

$w(t)$ はつぎのような H 値ブラウン運動過程である。

$$E\{|w(t)|^2\} = \int_0^t \text{tr}[Q(s)] ds \quad (2.6)$$

ここで Q は $\mathcal{L}^1(H; H)$ に属する自己共役作用素であり, tr は作用素のトレースを表わす。

Σ_1 は不等式を含んでいるため, 直接 Σ_1 の解の存在と一意性を証明することは困難である。そこで, まずペナライゼーション法¹⁾を用いて, Σ_1 に対して次式を考える。つぎのペナライゼーション方程式の解 u_ε は (2.3) および (2.4) 式を満たすことは容易に検証できるが, $u_\varepsilon \in K$ かどうかはわからない。

$$(u_\varepsilon(t), \varphi) + \int_0^t \langle Au_\varepsilon, \varphi \rangle ds + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} ((u_\varepsilon - \phi_0)^+, \varphi) ds \\ + (w(t), \varphi) = (u_0, \varphi) + \int_0^t \langle f, \varphi \rangle ds \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \forall \varphi \in V \quad (2.7)$$

ここで, $C^+ = \sup(0, C)$ である。

[補題 1] つぎの条件のもとで

$$(C-1) \quad u_0 \in L^2(\Omega; H), \quad f \in L^2(T; H),$$

$$\phi_0 \in H^1(G), \phi_0 \geq 0 \quad \text{a. e. in } G$$

(2.7) の一意解 u_ε

$$u_\varepsilon \in L^2(\Omega; C(\bar{T}; H) \cap L^2(T; V)) \quad (2.8)$$

が存在し、次式が成立する.

$$E \left\{ \sup_{t \in T} |u_\varepsilon(t)|^2 \right\} \leq C \quad (2.9a)$$

$$E \left\{ \int_0^{t_f} \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \right\} \leq C \quad (2.9b)$$

$$E \left\{ \int_0^{t_f} \frac{1}{\varepsilon} |(u_\varepsilon - \phi_0)^+|^2 ds \right\} \leq C \quad (2.9c)$$

ここで、 C は ε と独立な定数である.

文献2)の結果を用いて、補題1は容易に証明されるので、ここでは記述を略する.

《定理 1》 条件 (C-1) のもとで、 Σ_1 に対する一意解 $u \in K$ が存在する.

(証明) (i) 解の存在; (2.7) 式において

$$-v_\varepsilon(t) = Au_\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon(t) - \phi_0)^+ - f \quad (2.10)$$

と置けば、次式を得る.

$$\begin{aligned} & (u_\varepsilon(t), \varphi) - \int_0^t \langle v_\varepsilon(s), \varphi \rangle ds + (w(t), \varphi) \\ &= (u_0, \varphi), \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (2.11)$$

このとき、補題1の評価式(2.9)より、つぎのような u_ε の部分列 $u_{\varepsilon'}$ を選ぶことができる.

$$\begin{aligned} & u_{\varepsilon'} \rightarrow u(L^2(T; L^2(\Omega; H))) \text{ における汎弱収束} \\ & u_{\varepsilon'} \rightarrow u(L^2(\Omega \times T; V)) \text{ における弱収束} \\ & (u_{\varepsilon'} - \phi_0)^+ \rightarrow 0 \text{ } (L^2(\Omega \times T; H)) \text{ における強収束} \end{aligned} \quad (2.12a)$$

さらに、 v_ε の定義式(2.10)より、つぎのような v_ε の部分列 $v_{\varepsilon'}$ を選ぶことができる.

$$v_{\varepsilon'} \rightarrow v(L^2(\Omega \times T; V)) \text{ における弱収束} \quad (2.12b)$$

(2.12) 式より、(2.11) 式において、 $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ として次式を得る.

$$\begin{aligned} & (u(t), \varphi) - \int_0^t \langle v(s), \varphi \rangle ds + (w(t), \varphi) \\ &= (u_0, \varphi), \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) 式において、 $v \in L^2(\Omega \times T; V)$ 、 w は H 値 2 乗可積分連続マルチンゲールであることに注意すれば、文献2)より、 $u \in L^2(\Omega; C(\bar{T}; H))$ が容易に導かれる. さらに、 $(\cdot)^+$ の単調性と(2.12)式より、 $u \leq \phi_0$ a. e. in $T \times G$ w. p. 1, すなわち $u \in K$ が得られるので、(2.13) 式の解 u が変分不等式(2.4)を満足することを示せば、証明は完結する. そこで、まず(2.10)式の両辺に $\varphi - u_\varepsilon$ ($\forall \varphi \in K$) を乗じて、部分積分を行えば、次式を得る.

$$-\int_0^t \langle v_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle ds = \int_0^t \langle Au_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle ds$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ((u_\varepsilon - \phi_0)^+, \varphi - u_\varepsilon) ds - \int_0^t (f, \varphi - u_\varepsilon) ds \quad (2.14)$$

ここで $\varphi \in K$ に注意すれば、 $\varphi \leq \phi_0$ より次式を導くことができる.

$$\int_0^t ((u_\varepsilon - \phi_0)^+, \varphi - u_\varepsilon) ds \leq 0 \quad (2.15)$$

(2.15) 式を(2.14)式に用いて、つぎの不等式を得る.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle v_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle ds + \int_0^t \langle Au_\varepsilon, \varphi - u_\varepsilon \rangle ds \\ & \geq \int_0^t (f, \varphi - u_\varepsilon) ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

また(2.11)式に、伊藤の公式を用いて次式を得る.

$$\begin{aligned} & |u_\varepsilon(t)|^2 - 2 \int_0^t \langle v_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle ds + 2 \int_0^t (u_\varepsilon, dw) \\ &= |u_0|^2 + \int_0^t \text{tr}[Q] ds \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.17) 式を(2.16)式に代入すれば、次式が導かれる.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle v_\varepsilon, \varphi \rangle ds + \int_0^t \langle Au_\varepsilon, \varphi \rangle ds - \int_0^t (f, \varphi - u_\varepsilon) ds \\ & - \int_0^t (u_\varepsilon, dw) + \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr}[Q] ds \\ & \geq \int_0^t \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle ds + \frac{1}{2} \{ |u_\varepsilon(t)|^2 - |u_0|^2 \} \end{aligned} \quad (2.18)$$

(2.9) 式より、(2.18) 式の右辺は

$$\begin{aligned} & \liminf_\varepsilon \left[\int_0^{t_f} \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle ds + \frac{1}{2} \{ |u_\varepsilon(t_f)|^2 - |u_0|^2 \} \right] \\ & \geq \int_0^{t_f} \langle Au, u \rangle ds + \frac{1}{2} \{ |u(t_f)|^2 - |u_0|^2 \} \end{aligned} \quad (2.19)$$

となるので、(2.18) 式において $\varepsilon \rightarrow 0$ として結局次式を得る.

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \langle v, \varphi \rangle ds + \int_0^{t_f} \langle Au, \varphi \rangle ds - \int_0^{t_f} (f, \varphi - u) ds \\ & - \int_0^{t_f} (u, dw) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \text{tr}[Q] ds \\ & \geq \int_0^{t_f} \langle Au, u \rangle ds + \frac{1}{2} \{ |u(t_f)|^2 - |u_0|^2 \} \end{aligned} \quad (2.20)$$

一方、(2.13) 式に対して伊藤の公式を用いて

$$\begin{aligned} & |u(t_f)|^2 - 2 \int_0^{t_f} \langle v, u \rangle ds + 2 \int_0^{t_f} (u, dw) \\ &= |u_0|^2 + \int_0^{t_f} \text{tr}[Q] ds \end{aligned} \quad (2.21)$$

が得られるので、(2.21) 式を(2.20)式に代入すれば、変分不等式(2.4)が導かれる.

(ii) 解の一意性: 今、 Σ_1 に対してつぎのような二つの解 (u_1, v_1) および (u_2, v_2) が存在したとする.

$$u_i \in K \quad (2.22a)$$

$$(u_i, \varphi) - \int_0^t \langle v_i, \varphi \rangle ds = (u_0, \varphi) - (w(t), \varphi) \quad \forall \varphi \in V \quad (2.22b)$$

$$\int_0^t \langle v_i, \varphi - u_i \rangle ds + \int_0^t \langle Au_i, \varphi - u_i \rangle ds \geq \int_0^t (f, \varphi - u_i) ds \quad \forall \varphi \in K \quad (2.22c)$$

ここで、 $i=1, 2$ である。(2.22)式において $i=1$ および 2 に対して、それぞれ $\varphi=u_2$ および u_1 と選べば次式が得られる。

$$-\int_0^t \langle v_1, u_1 - u_2 \rangle ds - \int_0^t \langle Au_1, u_1 - u_2 \rangle ds \geq -\int_0^t (f, u_1 - u_2) ds \quad (2.23)$$

$$\int_0^t \langle v_2, u_1 - u_2 \rangle ds + \int_0^t \langle Au_2, u_1 - u_2 \rangle ds \geq \int_0^t (f, u_1 - u_2) ds \quad (2.24)$$

(2.23)式と(2.24)式の辺々を加えて、つぎの不等式を得ることができる。

$$-\int_0^t \langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle ds - \int_0^t \langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle ds \leq 0 \quad (2.25)$$

一方、(2.22b)式より

$$|u_1 - u_2|^2 - 2 \int_0^t \langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle ds = 0 \quad (2.26)$$

が導かれるので、(2.26)式を(2.25)式に代入して結局次式を得る。

$$\frac{1}{2} |u_1 - u_2|^2 + \int_0^t \langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle ds \leq 0 \quad (2.27)$$

(2.27)式は Σ_1 の解が $L^2(T; V) \cap C(\bar{T}; H)$ において確率 1 で一意であることを示している。

3. 観測機構

システム Σ_1 に対して、つぎのような分布観測機構を考える。

$$y(t) = \int_0^t Hu(s)ds + \int_0^t r(s)de(s) \quad (3.1)$$

ここで、 $e(t)$ はシステム雑音 $w(t, x)$ とは独立な 1 次元標準ブラウン運動過程

$$H(\cdot) = \int_{G_0} h(x)(\cdot)dx$$

であり、 G_0 はシステムの設定域 G の空でない部分領域である。つぎの定理より、(3.1)式は分布観測機構の数学モデルとして、十分意味をもつ。

《定理 2》 条件 (C-1) および (C-2)

$$(C-2): r, r^{-1} \in C(\bar{T}), h \in L^\infty(G_0)$$

のもとで、(3.1)式に対するつぎのような観測過程 y が一意に存在する。

$$y \in L^2(\Omega; C(\bar{T})) \quad (3.2)$$

定理 2 は定理 1 より容易に導かれるので、証明を略する。

4. 状態推定問題

システム Σ_1 は不等式を含んだ非線形システムであるため、最小分散推定の意味で最適な推定機構を構成しようとするれば、それは非線形推定機構となり実現不可能なものになる。そこで、本論文では推定誤差分散が評価でき、かつ実現可能な推定機構の構成法を提案する。まず、推定機構の動特性をつぎのように仮定する。

$$\tilde{u} \in K \text{ かつ } \tilde{u}(t) \text{ および } \tilde{v}(t) \text{ は、} \mathcal{Q}_t\text{-可測} \quad (4.1a)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{u}(t), \varphi) - \int_0^t \langle \tilde{v}(s), \varphi \rangle ds &= (\tilde{u}_0, \varphi) \\ &+ \int_0^t (L(s), \varphi)(dy(s) - H\tilde{u}(s)ds) \end{aligned} \quad \forall \varphi \in V \quad (4.1b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \tilde{v}(s), \varphi(s) - \tilde{u}(s) \rangle ds + \int_0^t \langle A\tilde{u}(s), \varphi(s) - \tilde{u}(s) \rangle ds \\ \geq \int_0^t (f(s), \varphi(s) - \tilde{u}(s)) ds \quad \forall \varphi \in K \end{aligned} \quad (4.1c)$$

ここで、 $\tilde{u}_0 = E\{u_0\}$ 、 $\mathcal{Q}_t = \sigma\{y(s); 0 \leq s \leq t\}$ であり、推定ゲイン L は $C(\bar{T}; H)$ に属する一様有界な確定関数とし、推定誤差分散の上限を最小にするように後で決定される。

[補題 2] 条件 (C-1) および (C-2) のもとで (4.1) 式に対する一意解 $\tilde{u} \in K$ および $\tilde{v} \in L^2(\Omega \times T; V')$ が存在する。

補題 2 は定理 1 の証明と同じ手法を用いることによって導かれるので、ここでは記述を略する。

$$\text{《定理 3》 (4.1)式において推定ゲイン } L(t) \text{ を} \quad L^0(t) = r^{-2}(t)(HP(t))^* \quad (4.2)$$

と選べば、つぎの評価式が成立する。

$$E\{|u(t) - \tilde{u}^0(t)|^2\} \leq \text{tr}[P(t)] \quad (4.3)$$

ここで、 $(\cdot)^*$ は $(\cdot)$ の共役作用素および $\tilde{u}^0$ は推定ゲイン L^0 に対する推定過程を表わし、 $P(t)$ はつぎのリカッチ形方程式の解である。

$$\begin{aligned} (\dot{P}(t)\varphi, \psi) + \langle A\varphi, P(t)\psi \rangle \\ + \langle AP(t)\varphi, \psi \rangle + r^{-2}(t)(HP(t)\varphi, HP(t)\psi) \\ = (Q(t)\varphi, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in V \end{aligned} \quad (4.4)$$

初期条件はつぎのように与えられる。

$$(P(0)\varphi, \psi) = (E\{u_0 - \tilde{u}_0\} \otimes (u_0 - \tilde{u}_0))\varphi, \psi)$$

ただし $\varphi \otimes \psi = \varphi(\psi, \cdot)$ である。

(証明) (4.4)式に対する一意正定値 $P \in C(\bar{T}; \mathcal{L}^1(H; H)) \cap L^2(T; \mathcal{L}^1(H; V)) \cap L^1(V; H)$ の存在は文献3)の結果より容易に証明され、また(4.2)式より、 $L^0 \in C(\bar{T}; H)$ は明らかなので、評価式(4.3)を導けば証明は完結する。今、 $z(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$ と置き、(2.3)および(4.1b)式より $z(t)$ -過程の満足する式を導出し、 $\forall \varphi \in V$ に対して $(Z \otimes z \varphi, \varphi)$ に伊藤の公式を用い、さらに期待値演算を行えば

$$\begin{aligned} & (\overline{z \otimes z \varphi}, \varphi) + \int_0^t \langle \overline{(v - \tilde{v}) \otimes z \varphi}, \varphi \rangle ds \\ & + \int_0^t \langle \overline{z \otimes (v - \tilde{v}) \varphi}, \varphi \rangle ds = (\overline{z_0 \otimes z_0 \varphi}, \varphi) \\ & - \int_0^t (LH \otimes H \overline{z \otimes z \varphi}, \varphi) ds - \int_0^t (\overline{z \otimes z} H^* L^* \varphi, \varphi) ds \\ & + \int_0^t r^2 (L \otimes L^* \varphi, \varphi) ds + \int_0^t (Q \varphi, \varphi) ds \quad (4.5) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\overline{(\cdot)} = E\{\cdot\}$ である。一方、(2.4)および(4.1c)式において、それぞれ $\varphi = \tilde{u}$ および $\varphi = u$ と置き、両式を辺々加えることによって

$$-\langle v - \tilde{v}, z \rangle \geq \langle Az, z \rangle \quad (4.6)$$

となる。ここで、 $\varphi_i (i=1, 2, \dots)$ を V の要素で構成された H の正規直交基底とすれば、(4.6)式より

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \langle (v - \tilde{v}) \otimes z \varphi_i, \varphi_i \rangle \geq \sum_{i=1}^{\infty} \langle Az \otimes z \varphi_i, \varphi_i \rangle \quad (4.7)$$

が導かれる。そこで(4.5)式において、 $\varphi = \varphi_i$ と選び、(4.5)式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} (\overline{z \otimes z \varphi_i}, \varphi_i) + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \langle \overline{Az \otimes z \varphi_i}, \varphi_i \rangle ds \\ & \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\overline{z_0 \otimes z_0 \varphi_i}, \varphi_i) - 2 \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} (LH \overline{z \otimes z \varphi_i}, \varphi_i) ds \\ & + \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} (Q \varphi_i, \varphi_i) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} r^2 (L \otimes L^* \varphi_i, \varphi_i) ds \quad (4.8) \end{aligned}$$

ここで、(4.8)式に対して次式を考える。

$$\begin{aligned} & (\tilde{P}(t; L) \varphi, \varphi) + \langle A \varphi, \tilde{P}(t; L) \varphi \rangle \\ & + \langle A \tilde{P}(t; L) \varphi, \varphi \rangle = -(LH \tilde{P}(t; L) \varphi, \varphi) \\ & - (\tilde{P}(t, L) H^* L^* \varphi, \varphi) + r^2 (L^* \varphi, L^* \varphi) \\ & + (Q(t) \varphi, \varphi), \quad \forall \varphi, \varphi \in V \quad (4.9) \end{aligned}$$

初期条件はつぎのように与える。

$$(\tilde{P}(0; L) \varphi, \varphi) = (E\{(u_0 - \tilde{u}_0) \otimes (u_0 - \tilde{u}_0)\} \varphi, \varphi)$$

(4.8)式と(4.9)式を比較すれば、(4.9)式の解 $\tilde{P}$ が(4.8)式の最大解であること、すなわち次式が成立することがわかる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\overline{z \otimes z \varphi_i}, \varphi_i) \leq \text{tr}[\tilde{P}(t; L)] \quad (4.10)$$

このとき、リカッチ方程式に対する比較定理⁹⁾より推

定ゲイン L を(4.2)式のように選べば

$$\text{tr}[P(t)] \leq \text{tr}[\tilde{P}(t; L)] \quad (4.11)$$

が成立する。このとき、 $\text{tr}[\tilde{P}(t; L^0)] = \text{tr}[P(t)]$ に注意すれば、(4.10)および(4.11)式より、次式を得る。

$$E\{|u(t) - \tilde{u}^0(t)|^2\} \leq \text{tr}[P(t)] \leq \text{tr}[\tilde{P}(t; L)]$$

5. シミュレーション実験

システムの定義域 G を1次元領域 $]0, 1[$ とし、有限差分法を用いてシミュレーション実験を行う。ここでは、簡単のため推定機構(4.1)式の離散化法について述べる。まず、時間区間 $]0, t_f[$ および空間領域 $]0, 1[$ をそれぞれ N および M 個に分割する。つまり、 $\Delta t = t_f/N$, $\Delta x = 1/M$ とする。ここで、 $t^m = m\Delta t (m=0, 1, \dots, N)$, $x_i = i\Delta x (i=0, 1, \dots, M)$ として、 $\tilde{u}(t^m, x_i) = \tilde{u}_i^m$ と表現し、(4.1)式をつぎのように時間および位置変数に関して離散化する。

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{u}_i^{m+1/2} - \tilde{u}_i^m}{\Delta t} - (\tilde{u}_i^m)_{xx} = f_i^m \\ & + (r^m)^{-2} \left(\sum_{j=k_1}^{k_2} h_j p_{ij}^m \Delta \xi \right) \left\{ \frac{y^{m+1} - y^m}{\Delta t} \right. \\ & \left. - \sum_{l=k_1}^{k_2} h_l \tilde{u}_l^m \Delta x \right\} \quad (5.1a) \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_i^{m+1} = \tilde{u}_i^{m+1/2} - (\tilde{u}_i^{m+1/2} - \phi_{0i})^+ \quad (5.1b)$$

$$\tilde{u}_i^m \leq \phi_{0i} \quad (5.1c)$$

初期および境界条件はつぎのように与えられる。

$$\tilde{u}_i^0 = \tilde{u}_{i0}, \quad \tilde{u}_0^m = \tilde{u}_M^m = 0 \quad (5.1d)$$

ここで

$$(g_i)_{xx} = (g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1})/(\Delta x)^2$$

$\tilde{u}_i^{m+1/2}$ は $\tilde{u}_i^{m+1}$ が飽和値 ϕ_{0i} 以下になるように導入された関数であり、観測領域 G_0 は $]k_1 \Delta x, k_2 \Delta x[$ と設定されており、さらに p_{ij}^m は(4.4)式の解 P の核 $p(t, x, \xi)$ の離散表現であり、次式の解

$$\begin{aligned} & \frac{p_{ij}^{m+1} - p_{ij}^m}{\Delta t} - (p_{ij}^{m+1})_{xx} - (p_{ij}^{m+1})_{\xi\xi} \\ & + (r^m)^{-2} \left(\sum_{j=k_1}^{k_2} h_j p_{ij}^m \Delta \xi \right) \left(\sum_{l=k_1}^{k_2} h_l p_{il}^m \Delta x \right) = Q_{ij}^m \quad (5.2a) \end{aligned}$$

初期および境界条件は、つぎのように与えられる。

$$p_{ij}^0 = E\{(u_{0i} - \tilde{u}_{0i})(u_{0j} - \tilde{u}_{0j})\} \quad (5.2b)$$

$$p_{0j}^m = p_{i0}^m = 0, \quad p_{Mj}^m = p_{iM}^m = 0 \quad (5.2c)$$

ここで Q_{ij}^m は、(2.6)式における Q の核 $q(t, x, \xi)$ の離散表現である。

文献4)の結果から、時間および位置方向の差分幅 Δt および Δx が次式を満足すれば、差分方程式の解は安定であり、もとの方程式の解に収束することが証明できるが、ここでは記述を略する。

$$1 - \Delta t / \delta(\Delta x)^2 \geq \beta > 0, \quad (0 < \beta < 1) \quad (5.3)$$

Fig. 2 A sample run of the true system state $u(t, x)$

Fig. 3 A sample run of the estimated process $\hat{u}(t, x)$

Fig. 4 Mean square error bound

そこで、差分幅 Δt および Δx を条件(5.3)を満たすように、 $\Delta t=0.001$, $\Delta x=0.05$ とし、各パラメータの値を、つぎのように設定した。

飽和値; $\phi_0(x)=0.7$

システム (Σ_1); $u_0(x)=\sin^2\pi x-(\sin^2\pi x-0.7)^+$
 $f(t, x)=250(1-0.1\sin 100\pi t)\sin^2\pi x$
 $-(1+0.2\sin 100\pi t)\{(\cos 2\pi x-1)^8$

$$+0.2(\cos 4\pi x-1)^{10}\}$$

観測機構 ((3.1)式; $G_0=[0.1, 0.2]$, $r(t)=0.4$

$$h(x)=5\exp-\{(x-0.15)/0.03\}^2$$

推定機構 ((4.1)式, (4.4)式); $\hat{u}_0(x)=0$,

$$P(0)(\cdot)=\int_0^1 p(0, x, \xi)(\cdot)d\xi,$$

$$p(0, x, \xi)=\{\sin^2\pi x-(\sin^2\pi x-0.7)^+\} \\ \times \{\sin^2\pi \xi-(\sin^2\pi \xi-0.7)^+\},$$

$$Q(t)(\cdot)=\int_0^1 q(t, x, \xi)(\cdot)d\xi,$$

$$q(t, x, \xi)=\sum_{i=1}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{2i-1}\sin(i\pi x)\sin(i\pi \xi)$$

Fig. 2 および Fig. 3 はそれぞれシステム Σ_1 の状態量 u およびその推定値 $\hat{u}$ の見本過程を示しており、両図において陰影部分は状態量および推定量が飽和値 ϕ_0 に達した領域を表わしている。本論文で導出した推定機構の特徴の一つは、推定誤差分散の上限が計算可能なことであるので、Fig. 4 に推定誤差分散の上限の時間的進化を示す。

6. 結 言

本論文は飽和状態をもつ確率分布定数系に対する状態推定問題を考察したものである。飽和状態を伴う拡散現象は変分不等式としてモデル化されるため、本論文で考察した推定問題に対して最小分散推定の意味で最適な推定機構を構成することは不可能であった。そこで本論文では、推定機構の動特性をあらかじめ仮定し、推定ゲインが推定誤差分散の上限を最小にするように決定するという手法を用いて推定機構を構成した。そのようにして構成された推定方程式に対して、時間および位置変数に関する有限差分法を用いて実行可能な推定アルゴリズムを確立し、シミュレーション実験によって推定アルゴリズムの有効性を検証した。

なお本研究の一部は、文部省科学研究費エネルギー特別研究 58040043 の援助によるものであることを記し、深甚の謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) A. Bensoussan and J.L. Lions: Application of Variational Inequalities in Stochastic Control, North-Holland Pub. Comp. New York (1982)
- 2) E. Pardoux: Stochastic Partial Differential Equations and Filtering of Diffusion Processes, Stochastics, **3**, 127/167 (1979)
- 3) L. Tartar: Sur l'etude directe d'equations non lineaires intervenant en theorie du controle optimal, J. Func. Anal. **6**, 1/47 (1974)
- 4) R. Glowinski, J.L. Lions and R. Tremolieres; Analyse Numerique des Inequations variationnelles, Dunod Paris (1976)