同期変動係数を有する線形時変系に対する MRACS の一設計

大 川 不二夫*

Design of the Discrete MRACS for a Linear Time Varying System
with Periodically Varying Coefficients

Fujio OHKAWA*

1. ま え が き

線形系に対するモデル規範形適応制御系 (MRACS) に関しては、種々の議論がなされており、基本的にはほぼ確立され体系づけられつつあるといえる¹⁾。しかしながら、未知パラメータが時間とともに変動する時変系に対しては、ほとんど研究されていない。

筆者は、新たな適応アルゴリズムを導入することにより、ある種の線形時変系に対する MRACS の設計法を提案した²⁾。従来用いられているものとは異なり、従来のものをその特殊な場合として包括しうる形式となっている、その適応アルゴリズムにより、未知プラント出力の規範応答への漸近収束性を保証することを明らかにした。しかし、そこで提案した MRACS では、時変パラメータが時間の多項式あるいは指数関数で表現され、時間の推移とともに定値に収束する時変系に対してのみ安定性が保証される。時変系一般に対する MRACS 設計法の開発は困難であり、現状では、個々の時変パターンに応じた設計法を、まず展開する必要がある。

ここでは、時変パラメータが正弦波状の周期変動をする時変系に対する MRACS の一設計法を提案する。提案する MRACS は、さきに提案した適応アルゴリズム²⁾に修正を加え、周期系に拡張したアルゴリズムより構成される。この新たな適応アルゴリズムも、従来の時不変系に対するアルゴリズムをその特殊な場合

として包括した形式となっており、出力誤差の原点への漸近収束性を保証することを示す。最後に、数値計算例により、提案した MRACS の有用性について考察する。

2. 適応アルゴリズム

ここで提案する MRACS は、つぎの定理に示した適応アルゴリズムに基づき設計され、その安定性（収束性）が保証される。

《定理》 出力誤差方程式が

$$e(k+1) = \Phi(k)W(k) \quad (2.1)$$

$$\Phi(k) \in R^{1 \times m} \quad W(k) \in R^m$$

で記述される MRACS では、適応アルゴリズム

$$\Phi(k+1) = \Phi(k)\Lambda + \Delta(k)\Lambda \quad (2.2)$$

$$\Delta(k) \triangleq -\rho(k) \frac{e(k+1)}{\mu(k)} W^T(k) \quad \Delta(k) \in R^{1 \times m}$$

$$0 < \rho(k) < 2 \quad (2.3)$$

$$\mu(k) \equiv W^T(k)W(k) \quad (2.4)$$

により、出力誤差 $e(k)$ の原点への漸近収束性が保証される。ただし、ここで、 Λ は

$$\Lambda \Lambda^T = I_m \quad \Lambda \in R^{m \times m}$$

を満足する直交行列である。

(証明) いま、Lyapunov 関数を

$$V(k) = \Phi(k)\Phi^T(k) \quad (2.5)$$

とすると、(2.2)～(2.4)式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= \Phi(k)\Lambda\Lambda^T\Phi^T(k) + 2\Phi(k)\Lambda\Lambda^T\Delta^T(k) \\ &\quad + \Delta(k)\Lambda\Lambda^T\Delta^T(k) - \Phi(k)\Phi^T(k) \\ &= 2\Phi(k)\Delta^T(k) + \Delta(k)\Delta^T(k) \\ &= -\rho(k)(2-\rho(k)) \frac{e^2(k+1)}{\mu(k)} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

したがって、 $\mu(k)$ が有界 ($W(k)$ 有界) であれば、

* 九州工業大学工学部 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu

(Received July 16, 1984)

(Revised October 25, 1984)

Key Words: adaptive control, discrete system, time-varying system

$k \rightarrow \infty$ において, $e(k) \rightarrow 0$ が保証される. (証明終)

定理に示した適応アルゴリズムにおいて, 直交行列 A を単位行列とすれば, 従来の線形時不変系に対する適応アルゴリズム¹⁾となる.

3. 時変系の MRACS

ここでは, 前章の定理に示した適応アルゴリズムに基づき, 周期的 (正弦波状) 変動係数を有する線形時変系に対する MRACS の設計を行う.

いま, 対象とする未知プラントは次式で表現される 1 入出力離散時間系とする.

$$y(k+1) = \sum_{j=1}^n (\tilde{\alpha}_j(k)y(k+1-j) + \tilde{\beta}_j(k)u(k+1-j)) \quad (3.1)$$

ここで, $\tilde{\alpha}_j(k)$ と $\tilde{\beta}_j(k)$ は時変の未知パラメータであり

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_j(k) &= a_{oj} + \alpha_j(k) \\ \tilde{\beta}_j(k) &= b_{oj} + \beta_j(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_j(k) &= a_j \sin(\omega_j k) \\ \beta_j(k) &= b_j \sin(\theta_j k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

$$\tilde{\beta}_1(k) \equiv 0$$

で表現される場合について論じる.

なお, 後の設計手順のために, ここで

$$\begin{aligned} \alpha'_j(k) &= a_j \cos(\omega_j k) \\ \beta'_j(k) &= b_j \cos(\theta_j k) \end{aligned}$$

を定義しておく.

ただし, 実現可能な適応アルゴリズムを誘導するために, ここでは, ω_j と θ_j は既知とする.

つぎに, 出力誤差を

$$e(k) = x(k) - y(k) \quad (3.3)$$

とする. ここで, $x(k)$ は規範応答である. したがって, 設計問題は, $e(k)$ が 0 に漸近収束するような入力 $u(k)$ を適応的に合成することである.

いま, $u(k)$ と $x(k)$ の関係が

$$x(k+1) = \sum_{j=1}^n ((f_{oj}(k) + f_j(k))y(k+1-j) + (g_{oj}(k) + g_j(k))u(k+1-j)) \quad (3.4)$$

を満足するように設定する. すなわち, $u(k)$ を

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{1}{g_{n1}(k) + g_1(k)} (x(k+1) - \sum_{j=1}^n (f_{oj}(k) \\ &\quad + f_j(k))y(k+1-j) \\ &\quad - \sum_{j=2}^n (g_{oj}(k) + g_j(k))u(k+1-j)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

で合成する. ここで, $f_{oj}(k)$, $f_j(k)$, $g_{oj}(k)$ と $g_j(k)$ はともに適応ゲインである.

(3.1) 式と (3.4) 式より出力誤差方程式として次式を

得る.

$$\begin{aligned} e(k+1) &= \sum_{j=1}^n ((f_{oj}(k) - a_{oj})y(k+1-j) \\ &\quad + (f_j(k) - \alpha_j(k))y(k+1-j) \\ &\quad + (g_{oj}(k) - b_{oj})u(k+1-j) \\ &\quad + (g_j(k) - \beta_j(k))u(k+1-j)) \\ &= \Phi(k)W(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Phi(k) \triangleq [\Phi_1(k) \dots \Phi_{6n}(k)] \quad \Phi(k) \in R^{1 \times 6n}$$

$$W(k) \triangleq [w_1(k) \dots w_{6n}(k)]^T \quad W(k) \in R^{6n}$$

$$\phi_j(k) = f_{oj}(k) - a_{oj}$$

$$\phi_{2j-1+n}(k) = f_j(k) - \alpha_j(k)$$

$$\phi_{2j+n}(k) = f'_j(k) - \alpha'_j(k)$$

$$\phi_{j+3n}(k) = g_{oj}(k) - b_{oj}$$

$$\phi_{2j-1+4n}(k) = g_j(k) - \beta_j(k)$$

$$\phi_{2j+4n}(k) = g'_j(k) - \beta'_j(k)$$

$$w_j(k) = w_{2j-1+n}(k) = y(k+1-j)$$

$$w_{j+3n}(k) = w_{2j-1+4n}(k) = u(k+1-j)$$

$$w_{2j+n}(k) = w_{2j+4n}(k) = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

ここで, $f'_j(k)$ と $g'_j(k)$ も $\alpha'_j(k)$ と $\beta'_j(k)$ に対応して, 導入された適応ゲインである.

(3.2) 式は (2.1) 式と同形であるので, 定理より, 適応アルゴリズム (2.2) ~ (2.4) 式でもって, $k \rightarrow \infty$ において, $e(k) \rightarrow 0$ が保証される.

一方, 正弦波関数に関しては次式の関係が成立する.

$$\begin{bmatrix} \sin(\omega(k+1)) \\ \cos(\omega(k+1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \omega k \\ \cos \omega k \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

いま, (2.2) 式で導入した行列 A を

$$A \triangleq \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ & A_1 & I_n \\ 0 & & A_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} A &\in R^{6n \times 6n} \\ A_1, A_2 &\in R^{2n \times 2n} \end{aligned}$$

$$A_1 \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & A_{1n} \end{bmatrix} \quad A_2 \triangleq \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & A_{2n} \end{bmatrix}$$

$$A_{1j} \triangleq \begin{bmatrix} \cos \omega_j & -\sin \omega_j \\ \sin \omega_j & \cos \omega_j \end{bmatrix} \quad A_{2j} \triangleq \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}$$

とする. A は明らかに直交行列である. このとき, 各適応ゲインのアルゴリズムは次式となる.

$$f_{oj}(k+1) = f_{oj}(k) + \xi(k)y(k+1-j)$$

$$\begin{aligned} f_i(k+1) &= (f_j(k) - \alpha_j(k))\cos \omega_j + \alpha_j(k+1) \\ &\quad + (f'_j(k) - \alpha'_j(k))\sin \omega_j \\ &\quad + \cos \omega_j \cdot \xi(k)y(k+1-j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_j(k+1) &= (f'_j(k) - \alpha'_j(k))\cos \omega_j + \alpha'_j(k+1) \\ &\quad - (f_j(k) - \alpha_j(k))\sin \omega_j \\ &\quad - \sin \omega_j \cdot \xi(k)y(k+1-j) \end{aligned}$$

$$g_{oj}(k+1) = g_{oj}(k) + \xi(k)u(k+1-j)$$

Fig. 1 Digital simulation result

$$\begin{aligned}
 g_j(k+1) &= (g_j(k) - \beta_j(k)) \cos \theta_j + \beta_j(k+1) \\
 &\quad + (g'_j(k) - \beta'_j(k)) \sin \theta_j \\
 &\quad + \cos \theta_j \cdot \xi(k) u(k+1-j) \\
 g'_j(k+1) &= (g'_j(k) - \beta'_j(k)) \cos \theta_j + \beta'_j(k+1) \\
 &\quad - (g_j(k) - \beta_j(k)) \sin \theta_j \\
 &\quad - \sin \theta_j \cdot \xi(k) u(k+1-j) \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\xi(k) \equiv -\rho(k) \frac{e(k+1)}{\mu(k)}$$

(3.8) 式の第 1 と第 4 式以外は未知パラメータ $\alpha_j(k)$ と $\beta_j(k)$ を含んでいるが, (3.7) 式より, それらは消却され, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 f_j(k+1) &= \cos \omega_j \cdot f_j(k) + \sin \omega_j \cdot f'_j(k) \\
 &\quad + \cos \omega_j \cdot \xi(k) y(k+1-j) \\
 f'_j(k+1) &= \cos \omega_j \cdot f'_j(k) - \sin \omega_j \cdot f_j(k) \\
 &\quad - \sin \omega_j \cdot \xi(k) y(k+1-j) \\
 g_j(k+1) &= \cos \theta_j \cdot g_j(k) + \sin \theta_j \cdot g'_j(k) \\
 &\quad + \cos \theta_j \cdot \xi(k) u(k+1-j) \\
 g'_j(k+1) &= \cos \theta_j \cdot g'_j(k) - \sin \theta_j \cdot g_j(k) \\
 &\quad - \sin \theta_j \cdot \xi(k) u(k+1-j) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

したがって, (3.9) 式により $e(k) \rightarrow 0$ が保証される. なお, $\mu(k)$ の有界性は, Goodwin らの手法⁴⁾に準拠した時不変系に対する方法³⁾とほぼ同一の手順により証明可能であるので, ここでは省略する.

また, (3.5) 式より $u(k)$ を合成するとき, 分母の非零性を保証する必要がある. このことは, 文献 5) で示したと同様の手順, すなわち, (2.3) 式の条件下に $\rho(k)$ を調整することにより保証可能であるので, ここでは省略する.

4. 数値計算例

ここでは, 提案した適応アルゴリズムを用いて数値計算した結果について考察する.

(3.1) 式の系において, n が 2 で

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_1(k) &= 0.8 + 0.3 \sin(0.2k) \\
 \tilde{\alpha}_2(k) &= -0.4 + 0.2 \sin(0.1k) \\
 \tilde{\beta}_1(k) &= 1 + 0.4 \sin(0.15k) \\
 \tilde{\beta}_2(k) &= -0.5 + 0.2 \sin(0.1k)
 \end{aligned}$$

の場合について, 規範応答を

$$x(k) = \begin{cases} 1 & 1 \leq k \leq 24 \\ 0.5 & 25 \leq k \end{cases}$$

とした結果が Fig. 1 である. ただし, $\rho(k)$ は 1 とし, 適応ゲインの初期値は

$$\begin{aligned}
 f_{01}(0) &= g_1(0) = 1 \\
 f_{11}(0) &= g(0) = -0.2
 \end{aligned}$$

とした. 良好な制御性能が得られ, 提案した MRACS の有効性が裏付けられている.

5. あとがき

未知プラントのパラメータが正弦波関数で表現される時変系に対する MRACS の設計法を提案し, 検討した結果, つぎのことが明らかとなった.

- i) 新たな適応アルゴリズムを導入したが, このアルゴリズムは, 従来の時不変系に対するものを, その特殊な場合として包括した形式となっている
- ii) 導入した適応アルゴリズムに基づき構成された MRACS は, 時不変系の場合と同様に, 一切の予測値を用いずに, 簡潔な形式で実現でき, 出力誤差の原点への収束性を保証する
- iii) 数値計算例からは, 提案した MRACS の有用性を裏付ける結果が得られた

なお, 設計過程より明らかなように, 時変パラメータが余弦関数の場合にも, 同一の手順により設計可能である. ここでは, 時変の周期を既知としたが, それらが未知の場合については今後検討を加えたい. さらに, 収束性の改善に対して提案されている種々のアルゴリズムの, 本手法への拡張, 適用についても検討を加えたい.

最後に, 日頃ご指導いただく広島大学工学部米沢洋, 九州大学工学部相良節夫両教授に深く感謝いたします.

参考文献

- 1) 小特集: 適応制御, 計測と制御, **23-5**, 415/502 (1984)
- 2) 大川: ある種の線形時変形に対するモデル規範形適応制御系の一設計, 計測自動制御学会論文集, **20-9**, 801/806 (1984)
- 3) 大川, 米沢: むだ時間を含む多変数離散値に対するモデル規範形適応制御系の一設計, 計測自動制御学会論文集, **18-4**, 357/362 (1982)
- 4) G. C. Goodwin, R. J. Ramadge and P. E. Caines: Discrete-time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-25-3**, 449/456 (1980)
- 5) 大川, 米沢: むだ時間を含む離散時間双線形系に対するモデル規範形適応制御系の一設計, 計測自動制御学会論文集, **19-10**, 794/799 (1983)