ブロックパルス関数を用いたモデルの低次元化手法[†]

汐月 哲夫*・川路 茂保*・田中 康仁*

A Method of Model Reduction via Block-Pulse Functions

Tetsuo SHIOTSUKI*, Shigeyasu KAWAJI* and Kohji TANAKA*

In this paper, we propose a method of model reduction for SISO continuous systems via block-pulse functions.

A set of block-pulse functions is well known as an orthonormal system. But it is not complete in L^2 -space. In this paper, we clarify that it has a property which corresponds to the completeness, when the space is restricted to bounded, piecewise-continuous functions. And it is pointed out that multiple-integration in functional space is reduced to simple algebraic operations on block-pulse expansion coefficients.

Based on these facts, a method of model reduction is proposed. In first step, block-pulse expansion of input is calculated. And in second step, that of output is calculated. In third step, the parameters of reduced model are calculated via least square algorithm.

The main characteristics of this method are (1) simplicity of algorithm, (2) time-domain approximation, and (3) applicability of any polynomial type input.

Key Words: model reduction, identification, time domain approximation, block-pulse function

1. はじめに

電力系統や各種工業プラントなどの大規模なシステムにおいて、低次元モデルを求めることはシステムの解析や制御系の設計において極めて重要であり、これまで多くの研究がなされている¹⁾。

線形システムモデルの低次元化には様々な方法が提案されているが、最も自然な考え方としてシステムの

応答誤差を最小にすべく低次元モデルのパラメータを決定する方法がある。この方法は、入出力応答に基づく連続系システムのパラメータ同定問題という性格をもつ。Obinata, Inooka²⁾ や Eitelberg³⁾ は、状態空間表現されたシステムの式誤差に基づくアルゴリズムを提案している。しかし、低次元モデルの状態の選択法の問題が残っている。また、壇上・相良⁴⁾ は、Åström のアルゴリズムを用いて、出力誤差に基づく方法を提案しているが、パラメータ最適化法に収束計算を用いるため計算量が多くなる欠点をもつ。

本論文では、最近直交関数列のひとつとして注目されているブロックパルス関数を用いると、最適化問題が簡単なアルゴリズムで精度よく求まることを利用して、1入出力連続系の式誤差に基づくモデルの低次元化アルゴリズムを示す。ブロックパルス関数とは方形波からなる直交関数列で、システムの解析⁵⁾、同定問題⁶⁾、最適制御⁷⁾、等への応用例が報告されている。その有用性は(1)直交関数列であること(2)積分演算が代数演算で近似できること、に基づいている。しかし、(1)においては完備性が問題となるが、一般の直交関数列の意味では完備性を示すことはできない(注1)。また(2)については、特に多重積分における解の収束性や近似誤差について詳しく論じた文献がない。

ここでは、2章で、関数空間を有界な区分連続関数に制限することにより、完備性に相当する性質が成り

(注1) 関数列 $\Phi_N = \{\phi_1^N(t), \phi_2^N(t), \dots, \phi_N^N(t)\}$ が関数空間 $\mathcal{F}$ で完備であるとは、一般に

(a) $e(N, t) = f(t) - \sum_{i=1}^N f^N \phi_i^N(t)$ とおいた時、任意の $f(t) \in \mathcal{F}$ に対して $e(\infty, t)$ が定義域のほとんどすべての点で0であること、

(b) $\Phi_N \subset \Phi_{N+1}$ であること、
の二つの条件が課される。Walsh 関数や Haar 関数は(a)(b)ともに満足するが、ブロックパルス関数は(b)を満足しない。その意味でここでは「完備でない」とする。文献8)は(b)の条件を除いて完備性を定義する立場をとっており、文献9), 10) は本論文と同じ立場をとっている。

[†] 第2回計測自動制御学会学術講演会九州支部大会で発表(昭58・12)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received May 10, 1984)

(Revised June 17, 1985)

立つことを示し(定理1),これに基づいて,多重積分の代数方程式表現と,その収束性について詳しく考察する.

3章ではモデルの低次元化アルゴリズムを3つのステップに分けて示す.特に低次元モデルのパラメータに線形な拘束条件がある場合のアルゴリズムを示す.

4章では,3章のアルゴリズムに従って数値例を用いて検討を行い,その有効性と問題点を示す.

本文の記号で, $\triangleq$ は定義式, N は1から N までの整数の集合, $'$ は転置を示す.

2. ブロックパルス関数

本章ではブロックパルス関数の定義を示し,有界区分連続な任意の関数がブロックパルス関数の線形結合で近似できることを示す.さらにこの性質に基づいて,関数空間の積分演算が簡単な代数演算で近似できることを示す.

2.1 ブロックパルス関数展開

$[0, T)$ 上で定義される区分連続で有界な関数の集合を $\mathcal{F}$ とする. $\mathcal{F}$ 上の内積とノルムをそれぞれ

$$\langle f(t), g(t) \rangle \triangleq \frac{N}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (1)$$

$$\|f(t)\| \triangleq \langle f(t), f(t) \rangle^{1/2} \quad (2)$$

で定義する. $\mathcal{F}$ の元であるブロックパルス関数は

$$\phi_k^N(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T \right), \quad k \in N \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (3)$$

$$\Phi_N'(t) = [\phi_1^N(t), \dots, \phi_N^N(t)]$$

で定義され,正規直交性

$$\langle \phi_i^N(t), \phi_j^N(t) \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in N \quad (4)$$

は(1)(2)から容易に確かめられる(Fig. 1).ただし δ_{ij} はクロネッカデルタで, N はブロックパルス関数の次数と呼ぶ.任意の関数 $f(t) \in \mathcal{F}$ は2乗平均誤差

$$J_N = \int_0^T \left(f(t) - \sum_{k=1}^N f_k^N \phi_k^N(t) \right)^2 dt \quad (5)$$

を最小にする意味でブロックパルス展開される.この

Fig. 1 Block pulse function ($N=8$)

とき $\{f_k^N\}$ はブロックパルス係数と呼ばれ,

$$f_k^N = \langle f(t), \phi_k^N(t) \rangle \quad (6)$$

$$= \frac{N}{T} \int_{(k-1/N)T}^{(k/N)T} f(\tau) d\tau \quad (7)$$

で求まる.また N 次元ベクトル

$$\mathbf{f}^N = [f_1^N, \dots, f_N^N]' \quad (8)$$

はブロックパルス係数ベクトル(以後係数ベクトルと略す)と呼ばれ,これを用いるとブロックパルス展開は $\Phi_N'(t)\mathbf{f}^N$ と書ける.また $J_N \geq 0$ であるから

$$\|f(t)\|^2 \geq \mathbf{f}^N' \mathbf{f}^N \quad (9)$$

あるいは

$$\|f(t)\|^2 = \mathbf{f}^N' \mathbf{f}^N + \frac{N}{T} J_N \quad (9')$$

が成り立つ.

直交関数展開の有効性はパーセバルの等式が成立することにあるが,ブロックパルス関数は(3)に示すように定義が N を含むため完備性は示すことができない(注1).しかし,完備性に対応するつぎの性質を示すことができる.

《定理1》

$f(t)$ が $[0, T)$ で有界かつ区分連続ならば

$$J_N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (10)$$

である.特に $f(t)$ が $[0, T)$ で連続ならば

$$N \cdot J_N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

である. □

(証明)

区間 $\sigma_k = [(k-1/N)T, (k/N)T)$ とおき, σ_k を要素とする集合 $C, \bar{C}$ を

$C = \{\sigma_k | f(t) \text{ は } \sigma_k \text{ で連続}\}$, $\bar{C}$ は C の補集合とする.(5)は

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{k \in N} \int_{\sigma_k} (f(t) - f_k^N)^2 dt \\ &= \sum_{\sigma_k \in C} \int_{\sigma_k} (f(t) - f_k^N)^2 dt \\ &\quad + \sum_{\sigma_k \in \bar{C}} \int_{\sigma_k} (f(t) - f_k^N)^2 dt \end{aligned}$$

と分離して書ける.右辺第1項は中間値の定理から,ある定数 K_1 が存在して

$$|f(t) - f_k^N| < K_1 \frac{1}{N}, \quad t \in \sigma_k \in C$$

が成り立つ.したがって

$$(\text{第1項}) < K_1^2 \frac{T}{N^2}$$

である.また右辺第2項は $f(t)$ の有界性から,ある定数 K_2 が存在して

$$|f(t) - f_k^N| < K_2, \quad t \in \sigma_k \in \bar{C}$$

が成り立つ。 p を $f(t)$ の不連続点の個数とすると

$$(\text{第2項}) < K_2^2 p \cdot \frac{T}{N}$$

である。従って

$$0 < J_N < K_1^2 \frac{T}{N^2} + K_2^2 p \cdot \frac{T}{N}$$

となる。不連続点はただか有限個だから、 N を限りなく大きくすると J_N は $1/N$ のオーダーで 0 に近づく。特に $p=0$ の場合には $1/N^2$ のオーダーで 0 に近づく。

Q. E. D.

この定理は十分に大きい N に対してはブロックパルス関数展開において

$$\frac{T}{N} \|f(t)\|^2 \doteq \frac{T}{N} \mathbf{f}^N \mathbf{f}^N \quad (11)$$

と見なしてよいことを示している。特に $f(t)$ が連続な範囲では

$$\|f(t)\|^2 \doteq \mathbf{f}^N \mathbf{f}^N \quad (12)$$

においてもよいことを示している。これはパーセバルの等式と同じ形式である。

あとの議論のためにつぎの記号を定義する。ブロックパルス関数の線形結合体を $\mathcal{S}$ とおき、その直交補空間を $\mathcal{K}$ とおく。すなわち

$$\mathcal{S} \triangleq \{s(t) | s(t) = \Phi_N'(t) \mathbf{s}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^N\}$$

$$\mathcal{K} \triangleq \{k(t) | \langle k(t), \phi_k^N(t) \rangle = 0, k(t) \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\}$$

である。さらに $\mathcal{F}$ から $\mathcal{K}$ に沿っての $\mathcal{S}$ への射影を Q とする。 $\mathcal{F}$ 上の恒等写像を I とおくと (11) は

$$\frac{T}{N} \|(I-Q)f(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (13)$$

と表わされる。また (12) は

$$\|(I-Q)f(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (14)$$

である。

2.3 積分演算

前節では区分連続な関数 $f(t)$ のブロックパルス展開を示した。つぎに $f(t)$ の不定積分について考察する。

いま $\mathcal{F}$ 上の写像 E をつぎのように定義する。

$$E: f(t) \mapsto g(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (15)$$

$\mathcal{S}$ 上の写像 E_s をつぎの合成写像

$$E_s \triangleq Q \circ (E|_{\mathcal{S}})$$

で定義すると、定理 1 からつぎの系が導かれる。ただし $E|_{\mathcal{S}}$ は写像 E の $\mathcal{S}$ への制限を示す。

<系 1> (積分)

$f(t) \in \mathcal{S}$ のとき

$$\|(E-E_s)f(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (16)$$

である。

□

(証明)

$$\begin{aligned} (E-E_s)f(t) &= Ef(t) - QE_s f(t) \\ &= (I-Q)Ef(t) \\ &= (I-Q)g(t) \end{aligned} \quad (17)$$

$g(t)$ は連続関数だから定理 1 から

$$\|(I-Q)g(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad \text{Q. E. D.}$$

(17) は $f(t) \in \mathcal{S}$ に対して $E_s f(t)$ が 2 乗平均誤差

$$J_E = \int_0^T \left(Ef(t) - \sum_{k=1}^N g_k^N \phi_k^N(t) \right)^2 dt$$

を最小にする写像であることを示している。その意味で $\mathcal{F}$ 上の積分演算は $\mathcal{S}$ 上に近似演算として誘導される。すなわち $f(t), g(t)$ の係数ベクトルを $\mathbf{f}^N, \mathbf{g}^N$ とかくと

$$E_s: \Phi_N'(t) \mathbf{f}^N \mapsto \Phi_N'(t) \mathbf{g}^N \quad (18)$$

である。このときの $\mathbf{f}^N$ と $\mathbf{g}^N$ の関係を調べる。(3), (15) から

$$E\phi_k^N(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \left[0, \frac{k-1}{N}T\right) \\ t - \frac{k-1}{N}T & , t \in \left[\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T\right) \\ \frac{T}{N} & , t \in \left[\frac{k}{N}T, T\right) \end{cases}$$

である。したがって (6), (7) から

$$Q(E\phi_k^N(t)) = \begin{cases} 0 & , t \in \left[0, \frac{k-1}{N}T\right) \\ \frac{T}{2N} & , t \in \left[\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T\right) \\ \frac{T}{N} & , t \in \left[\frac{k}{N}T, T\right) \end{cases} \quad (19)$$

となり、 $N \times 1$ ベクトル $\mathbf{p}_k^N$ を

$$\mathbf{p}_k^N \triangleq \frac{T}{2N} [0, \dots, 0, 1, 2, \dots, 2]'$$

$\downarrow \rightarrow k-1 \leftarrow$

とおくと、(16), (19) から

$$E_s \phi_k^N(t) = \Phi_N'(t) \mathbf{p}_k^N, \quad k \in \mathbb{N}$$

あるいは $N \times N$ 行列 $\mathbf{P}_N$ を

$$\mathbf{P}_N = [\mathbf{p}_1^N, \dots, \mathbf{p}_N^N] = \frac{T}{2N} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

において

$$E_s \Phi_N'(t) = \Phi_N'(t) \mathbf{P}_N$$

と表わされる。したがって

$$\begin{aligned} E_s(\Phi_N'(t) \mathbf{f}^N) &= (E_s \Phi_N'(t)) \mathbf{f}^N \\ &= \Phi_N'(t) \mathbf{P}_N \mathbf{f}^N \end{aligned}$$

となり、(18) と比較して

$$\mathbf{g}^N = \mathbf{P}_N \mathbf{f}^N \quad (21)$$

を得る (Fig. 2)。

Fig. 2 Explanation of equation (19)

(20), (21) は関数空間の積分演算が代数演算に帰着されるという意味で重要である。これにより動的連続システムを離散化せずに計算機で扱うことができる。

2.4 多重積分

前節では単積分について調べた。ここでは n 重積分について調べる。まずつぎの系を準備する。

〈系 2〉

$f(t) \in \mathcal{S}$ ならば

$$\|(E^n - E_i^n)f(t)\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

ここで $E^n = \underbrace{E \circ E \circ \dots \circ E}_n$, $E_i^n = \underbrace{E_i \circ E_i \circ \dots \circ E_i}_n$ である。

(証明)

$\mathcal{S}$ 上の写像 S_i を

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_i = QE^i | S - E_i^i \quad i=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= QE^{i+1} | S - E_i^{i+1} \\ &= QE(I-Q)E^i | S + QEQE^i | S - QE E_i^i \\ &= QE(QE^i | S - E_i^i) + QE(I-Q)E^i | S \\ &= QES_i + QE(I-Q)E^i | S \end{aligned}$$

とおける。これより $f(t) \in \mathcal{S}$ のときある定数 K が存在して

$$\begin{aligned} 0 \leq \|S_n f(t)\| &\leq \|QES_i f(t)\| + \|QE(I-Q)E^i | S f(t)\| \\ &\leq \dots \\ &\leq K \sum_{i=2}^{n-1} \|(I-Q)g_i(t)\| \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $g_i(t) = E^{i-1}f(t)$, $(i \geq 2)$ であり $[0, T)$ で連続である。したがって定理 1 から

$$\|S_n f(t)\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

である。

Q. E. D.

このように n 重積分は E_i の合成写像で得られる。これを前節の結果とあわせるとつぎの系を得る。

〈系 3〉

n 重積分

$$g(t) = \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(t)(dt)^n$$

はブロックパルス係数ベクトルを用いて

$$g^N = P_N^* f^N \quad (22)$$

と近似される。□

3. モデルの低次元化

前章ではブロックパルス展開を用いることにより積分演算を代数演算で近似できることを示した。本章ではこれらの結果を用いて、1 入出力系のモデルの低次元化アルゴリズムについて考察する。問題は、与えられたシステムに対して、多項式形の任意の入力に対する式誤差の 2 乗平均値を最小にする低次元モデルを求めることである。アルゴリズムは 3 つのステップに分けられ、おのこの簡単な代数演算として表わされる。

3.1 問題の記述

つぎの伝達関数で与えられる 1 入出力次のシステムを考える。

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (23)$$

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_n$$

但し $A(s), B(s)$ は共通因子をもたないものとする。これに対し m 次 ($m < n$) の伝達関数

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{\hat{A}(s)} \quad (24)$$

$$\hat{A}(s) = s^m + \hat{a}_1 s^{m-1} + \dots + \hat{a}_m$$

$$\hat{B}(s) = \hat{b}_1 s^{m-1} + \dots + \hat{b}_m$$

を考える。 $G(s), \hat{G}(s)$ に多項式形入力

$$u(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots + u_i t^i \quad (25)$$

を施した場合の式誤差

$$e(s) = \hat{A}(s)y(s) - \hat{B}(s)u(s) \quad (26)$$

の 2 乗平均誤差

$$J = \int_0^T e^2(t) dt \quad (27)$$

を最小にするパラメータ $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m\}$ を求める。

3.2 解法のアロリズム

Step 1: $(u(t))$ のブロックパルス展開

(25) は初期値を 0 とした積分を用いて

$$u(t) = \sum_{i=0}^L u_i t^i = \sum_{i=0}^L u_i (i!) \underbrace{\int \dots \int}_{i} (dt)^i \quad (28)$$

と表わされる。ゆえに系 3 から $u(t)$ の係数ベクトル u は

$$u^N = \sum_{i=0}^L (i!) u_i P_N^* e^N, \quad e^N = [1, \dots, 1]^T \quad (29)$$

で与えられる。

Step 2: (y^N の計算)

(23)の両辺に $A(s)u(s)$ をかけ, $s=(d/dt)$ において両辺を初期値 0 で n 回積分すると

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 \int^t y(\tau) d\tau + \dots + a_n \int^t \dots \int^t y(\tau) (d\tau)^n \\ = b_1 \int^t u(\tau) d\tau + \dots + b_n \int^t \dots \int^t u(\tau) (d\tau)^n \end{aligned} \quad (30)$$

となる。ここで $A(s), B(s)$ の反転多項式をそれぞれ

$$A^*(s) = s^n A(s^{-1}), \quad B^*(s) = s^n B(s^{-1})$$

とおくと (30) は系 3 から

$$A^*(P_N)y^N = B^*(P_N)u^N \quad (31)$$

となる。ただし y^N は $y(t)$ の係数ベクトルである。

Step 3: $\{\hat{a}_1, \dots, \hat{b}_m\}$ の計算

$\hat{A}(s), \hat{B}(s)$ の反転多項式をそれぞれ

$$\hat{A}^*(s) = s^m \hat{A}(s^{-1}), \quad \hat{B}^*(s) = s^m \hat{B}(s^{-1}) \quad (26)$$

とおくと (26) は

$$s^m e(s) = \hat{A}^*(s^{-1})y(s) - \hat{B}^*(s^{-1})u(s) \quad (32)$$

となる。ここで step 2 と同様に s^{-1} を P_N とおくと

(32) は $e(t)$ の係数ベクトルを e^N において

$$\begin{aligned} (P_N)^{-m} e^N &= \hat{A}^*(P_N)y^N - \hat{B}^*(P_N)u^N \\ &= y^N - X\hat{\theta} \end{aligned} \quad (33)$$

と表わされる。ただし $X, \hat{\theta}$ はそれぞれ

$$X = [-P_N y^N, -P_N^2 y^N, \dots, P_N u^N, \dots, P_N^m u^N] \quad (34)$$

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m]' \quad (35)$$

で定義される, $N \times 2m, 2m \times 1$ の行列である。システムは厳密にプロパーであるから $e(t)$ は連続関数である。したがって定理 1 から十分大きい N に対して

$$J = \frac{T}{N} e^{NT} e^N$$

とおける。ゆえに J を最小にする θ は重みつき最小 2 乗解

$$\hat{\theta} = (X^T W X)^{-1} X^T W y, \quad W = (P_N^T P_N)^m \quad (36)$$

で求まる。

(注意)

(31)式の可解性は $N \times N$ 行列 $A^*(P_N)$ の正則性によってきまるが, この行列は P_N の定義から対角成分に $A(2N/T)$ を N 個もつ上角行列であることがわかる。したがって $A^*(P_N)$ が正則であるための必要十分条件は伝達関数 (23) が極 $2N/T$ をもたないことである。 $(2N/T) > 0$ であるから, 一般に安定なシステムに対してはこの条件は満足されている。

3.3 未知パラメータに拘束がある場合

実際のモデルの低次元化においては

(1) 定常ゲインを指定する。

(2) $\hat{A}(s)$ を指定する。

(3) $\{\hat{b}_i\}$ のいくつかを零とする。

等パラメータに対する拘束条件が付加されることが多い。ここでは (35) 式の $\hat{\theta}$ に対して線形の拘束条件

$$H^T \hat{\theta} = \xi \quad (37)$$

が成立する場合を考える。但し H^T は $r \times 2m$ 行列で $\text{rank}(H) = r$ とする。この場合は前節の step 3 はつぎのように変更される。

Step 3.1:

H をつぎのように特異値分解する。

$$H^T = [U_H \Sigma_H : O] \begin{bmatrix} V_{H1}^T \\ V_{H2}^T \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ 2m-r \end{matrix} \quad (38)$$

但し $\Sigma_H = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ で $U_H \in R^{r \times r}$, $[V_{H1} : V_{H2}] \in R^{2m \times 2m}$ は直交行列である。

Step 3.2:

次式で $\zeta \in R^r$ を求める。

$$\zeta = V_{H1} \Sigma_H^{-1} U_H^T \xi \quad (39)$$

Step 3.3:

$$\bar{X} = X V_{H2} \quad (40)$$

$$\bar{y}^N = y^N - X \zeta \quad (41)$$

とおき

$$e^N = \bar{y}^N - \bar{X} \hat{\theta} \quad (42)$$

に対して J を最小にする $\hat{\theta}$ を求める。

Step 3.4:

$$\hat{\theta} = \zeta + V_{R2} \hat{\theta} \quad (43)$$

で $\hat{\theta}$ を求める。

4. 数 値 例

本手法の有効性を確かめるために, つぎの 7 次の 1 入出力系を考える。

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{375000s + 31250}{s^7 + 83.64s^6 + 4097s^5 + 70342s^4 + 853703s^3} \\ + 2814271s^2 + 3310875s + 281250 \end{aligned} \quad (44)$$

このシステムは Table 1 に示す極と零をもつ。 $N=20$, $T=10$ において (31) 式から得られるステップ応答波形を Fig. 3 に示す。階段状の波形が連続システムをよく近似していることがわかる。この応答波形に基づいて (36) を解いて得られた 2 次および 3 次の低次元

Table 1 Poles and zeros of original system

POLES
- 0.0919
- 7.674 ± j13.446
- 32.075 ± j38.849
- 2.024 ± j 0.964
ZEROS
- 0.0833

Fig. 3 Block-pulse expansion of $y(t)$: $N=20$, $T=10$, system is eq. (44)

[A]

[B]

Fig. 4 Step response of reduced models.
[a] second order reduced model (eq. (45))
[b] third order reduced model (eq. (46))

モデルをつぎに示す。

$$\hat{G}_2(s) = \frac{0.0212s + 0.2999}{s^2 + 2.213s + 2.545} \quad (45)$$

$$\hat{G}_3(s) = \frac{-0.0474s^2 + 0.5887s + 0.03592}{s^3 + 3.988s^2 + 5.107s + 0.3302} \quad (46)$$

これらのステップ応答波形をもとのシステム(44)と比

較したのが Fig. 4 である。この図からわかるように低次元モデルのステップ応答はもとのシステムをよく近似している。

5. ま と め

本論文では直交関数列のひとつであるブロックパルス関数の応用として、モデルの低次元化アルゴリズムを提案した。本手法の特徴は(1)簡単な計算で済むこと、(2)連続系のパラメータのみ用いること、(3)時間領域の近似であること、(4)多項式形の任意の入力に対して適用できることなどである。

今後の課題として、(1)ブロックパルス関数の次数 N の決定法を明らかにする(2)多変数系に拡張するなどが残されている。

最後に日頃御指導下さいます東京工業大学古田勝久教授に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 砂原善文他：自動制御ハンドブック・基礎編・2章、計測自動制御学会編 (1983)
- 2) G. Obinata and H. Inooka: A Method for Modeling Linear Time-Invariant Systems by Linear Systems of Low Order, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-21**, 602/603 (1976); see also ibid. **AC-22**, 286 (1977)
- 3) E. Eitelberg: Comments on Model Reduction by Minimizing the Equation Error, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-27-4**, 1000/1002 (1982)
- 4) 壇上, 相良, 草本: 種々の入力に対する低次元モデルの一構成法, 電気学会論文誌, **102-9-C**, 17/23 (1982)
- 5) P. Sannuti: Analysis and Synthesis of Dynamic Systems via Block-Pulse Functions, Proc. IEE, **126-6**, 569/571 (1977)
- 6) K.R. Palanisamy and Bhattacharya: System Identification via Block-Pulse Functions, International J. of System Sci., **12-5**, 643/647 (1981)
- 7) N.S. Hsu and B. Cheng: Analysis and Optimal Control of Time-Varying Linear Systems via Block-Pulse Functions, International J. of Control, **33-6**, 1107/1122 (1981)
- 8) C.P. Kwong and Chen: The Convergence Properties of Block-Pulse Series, International J. of System Sci., **12-6**, 745/751 (1981)
- 9) H.F. Harmuth: Applications of Walsh Functions in Communications, IEEE Spectrum, **82/91**, November (1969)
- 10) K.G. Beachamp: Walsh Functions and Their Applications, Academic Press (1975)

《付 録》(ウォルシュ関数との関係)

N が 2 つのべき乗で与えられる時 ($N=2^n$) には,

本手法は ν 次のウォルシュ関数列を用いた場合と等価である。その場合には(20)式は

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1 = \frac{T}{2} \\ \mathbf{P}_{\mu+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\mu & \frac{T}{2^{\mu+1}} \mathbf{I} \\ -\frac{T}{2^{\mu+1}} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \end{cases} \quad \mu=1, 2, \dots, (\nu-1)$$

(20. W)

で与えられる。また(29)式は

$$\mathbf{e} = [1, 0, \dots, 0]^T \quad (29 \cdot W)$$

で与えられる。その他の部分については変更なしに実行できる。

ウォルシュ関数は L^2 空間で完備しているので、第2章の議論が不要となるが、 N が2のべき乗に制限されるために一般的な議論ができなくなる。