連続時間適応同定器のロバスト性に関する考察[†]

田 中 幹 也*・鈴 木 隆*

Consideration on Robustness of Continuous-Time Adaptive Identifiers

Kanya TANAKA* and Takashi SUZUKI*

There are two typical schemes for constructing the continuous-time adaptive identifier based on the equation error principle. One, which is called Scheme I in this paper, employs $(n-1)$ -th order state variable filters for an n -th order plant model and the other, called Scheme II, uses n -th order filters. This paper discusses robustness properties of these schemes in the presence of parasitics and output noise. As a consequence, the following points are clarified: 1) Scheme II is more robust than Scheme I in the sense that the steady-state variation of the identification result is small. 2) Addition of the proportional term to the integral adaptive law is effective for improving robustness properties in the above both schemes. 3) It is profitable to adopt only the integral output as the identification result in place of the sum of the integral and proportional outputs when the integral plus proportional law is used. Furthermore, a new robust scheme with higher order state variable filters is also proposed here.

Key Words: adaptive identifier, equation error method, robustness, parasitics, output noise

1. ま え が き

入出力信号からプラントの未知パラメータを同定するための適応同定器は、適応制御系の構成に当って重要な役割を演ずる。このような適応同定器の構成法としては、従来、式誤差法、出力誤差法および入力誤差法などがよく知られている。中でも、式誤差法は、プラントに関する先見知識が少なくてもよい、構成が容易であるなどの理由から広く用いられている^{1),2)}。この式誤差法では、 n 次のプラントに対して $(n-1)$ 次の

状態変数フィルタを用いる方法（以下では、構成法Ⅰと呼ぶ）と、 n 次の状態変数フィルタを用いる方法（構成法Ⅱと呼ぶ）が代表的なものとなっており^{3),4)}、両構成法ともプラントの次数が既知で雑音の存在が無視できる場合には、極めて有効なものである。しかし、実在のプラントには、微小時定数をもつ寄生要素（parasitics）が存在しており、そのような場合には正確な次数を決定することは実際上は困難であり、我々は低次元近似されたプラントの次数を知り得るのみである。また、プラントの出力には観測誤差などによる雑音を伴っているのが普通である。このようなプラントに対して、従来の方法で適応同定器を構成した場合、構成に当って無視された寄生要素や雑音が、この適応同定器の特性にいかなる影響を及ぼすのかに関し、文献5)～7)などに適応観測器の一部として論じられてはいるが、構成法あるいは適応則の違いによって、ロバスト性にいかなる相違が現われるかについては、まだほとんど明らかにされていない。したがって、このような問題点を明らかにし、寄生要素および雑音の存在に対してよりロバストな適応同定器の構成法を検討しておくことは、ロバストな適応制御系の実現という立場からも極めて重要なことである。

本論文では、前述の二つの構成法を、寄生要素および雑音の左在に対するロバスト性という観点から比較・検討し、構成法Ⅱの方が優れていることを明らかにする。また、これらの構成法ではパラメータ適応則として、積分則あるいは積分＋比例則が通常用いられているが、積分則のみを単独で用いるよりも比例則を併用した方がよりロバストであることも明らかにされる。また、その際、従来ではパラメータ同定値として、積分則と比例則の出力の和を用いていたが、積分則の出力のみを採用する方が得策であることも示す。さらに、ロバスト性の改善を図るためにより高次の状態変数フィルタを用いる方法（構成法Ⅲと呼ぶ）についても考察する。これらの各構成法の寄生要素に対す

[†] 第27回自動制御連合講演会で発表（昭59・11）

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka
(Received January 21, 1985)
(Revised June 5, 1985)

るロバスト性は、計算機シミュレーションにより数値的に検討される。

2. 問題の設定

同定の対象となるプラントとして、次式で記述される一入力一出力の連続時間系を考える。

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{Q(s)}{P(s)} u(t) + v_o(t) \quad (1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}, \quad B(s) = \sum_{i=1}^n b_i s^{n-i} \\ P(s) &= 1 + \sum_{i=1}^l p_i (\mu s)^i, \quad Q(s) = 1 + \sum_{i=1}^l q_i (\mu s)^i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $u(t)$ 、 $y(t)$ はプラントの入力と出力、 $v_o(t)$ は出力に加わる有界（構成法Ⅰでは $v_o(t)$ も有界）な高周波性の雑音とし、 $B(s)/A(s)$ は寄生要素の存在を無視したプラントの伝達関数、 $Q(s)/P(s)$ は寄生要素の伝達関数である。このプラントに関し、以下の仮定を設ける。

- (i) 多項式 $A(s)$ と $B(s)$ は互いに既約。
- (ii) 次数 n は既知。
- (iii) 係数 a_i 、 b_i は未知の定数。
- (iv) 次数 l 、係数 p_i 、 q_i 、 μ は未知。ただし、 μ は微小。
- (v) 多項式 $P(s)$ は漸近安定。

なお、ここでは記号 s を微分演算子およびラプラス演算子として共用する。

本論文では、プラントが

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)} u(t) \quad (3)$$

なる形で表わされると見なし、パラメータ $a_i, b_i (i=1, 2, \dots, n)$ を同定するための適応同定器を従来の方法で構成した場合、この同定器が構成に当って無視した寄生要素や雑音に対してどの程度ロバストであるかを検討すると共に、ロバスト性を改善するための方策について考察する。

本論に入る前に(1)式のプラントの表現式をつぎのように変形しておく。

$$y(t) = \frac{B(s)}{A(s)} (u(t) + v_I(t)) + v_o(t) \quad (4)$$

ただし、

$$v_I(t) = \frac{Q(s) - P(s)}{P(s)} u(t) \quad (5)$$

(4)式は、寄生要素の影響を入力に加わる外乱として表わし得ることを意味している。(4)式は、(2)式と

漸近安定多項式

$$D(s) = s^n + \sum_{i=1}^n d_i s^{n-i} \quad (6)$$

を用いると、つぎのように表わすことができる。

$$D(s)y(t) = (D(s) - A(s))y(t) + B(s)u(t) + v(t) \quad (7)$$

ただし、

$$v(t) = B(s)v_I(t) + A(s)v_o(t) \quad (8)$$

3. 両構成法の比較

本節では、前述のプラントに対する構成法Ⅰおよび構成法Ⅱによる適応同定器の構成法について述べ、寄生要素および出力雑音に対する両構成法のロバスト性を比較すると共に、パラメータ同定結果の検討を行う。

3.1 構成法Ⅰの場合

まず、多項式 $D(s)$ を

$$D(s) = (1 + \lambda s)F(s), \quad \lambda > 0 \quad (9)$$

ただし、

$$F(s) = (1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i s^i) / \lambda f_{n-1} \quad (10)$$

のように選び、(7)式の両辺を多項式 $F(s)$ で割ると、次式が得られる。

$$(1 + \lambda s)y(t) = \theta^T \zeta_f(t) + z_f(t) \quad (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_f(t) &= [\zeta_{f1}(t), \dots, \zeta_{fn}(t), \zeta_{f(n+1)}(t), \dots, \zeta_{f2n}(t)]^T \\ \theta &= [\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}, \dots, \theta_{2n}]^T \\ \zeta_{fi}(t) &= s^{n-i} F^{-1}(s)y(t), \quad \theta_i = d_i - a_i; \quad i=1, 2, \dots, n \\ \zeta_{f(n+i)}(t) &= s^{n-i} F^{-1}(s)u(t), \quad \theta_{n+i} = b_i; \quad i=1, 2, \dots, n \\ z_f(t) &= B(s)F^{-1}(s)v_I(t) + A(s)F^{-1}(s)v_o(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで同定モデルを、(11)式に対応してつぎのように構成する。

$$(1 + \lambda s)\hat{y}(t) = \hat{\theta}^T(t) \zeta_f(t) \quad (13)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= [\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_n(t), \hat{\theta}_{n+1}(t), \dots, \hat{\theta}_{2n}(t)]^T \\ \hat{\theta}_i(t) &= d_i - \hat{a}_i(t), \quad \hat{\theta}_{n+i}(t) = \hat{b}_i(t); \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

このとき、同定誤差を

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (15)$$

と定義すれば、(11)、(13)式より次式が導かれる。

$$(1 + \lambda s)\varepsilon(t) = \varphi^T(t) \zeta_f(t) + z_f(t) \quad (16)$$

ただし、 $\varphi(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$

ここで、可変パラメータ $\hat{\theta}(t)$ を調整するためにつぎの適応則を用いることにする。

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}_I(t) + \hat{\theta}_P(t), \quad (\varphi(t) = \varphi_I(t) + \varphi_P(t)) \quad (17. a)$$

$$\hat{\theta}_I(t) = \Gamma \zeta_f(t) \varepsilon(t) (= -\dot{\varphi}_I(t)); \quad \Gamma > 0 \quad (17. b)$$

$$\hat{\theta}_P(t) = \Delta \zeta_f(t) \varepsilon(t) (= -\varphi_P(t)); \quad \Delta \geq 0 \quad (17. c)$$

ただし, $\varphi_I(t) = \theta - \hat{\theta}_I(t)$, $\varphi_P(t) = -\hat{\theta}_P(t)$

上の適応則は, $\Delta = 0$ の場合は積分則, $\Delta > 0$ の場合は積分+比例則を意味する. (17) 式の関係を用いると,

$$(1 + \lambda s + \zeta_f^T(t) \Delta \zeta_f(t)) \varepsilon(t) = \varphi_I^T(t) \zeta_f(t) + z_f(t) \quad (18)$$

したがって, (17. b), (18) 式よりつぎの誤差方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \lambda \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{\varphi}_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 + \zeta_f^T(t) \Delta \zeta_f(t)), & \zeta_f^T(t) \\ -\Gamma \zeta_f(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \varphi_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

上の誤差方程式に関しては, つぎの定理が成り立つ.

《定理1》 (19) 式において, 信号 $\zeta_f(t)$ が P.S. (persistently spanning) ならば, 有界な $z_f(t)$ に対して, $\varepsilon(t)$, $\varphi_I(t)$ の有界性が保証される.

(略証) (19) 式は線形系であり, $z_f(t) = 0$ とした自由系は, 信号 $\zeta_f(t)$ が P.S. ならば, 一様漸近安定となる^{8), 9)}. この結果, 有界な $z_f(t)$ に対して, $\varepsilon(t)$, $\varphi_I(t)$ の有界性が保証される. $\square$

この定理により $\varepsilon(t)$, $\varphi_I(t)$ の有界性がいえると, (17) 式の関係より $\varphi(t)$ の有界性も保証される. また, $\varepsilon(t)$ に関してはつぎの定理が成り立つ.

《定理2》 同定誤差 $\varepsilon(t)$ は, 定常状態において,

$$|\varepsilon(t)| \leq \sup_t \frac{|z_f(t)|}{1 + \zeta_f^T(t) \Delta \zeta_f(t)} \triangleq E_f \quad (20)$$

なる領域内に閉じ込められる.

(証明) まず, つぎのように正定関数 $V(t)$ を考える.

$$V(t) = \frac{1}{2} (\lambda \varepsilon^2(t) + \varphi_I^T(t) \Gamma^{-1} \varphi_I(t)) \quad (21)$$

上式の時間微分をとり, (19) 式の関係を用いると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -(1 + \zeta_f^T(t) \Delta \zeta_f(t)) \varepsilon^2(t) + z_f(t) \varepsilon(t) \\ &\leq -(1 + \zeta_f^T(t) \Delta \zeta_f(t)) |\varepsilon(t)|^2 + |z_f(t)| |\varepsilon(t)| \end{aligned} \quad (22)$$

上式の関係より, $|\varepsilon(t)|$ が (20) 式の領域外に存在していれば, $\dot{V}(t) < 0$ であるから $V(t)$ は減少する. この結果, $|\varepsilon(t)|$ も減少し, 結局定常状態では, (20) 式で表わされる領域内に閉じ込められることになる. $\square$

この定理において, (20) 式から明らかなようにパラメータ適応則として比例則を併用することにより, 同定誤差 $\varepsilon(t)$ の定常状態における変動範囲を小さくできることがわかる. この結果, (17. b) 式より $\varphi_I(t)$ の定常的な変動の大きさも比例項の付加により小さくできるものと推察できる.

3.2 構成法IIの場合

この場合には, (7) 式の両辺を (9) 式の関係を満たす多項式 $D(s)$ で割ると, つぎの関係が得られる.

$$y(t) = \theta^T \zeta_d(t) + z_d(t) \quad (23)$$

ただし,

$$\zeta_d(t) = (1 + \lambda s)^{-1} \zeta_f(t), \quad z_d(t) = (1 + \lambda s)^{-1} z_f(t) \quad (24)$$

(23) 式に対応して, 同定モデルを

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}^T(t) \zeta_d(t) \quad (25)$$

と構成すれば, (23), (25) 式より

$$\varepsilon(t) = \varphi^T(t) \zeta_d(t) + z_d(t) \quad (26)$$

ただし, $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, $\varphi(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$

この場合にも, パラメータ適応則としては, 前と同様, つぎの形のものを用いるものとする.

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \hat{\theta}_I(t) + \hat{\theta}_P(t), \quad (\varphi(t) = \varphi_I(t) + \varphi_P(t)) \quad (27. a)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_I(t) = \Gamma \zeta_d(t) \varepsilon(t) (= -\dot{\varphi}_I(t)); \quad \Gamma > 0 \quad (27. b)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_P(t) = \Delta \zeta_d(t) \varepsilon(t) (= -\dot{\varphi}_P(t)); \quad \Delta \geq 0 \quad (27. c)$$

ただし, $\varphi_I(t) = \theta - \hat{\theta}_I(t)$, $\varphi_P(t) = -\hat{\theta}_P(t)$

上の (27) 式を (26) 式に用いると, $\varepsilon(t)$ はつぎのように書き改められる.

$$\varepsilon(t) = \frac{\zeta_d^T(t) \varphi_I(t) + z_d(t)}{1 + \zeta_d^T(t) \Delta \zeta_d(t)} \quad (28)$$

この結果を (27. b) 式に用いると, つぎの誤差方程式が得られる.

$$\dot{\varphi}_I(t) = -\frac{\Gamma \zeta_d(t) \zeta_d^T(t)}{1 + \zeta_d^T(t) \Delta \zeta_d(t)} \varphi_I(t) - \frac{\Gamma \zeta_d(t) z_d(t)}{1 + \zeta_d^T(t) \Delta \zeta_d(t)} \quad (29)$$

上の誤差方程式に関しては, つぎの定理が成り立つ.

《定理3》 (29) 式において, 信号 $\zeta_d(t)$ が P.S. ならば, 有界な $z_d(t)$ に対して $\varphi_I(t)$ の有界性が保証される.

(略証) (29) 式は線形系であり, $z_d(t) = 0$ とした自由系は, 信号 $\zeta_d(t)$ が P.S. ならば, 一様漸近安定となる^{9), 10)}. したがって, 有界な $z_d(t)$ に対して $\varphi_I(t)$ の有界性が保証される. $\square$

この定理により $\varphi_I(t)$ の有界性が保証されると, (28) 式より $\varepsilon(t)$ の有界性がいえ, (27) 式より $\varphi(t)$ が有界であることもわかる. また, $\varepsilon(t)$ に関してはつぎの定理が成り立つ.

《定理4》 同定誤差 $\varepsilon(t)$ は定常状態において, 次式で表わされる領域内に閉じ込められる.

$$|\varepsilon(t)| \leq \sup_t \frac{|z_d(t)|}{1 + \zeta_d^T(t) \Delta \zeta_d(t)} \triangleq E_d \quad (30)$$

(証明) この場合には, つぎのような正定関数 $V(t)$ を考える.

$$V(t) = \frac{1}{2} \varphi_I^T(t) \Gamma^{-1} \varphi_I(t) \quad (31)$$

上式の時間微分をとり, (27. b), (28) 式の関係を用いると,

$$\dot{V}(t) = -(1 + \zeta_d^T(t) \Delta \zeta_d(t)) \varepsilon^2(t) + z_d(t) \varepsilon(t)$$

$$\leq -(1 + \zeta_d^2(t) A \zeta_d(t)) |\varepsilon(t)|^2 + z_d(t) |\varepsilon(t)| \quad (32)$$

上式の関係より、 $|\varepsilon(t)|$ が (30) 式の領域外に存在していれば、 $\dot{V}(t) < 0$ となり $V(t)$ は減少する。これは、 $\|\varphi_f(t)\|$ の減少を意味する。したがって、(28) 式より $|\varepsilon(t)|$ も減少し、結局のところ、定常状態では $|\varepsilon(t)|$ は (30) 式の領域内に閉じ込められることになる。□

この定理についても、(30) 式より比例則を併用することにより、同定誤差 $\varepsilon(t)$ の閉じ込められる領域の大きさ E_d を小さくできるので、(27. b) 式より $\varphi_f(t)$ の定常的な変動の大きさも小さくできるものと考えられる。

3.3 ロバスト性の比較

前述の二つの構成法の特性上の相違として挙げられる第1の点は、同定誤差 $\varepsilon(t)$ が定常状態において閉じ込められる領域の大きさ E_f と E_d の違いである。一般に、寄生要素を含んだプラントの同定に当っては、入力 $u(t)$ としてはプラントの dominant モードを効果的に刺激するような (dominantly rich な) 周波数成分を主体とした信号が用いられる⁵⁾。したがって、プラント出力 $y(t)$ に加わる雑音が微小ならば、このような入力と出力とから状態変数フィルタ $1/F(s)$ の内部状態として得られる $\zeta_f(t)$ もやはり同様の周波数成分が主体となる。一方、(24) 式より $\zeta_d(f)$ は $\zeta_f(t)$ をフィルタ $1/(1+\lambda s)$ に通した形になっており、このフィルタの時定数 λ が、実質的に dominantly rich な周波数成分のみを通過させるように、適切に選ばれているならば、 $\zeta_f(t)$ と $\zeta_d(t)$ の大きさはほぼ同程度と見なすことができる。したがって、(20)、(30) 式より明らかなように、 E_f と E_d の相違は主として $|z_f(t)|$ と $|z_d(t)|$ の違いに依存することになる。まず、寄生要素の影響は、入力 $u(t)$ が (5) 式、すなわち

$$v_i(t) = \frac{\sum_{i=1}^l (q_i - p_i)(\mu s)^i}{1 + \sum_{i=1}^l p_i(\mu s)^i} u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l (q_i - p_i)(\mu s)^{i-1}}{1 + \sum_{i=1}^l p_i(\mu s)^i} \mu \dot{u}(t) \quad (5)'$$

なる形で寄生要素を刺激するために、 $v_i(t)$ には $u(t)$ の高周波成分が強調された形で現われ、(12) 式より明らかなように、 $B(s)/F(s)$ が proper の場合には、その影響が $z_f(t)$ には直接的に含まれることになる。また、 $z_f(t)$ は、 $A(s)/F(s)$ が微分性 ($A(s)$ の次数は $F(s)$ の次数より 1 だけ大きい) となっているため、雑音 $v_o(t)$ の存在に対しては極めて敏感である。すなわち、 $z_f(t)$ が定常的に十分微小であるためには、 $v_o(t)$ が微小であると共に $v_o(t)$ も微小であることが必要となる。一方、

$z_d(t)$ は、(24) 式より、 $z_f(t)$ をフィルタ $1/(1+\lambda s)$ に通した形になっている。したがって、この場合には、 $v_i(t)$ に含まれる寄生要素に起因する高周波成分はフィルタ $1/(1+\lambda s)$ の高域遮断特性により除去されて、寄生要素の $z_d(t)$ への影響は軽減される。また、 $v_o(t)$ の $z_d(t)$ への影響は、(12)、(24) 式より、 $A(s)/[(1+\lambda s)F(s)]$ が proper となっているので、 $v_o(t)$ そのものが微小でありさえすれば、 $z_d(t)$ の定常的な変動範囲も微小となる。さらに、1 次フィルタ $1/(1+\lambda s)$ の特性から、 $|z_d(t)|$ の大きさは常に $|z_f(t)|$ より小さくなっている。したがって、 E_f よりも E_d の方が小となり、構成法 I よりも構成法 II の方が同定誤差 $\varepsilon(t)$ の定常的な変動範囲は小さくなることがわかる。

特性上の相違の第2点は、信号 $\zeta_f(t)$ 、 $\zeta_d(t)$ に対する寄生要素および雑音の影響の相違である。 $\zeta_f(t)$ 、 $\zeta_d(t)$ はプラントの入出力信号 $u(t)$ 、 $y(t)$ から作成されたものであるから、当然寄生要素や雑音の影響を含んでいる。しかし、(24) 式より明らかなように、 $\zeta_d(t)$ は $\zeta_f(t)$ をフィルタ $1/(1+\lambda s)$ に通した形になっている。したがって、 $\zeta_f(t)$ に含まれている寄生要素や雑音に起因する高周波成分は、 $\zeta_d(t)$ ではフィルタ $1/(1+\lambda s)$ により除去され、より軽減されたものとなっている。すなわち、構成法 I よりも構成法 II の方が内部信号に対する寄生要素および雑音の影響が小さくなっていると考えてよい。

上述の考察から、信号 $\zeta_f(t)$ 、 $\zeta_d(t)$ および同定誤差 $\varepsilon(t)$ を用いて調整されるパラメータ誤差 $\varphi(t)$ の定常的な変動範囲は、構成法 I よりも構成法 II の方が小さくなるものと推察される。すなわち、寄生要素および雑音の存在に対しては、構成法 II の方がよりロバストであると結論できる。

3.4 パラメータ同定値の検討

すでに述べたように、パラメータ適応則としては積分則のみを単独で用いるよりも比例則を併用した方が、寄生要素や雑音の存在に対するロバスト性を向上させることができる。この場合、従来では、パラメータ同定値としては、積分出力 $\hat{\theta}_i(t)$ と比例出力 $\hat{\theta}_p(t)$ の和 $\hat{\theta}(t)$ が用いられていた。しかし、信号 $\zeta_f(t)$ 、 $\zeta_d(t)$ および同定誤差 $\varepsilon(t)$ には寄生要素および雑音の影響が含まれており、これらを用いて作られる比例出力 $\hat{\theta}_p(t)$ には、寄生要素や雑音の影響が直接的に現われ、その結果、パラメータ同定値 $\hat{\theta}(t)$ にもこれらの影響がそのまま現われてくる。一方、積分出力 $\hat{\theta}_i(t)$ では、 $\varepsilon(t)$ と $\zeta_f(t)$ あるいは $\zeta_d(t)$ との積を積分したものが現われてくるので、これらに含まれている高周波成分は相当程度除去され、寄生要素や雑音の影響は軽減されてい

るものと考えられる。比例出力 $\hat{\theta}_P(t)$ は、寄生要素や雑音の影響が無視できる場合には、本来0に収束する量で、パラメータ同定値には結果的には何ら影響しない。したがって、適応同定器の可変パラメータとしてはあくまでも $\hat{\theta}(t) (= \hat{\theta}_I(t) + \hat{\theta}_P(t))$ を用いなければならないが、同定結果としては、 $\hat{\theta}(t)$ そのものよりも積分出力 $\hat{\theta}_I(t)$ のみを用いる方が、寄生要素および雑音に対するロバスト性という観点からは得策である。

4. ロバスト性の改善

前節で述べたように、寄生要素および雑音に起因する高周波成分は、状態変数フィルタのもつ高周波除去特性によりある程度除去され得る。その結果、より次数の高い状態変数フィルタを用いる構成法Ⅱの方が、構成法Ⅰよりもロバストであることが明らかになった。このことから、さらに高次の状態変数フィルタを導入することによりロバスト性を改善できるものと考えられる。また、可変パラメータ $\hat{\theta}(t)$ の調整は、(17)、(27)式より明かなように信号 $\zeta_r(t)$ 、 $\zeta_d(t)$ とともに同定誤差 $\varepsilon(t)$ をも用いて行なわれるので、この $\varepsilon(t)$ の中に含まれる寄生要素や雑音の影響もできるだけ除去することが良好な同定結果を得るためには望ましい。以下ではこのような観点からより高次の状態変数フィルタを導入した適応同定器の構成法（構成法Ⅲ）について述べる。

まず、つぎのような漸近安定多項式を導入する。

$$H(s) = (1 + \lambda s)^m; \lambda > 0 \quad (33)$$

ここに、次数 m およびパラメータ λ は設計者が任意に選ぶものとする。(23)式の両辺を多項式 $H(s)$ で割ると、次式が得られる。

$$y_h(t) = \theta^T \zeta_h(t) + z_h(t) \quad (34)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} y_h(t) &= H^{-1}(s)y(t), \quad \zeta_h(t) = H^{-1}(s)\zeta_d(t) \\ z_h(t) &= H^{-1}(s)z_d(t) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(34)式に対応して同定モデルはつぎのように構成する。

$$\hat{y}_h(t) = \hat{\theta}^T(t)\zeta_h(t) \quad (36)$$

ここで、同定誤差を

$$\varepsilon_h(t) = y_h(t) - \hat{y}_h(t) \quad (37)$$

と定義すれば、(34)、(36)式より

$$\varepsilon_h(t) = \varphi^T(t)\zeta_h(t) + z_h(t) \quad (38)$$

この場合のパラメータ適応則は、(27)式で $\zeta_d(t)$ 、 $\varepsilon(t)$ をそれぞれ $\zeta_h(t)$ 、 $\varepsilon_h(t)$ で置き換えたものを用いる。

なお、この場合にも $\varepsilon(t)$ 、 $z_d(t)$ および $\zeta_d(t)$ をそれぞれ $\varepsilon_h(t)$ 、 $z_h(t)$ および $\zeta_h(t)$ で置き換えれば、構成法Ⅱの場合と同様の定理が成り立つことは明らかである。

る。また、(35)式よりわかるように、 $\zeta_h(t)$ 、 $z_h(t)$ はそれぞれ $\zeta_d(t)$ 、 $z_d(t)$ をフィルタ $1/H(s)$ に通したものである。本構成法は構成法Ⅱよりもさらにロバスト性を改善できるものと考えられる。

5. シミュレーションによる検討

前述の各構成法の寄生要素に対するロバスト性を数値的に検討するため、計算機シミュレーションを行った。まず、同定の対象となるプラントとしては、つぎのようなものを考えた。

$$y(t) = \frac{b}{(1 + \mu s)(s + a)} u(t)$$

ここに、 μ は寄生要素の微小時定数を表わす。ここで、

$$G_0(s) = \frac{b}{s + a}$$

と見なせば、 $n=1$ であるから、(6)、(9)、(10)式より

$$D(s) = s + d, \quad d = 1/\lambda, \quad F(s) = 1/\lambda$$

また、(33)式より $H(s)$ は、 $m=1$ として、

$$H(s) = 1 + \lambda s$$

と選ぶものとする。シミュレーションに当っては、入力信号 $u(t)$ として、振幅 ± 1 、周期 2π の矩形波を用い、各パラメータの値としては、

$$a = 1.0, \quad b = 0.5, \quad \mu = 0.05, \quad \lambda = 1$$

と選び、パラメータ適応則のゲイン係数は、

$$\Gamma = 100 \mathbf{I}, \quad \Delta = 0 \quad \text{または} \quad 50 \mathbf{I}$$

とし、また、各パラメータ推定値の初期値はすべて0とした。

Fig. 1 Identification error
(a) Scheme I, (b) Scheme II.

Fig. 2 Parameter estimates by Scheme I
((a) $\Delta=0$, (b) and (c) $\Delta=50I$)

まず, Fig. 1(a), (b)は, それぞれ構成法 I と構成法 II の場合の同定誤差 $\varepsilon(t)$ を示したものである。図より両構成法とも, 積分則のみ ($\Delta=0$) を用いた場合よりも比例則 ($\Delta=50I$) を併用した場合の方が $\varepsilon(t)$ の定常的な変動範囲は小さくなっていることがわかる。また, 両構成法を比較してみると, 定常状態においては, 構成法 II の方が $\varepsilon(t)$ の変動は小さくなっていることも明らかである。つぎに, Fig. 2 は構成法 I の場合の各パラメータ推定値 (ただし, $\hat{a}(t)=d-\hat{\theta}_1(t)$, $\hat{b}(t)=\hat{\theta}_2(t)$) を示したものである。(a) は積分則のみ, (b) と (c) は積分+比例則を用いた場合で, さらに, (b) は積分出力 ($\hat{a}_I(t)$, $\hat{b}_I(t)$) と比例出力 ($\hat{a}_P(t)$, $\hat{b}_P(t)$) の和 ($\hat{a}(t)$, $\hat{b}(t)$) を, また, (c) は積分出力 ($\hat{a}_I(t)$, $\hat{b}_I(t)$) のみを示している。同様に, Fig. 3 は構成法 II の場合について各パラメータ推定値を示したものである。両構成法とも, (a) と (b) を比較すれば, 積分則のみよりも比例則を併用することにより, パラメータ推定値の変動が小さく抑えられていることがわかる。この場合, 構成法 I における積分則のみを用いた場合のパラメータ推定値の変動はかなり激しく, このままでは, ほとんど使用に耐えない。つぎに, (b) と (c) を比較すれば, 3.4 節で検討したように, パラメータ同定値として積分出力 ($\hat{a}_I(t)$, $\hat{b}_I(t)$) のみを採用する方が得策

Fig. 3 Parameter estimates by Scheme II
((a) $\Delta=0$, (b) and (c) $\Delta=50I$)

Fig. 4 Parameter estimates by Scheme III ($\Delta=50I$)

であることもわかる。さらに, 両構成法の (a) ~ (c) いずれの場合にも構成法 II の方が良好な結果が得られており, 構成法 I よりも構成法 II の方が, 寄生要素の存在に対してよりロバストであることがわかる。最後に, Fig. 4 は構成法 III で積分+比例則を用い, パラメータ同定値として積分出力のみを採用した場合の結果である。この図を Fig. 3(c) と比較してみれば, その変動はさらに小さく抑えられており, ロバスト性が改善されていることがわかる。

以上, 寄生要素が存在する場合のシミュレーション実験の結果を述べたが, 雑音が存在する場合についても同様の条件の下でシミュレーション実験を行った。この場合にも, 寄生要素の存在している場合とほぼ類

似の結果が得られているが、その結果については、頁数の関係もあり、ここでは省略させていただく。

6. あとがき

本論文では、連続時間適応同定器の代表的な2つの構成法のうち、プラントモデルと同数次の状態変数フィルタを用いる構成法Ⅱが、寄生要素および雑音に対してロバストであること、また、積分則に比例則を併用することによりロバスト性を向上し得ること、その際、パラメータ同定値として積分出力のみを採用した方が得策であることなどを明らかにした。ここで得られた結果は、このような適応同定器を組み込んだ適応制御系の寄生要素および雑音に対するロバスト性を検討する際に有用となるが、この問題については稿を改めて論じたい。

参考文献

- 1) I.D. Landau: A Survey of Model Reference Adaptive Techniques-Theory and Applications, *Automatica*, **10**-4, 353/380 (1974)
- 2) I.D. Landau: Adaptive Control-The Model Reference Approach, Marcel Dekker (1979)
- 3) B.D.O. Anderson: An Approach to Multivariable System Identification, *Automatica*, **13**-4, 401/408 (1977)
- 4) 田村捷利, 坂田伸弘, 岡村和典: 適応観測器の統一的手法, 計測自動制御学会論文集, **15**-2, 213/220 (1980)
- 5) P.A. Ioannou and P.V. Kokotovic: Adaptive Systems with Reduced Models, Springer-Verlag (1983)
- 6) Y. Kawasaki, S.L. Shah, Z. Iwai and D.G. Fisher: Robust Design of Adaptive Observers in the Presence of Parasitics, Proc. of IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, San Francisco (1983)
- 7) 岩井善太: 適応観測器における諸問題, システムと制御, **28**-6, 354/363 (1984)
- 8) A.P. Morgan and K.S. Narendra: On the Stability of Nonautonomous Differential Equations $\dot{x}=(A+B(t))x$, with Skew Symmetric Matrix $B(t)$, *SIAM J. Control and Optimization*, **15**-1, 163/176 (1977)
- 9) B.D.O. Anderson: Exponential Stability of Linear Equations Arising in Adaptive Identification, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC**-22, 83/88 (1977)
- 10) A.P. Morgan and K.S. Narendra: On the Uniform Asymptotic Stability of Certain Linear Nonautonomous Differential Equations, *SIAM J. Control and Optimization*, **15**-1, 5/24 (1977)