積分動作をもつ多変数制御系の過渡特性を 考慮したゲイン決定法

毛 利 彰*・鈴木 康 弘*

Determination of the Feedback Gains of Multi-Variable Control Systems
with Integral Action Considering Their Transient Characteristics

Akira MOHRI* and Yasuhiro SUZUKI*

In this paper, some considerations about improvement of transient characteristics of control systems with proportional and integral terms of output errors are described. Those are done as follows. That is, the control systems mentioned above are reduced to gain output feedback control systems by introduction of augmented systems. And reductions of overshoots or maximum/minimum peaks for changes of set points are considered from the viewpoint of eigenvalues assignment.

For a controllable and observable multi-input system with n states, m inputs and l outputs, if $n \leq m+l-1$, then almost arbitrary sets of closed-loop eigenvalues are assignable by using output feedback. Then, in general, some degrees of freedom remain in gain matrices after the eigenvalues have been assigned. Therefore, transient characteristics may be improved by making use of these degrees of freedom.

In this paper, this improvement method is described and its effectiveness is shown by the numerical example.

Key Words: linear multi-input system, PI-control, eigenvalue assignment, transient characteristics

1. ま え が き

本論文では、設定値変更に対する多入力多出力制御系の過渡応答、特にその行き過ぎ量や最大振れ幅に着目し、過渡特性の改善を旨としたゲインパラメータの決定問題について考察する。

追従制御系の設計問題に対しては、これをレギュレータ問題に帰着させることにより、固有値配置論や最適レギュレータ論に基づいて考察するということがよく行われ、数多くの報告がなされている。しかし、これらのほとんどのものが状態フィードバックによるレギュレータ問題として取扱われており、構成された制御系はプラントの状態変数のフィードバックを必要としている^{1)~3)}。また、出力のみのフィードバックによる制御系の構成に関する研究も報告されているが^{4), 5)}、これも含めて一般に追従制御系の設計の評価には2次形式積分のものがとられており、過渡特性の評価として重要と思われる行き過ぎ量や最大振れ幅を直接評価の対象としたものは殆ど見当たらない。そこで本論文では、出力偏差の比例、積分動作より構成される制御系に対して、これを出力フィードバック制御系に帰着させ、固有値配置論よりステップ状の設定値変更に対する応答の過渡特性、特に行き過ぎ量や最大振れ幅を直接評価の対象としたゲインの決定法について考察を行っている。

ところで、システムが出力フィードバックによって固有値配置可能な条件を満たしている場合には、一般に希望の固有値配置を与える出力フィードバックゲイン行列にはある自由度が残されている。そこで、この自由度を用いて行き過ぎ量や最大振れ幅を低減化することにより過渡特性の改善を行う。以下、その構成を示す。まず2章で問題の設定を行い、3章では拡大系を導入して問題を出力フィードバック問題へと変換する。ついで4章では出力フィードバック制御系の固有値配置問題を考え、5章で過渡応答特性の改善について検討し、6章の例題によってここでの考察の有効性を確かめている。

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received January 16, 1985)

(Revised August 13, 1985)

Fig. 1 Block diagram of control system

2. 問題の設定

次式で表わされる可制御、可観測な線形定係数系を考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

$$y = Cx. \quad (2)$$

ここで、 x は n 次元状態ベクトル、 u は r 次元入力ベクトル、 y は制御されるべき r 次元出力ベクトルで、 $r \leq n$ である。また、 A は $n \times n$ 、 B は $n \times r$ 、 C は $r \times n$ の定数行列で、つぎの条件を満たすものとする。ただし、 0 は零行列を示す。以下の行列の中の 0 も同様。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + r. \quad (3)$$

上式が成り立つ時、明らかに B 、 C はフルランクを持つ。また、上の系は以下で考える制御則によって安定化可能であるとする。

この時、つぎの制御則を指定する。

$$u = K_1 z + K_2 e, \quad (4)$$

$$\dot{z} = y - y_s \triangleq e, \quad z(0) = 0. \quad (5)$$

ここで、 y_s は設定値ベクトルであり、 e は出力の偏差ベクトル、 z はその積分である。したがって、(4)式の第1項、第2項はそれぞれ出力偏差の積分、比例動作であり、 K_1 、 K_2 は $r \times r$ の決定すべきフィードバックゲイン行列である。制御系のブロック線図を Fig. 1 に示す。

この時、はじめ定常状態にある系において、設定値ベクトル y_s (一定) がステップ状に変化した場合に、出力ベクトル y の過渡応答特性を良好にするゲイン K_1 、 K_2 を求める問題を考える。

3. 出力フィードバック問題への変換 (拡大系の導入)

はじめ定常状態にあった系において y_s がステップ状に変化した場合、 $t \rightarrow \infty$ での x および u の定常値をそれぞれ x_s 、 u_s とし、 $x_e = x - x_s$ 、 $u_e = u - u_s$ 、 $\bar{u} = \dot{u}_e = \dot{u}$ を新しい変数にとると、(1)式はつぎの拡大系で表わされる。

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u}, \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} -x_s \\ u(0) - u_s \end{bmatrix}. \quad (6)$$

ここで、

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_e \\ u_e \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix}. \quad (7)$$

ただし、 I_r は $r \times r$ 単位行列を示す。

一方、(4)式を t で微分して、 $\dot{x}_e = Ax_e + Bu_e$ 、 $e = Cx_e$ 、および(5)式を用いて整理するとつぎの関係が得られる。

$$\bar{u} = \bar{K} \bar{C} \bar{x}. \quad (8)$$

ここで、

$$\bar{K} = [K_1 \ K_2], \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ CA & CB \end{bmatrix}. \quad (9)$$

ところで、 x_s と u_s は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{12} \\ E_{22} \end{bmatrix} y_s. \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \quad (11)$$

と分割している。また $z(0) = 0$ 、 $x(0) = 0$ および(4)、(5)式より次式が得られる。

$$u(0) = -K_2 y_s. \quad (12)$$

したがって、 $\bar{x}(0)$ は(6)式より次の様に表わされる。

$$\bar{x}(0) = - \begin{bmatrix} E_{12} \\ E_{22} + K_2 \end{bmatrix} y_s. \quad (13)$$

以上のことから、Fig. 1 の制御系は、“初期値が(13)式で与えられる拡大系 $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ に対する出力フィードバック制御系”と考えることができる。ここで、拡大系 $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ は可制御、可観測であり、また定数行列 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ はフルランクを持つ(付録参照)。

4. 出力フィードバック制御系の固有値配置

ここでは前節において設定した拡大系に対する出力フィードバック制御問題について、固有値配置論から考察する。

いま(6)、(8)式より、閉ループ系は次式となる。

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{B} \bar{K} \bar{C}) \bar{x}. \quad (14)$$

以下、閉ループ系(14)式の固有値を配置する問題を考える。いま、配置しようとする閉ループ固有値を $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{n+r}$ とする。ただし、 $\bar{\lambda}_i$ は互いに異なる実数または共役複素数の組とし、行列 $\bar{A}$ の固有値と共通なものはないとする。ここで、出力フィードバックにより任意の固有値配置が可能であるための十分条件として、つぎの定理を用いる。

《定理》^{6),7)} システム $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ が可制御、可観測で、

$$(n+r) \leq (r) + (2r) - 1 \quad (15)$$

が満足されれば、任意の対称な $(n+r)$ 個の複素数の集合 $A = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{n+r}\}$ (注1)の任意の近傍に、出力フ

ィードバックで配置可能な複素数の集合が存在する。
ここでは(15)式の条件は満たされているとする。

つぎに、固有値配置の方法について述べる⁸⁾。いま $\bar{p}_i$ を r 次の複素ベクトルとし、

$$\bar{v}_i = (\bar{\lambda}_i I - \bar{A})^{-1} \bar{B} \bar{p}_i; i = 1, 2, \dots, n+r \quad (16)$$

とおく。ただし、 $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i^*$ ならば $\bar{p}_i = \bar{p}_i^*$ とする。 $*$ は複素共役を表す。また I は単位行列を表す。そして

$$\bar{P} = \bar{K} \bar{C} \bar{V} \quad (17)$$

を満たす実行列 $\bar{K}$ が存在するように $\bar{P}$ を選ぶ。ただし、 $\bar{P}$, $\bar{V}$ はそれぞれ $r \times (n+r)$, $(n+r) \times (n+r)$ の複素行列

$$\bar{P} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{n+r}], \quad (18)$$

$$\bar{V} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+r}] \quad (19)$$

である。この時、 $\bar{K}$ が設定した固有値を配置する出力フィードバックゲインとなる。また、 $\bar{v}_i$ は閉ループ系の固有値 $\bar{\lambda}_i$ に対応する固有ベクトルを表す。

いま、 $\bar{P}$ を適当に選んだ時、(17)式の $\bar{K}$ に対する近似解 $\bar{K}^0$ は次式で求められる。

$$\bar{K}^0 = \bar{P}(\bar{C}\bar{V})^T \{(\bar{C}\bar{V})(\bar{C}\bar{V})^T\}^{-1}. \quad (20)$$

ここで、 $\bar{K}^0$ は $r \times 2r$ の実行列となる。また、添字 T は行列およびベクトルの転置を表す。以下同様。もし、この $\bar{P}$ に対して(17)式を満たす実行列 $\bar{K}$ が存在すれば、 $\bar{K} = \bar{K}^0$ であり、 $\bar{P} = \bar{K}^0 \bar{C} \bar{V}$ よりつぎの関係が成り立つ。

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{C}\bar{V})^T \{(\bar{C}\bar{V})(\bar{C}\bar{V})^T\}^{-1}(\bar{C}\bar{V}). \quad (21)$$

したがって、(21)式を満足する $\bar{P}$ を選べば、固有値配置を達成する出力フィードバックゲインは、(20)式の $\bar{K}^0$ によって求まる。ただし、これらの計算が実行できるためには、 $\{(\bar{C}\bar{V})(\bar{C}\bar{V})^T\}^{-1}$ の存在、すなわち $(\bar{C}\bar{V})$ のフルランク性が保証されなければならない。いま $\bar{C}$ はフルランクを持つから $\bar{V}$ が正則となれば良いが、 $(\bar{A}, \bar{B})$ が可制御であれば、ほとんどすべての $\bar{P}$ の選択に対して $\bar{V}$ が正則となることが示されている^{6), 9)}。そこで以下では、(21)式を満足する $\bar{P}$ の中から、設定値変更に対する出力 y の過渡応答特性を良好にするものを選ぶことを考える。

5. 過渡応答特性の改善

5.1 出力 y の時間応答

まず、設定値 y_s (注2)に対する出力 y の時間応答を

(注1) $\lambda_i \in A$ が実数でない時、必ず $\lambda_i^* \in A$ ならば A を対称な集合と呼ぶ。

(注2) 本論文では、簡単のためはじめ $y(0) = 0$ の定常状態にあるものとしているので、設定値 y_s はそのまま設定値の変動量を意味する。それで以下設定値といえばこの意味に用いるものとする。

求める。いま、 $y_s = [0 \cdots 010 \cdots 0]^T$ の設定値に対する場合を添字 (l) を付けて表わすものとする、この設定値に対する $\bar{x}(t)$ の第 i 要素の応答は次式で表わされる。

$$\bar{x}_i^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{n+r} \bar{x}_i^{(l)}(t) \bar{x}_j^{(l)}(0). \quad (22)$$

ここで、 $\bar{x}_i^{(l)}(t)$ は $\bar{x}(0) = [0 \cdots 010 \cdots 0]^T$ の初期値ベクトルに対する $\bar{x}(t)$ の第 i 要素の応答を表す。ところで、 $\bar{x}(t)$ の初期値応答は次式で与えられる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{V} e^{St} \bar{V}^{-1} \bar{x}(0) = \left(\sum_{k=1}^{n+r} \bar{v}_k \bar{w}_k^T e^{\bar{\lambda}_k t} \right) \bar{x}(0) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+r} \bar{G}_k e^{\bar{\lambda}_k t} \right) \bar{x}(0). \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 $e^{St} = \text{diag. } [e^{\bar{\lambda}_1 t}, e^{\bar{\lambda}_2 t}, \dots, e^{\bar{\lambda}_{n+r} t}]$ 、また、 $\bar{v}_k$, $\bar{w}_k$ は $\bar{\lambda}_k$ に対する右および左固有ベクトルである。よって、

$$\bar{x}_i^{(l)}(t) = \sum_{k=1}^{n+r} \bar{G}_k(i, j) e^{\bar{\lambda}_k t} \quad (24)$$

となる。ただし、 $\bar{G}_k(i, j)$ は行列 $\bar{G}_k$ の i, j 要素を表す。以下同様とする。一方、 $\bar{x}_j^{(l)}(0)$ は(13)式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{x}_j^{(l)}(0) &= \begin{cases} -E_{12}(j, l) & ; j=1, \dots, n \\ -E_{22}(j-n, l) - K_2(j-n, l) & ; j=n+1, \dots, n+r. \end{cases} \\ & \quad (25) \end{aligned}$$

また、 $y(t) = Cx_c(t) + y_s$ 、および $\bar{x}_i(t) = x_{ei}(t)$; $i=1, \dots, n$ より

$$y_k^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^n C(k, i) \bar{x}_i^{(l)}(t) + \delta_{ki} \quad (26)$$

と表わされる。ここで、 δ_{ki} はクロネッカのデルタである。以上により、設定値 y_s に対する出力 $y(t)$ の応答が求まる。

5.2 応答の改善

いま、 $y_k^{(l)}(t)$ の応答における行き過ぎ量 ($k=l$ の場合)、および最大振幅 ($k \neq l$ の場合) を $e_k^{(l)\max}$ とする。ただし、 $k=l$ の場合においても、逆応答がある時には行き過ぎ量と逆応答量とを比較して、その絶対値の大きいものの方を $e_k^{(l)\max}$ に選ぶ。なお、 $e_k^{(l)\max}$ は $y_k^{(l)}(t)$ の応答から1次元探索によって求める(注3)。ここでは、この $e_k^{(l)\max}$ の2乗和

$$J = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r (e_k^{(l)\max})^2 \quad (27)$$

を考え、(21)式を満たすパラメータ行列 $\bar{P}$ のなかから、この J の値を小さくするものを選ぶことによ

(注3) 著者らはこの探索を効率良く行うことについても考察しているが、ここでは詳細は省略する。

Fig. 2 Transient responses for example considering only eigenvalues assignment

て、出力 $y(t)$ の過渡応答特性の改善を行う。この問題は、(21)式を等式制約条件、(27)式の J を目的関数、 $\bar{P}$ の各要素を変数とする制約付き非線形最適化問題と考えられる。ここでは、この数値計算としては、乗数法を用いて制約付き問題を制約なし問題の列に変換し、また制約なし問題には準ニュートン法を用いる¹¹⁾。

ところで、この数値計算の途中の段階では、一般にパラメータ行列 $\bar{P}$ は(21)式を満たしていない。したがって、 $y_k^{(p)}(t)$ の計算には、(20)式による近似解 $\bar{K}^0$ とこれに対応する実際の閉ループ固有値、固有ベクトルを用いるものとする(注4)。

6. 例題

制御対象のシステム行列が

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であるものを考える。このシステムは可制御、可観測であり、(3)式の条件を満たしている。またその固有

Fig. 3 Transient responses for example considering eigenvalues assignment and transient characteristics

値は $-3, -1, 1$ である。この時、拡大系 $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ は(7)、(9)式より構成され、(15)式の条件を満たす。いま、配置しようとする拡大閉ループ系の固有値を $-6.55, -3.55, -1.65 \pm 0.2i, -0.85$ と定めた場合、フィードバックゲインは、固有値配置のみを行った場合を $\bar{K}_A$ 、本方法により過渡特性を考慮した場合を $\bar{K}_B$ としてつぎのように求められる。

$$\bar{K}_A = \begin{bmatrix} -20.91 & -9.116 & -14.24 & -6.194 \\ 14.43 & 5.637 & 8.633 & 2.988 \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_B = \begin{bmatrix} -34.36 & -8.379 & -10.68 & 0.9373 \\ 11.35 & 2.369 & 3.937 & -0.5742 \end{bmatrix}.$$

また、それぞれの場合に対する応答を Fig. 2, Fig. 3 に示す。これらの図において、それぞれ(a)は $y_s = [1 \ 0]^T$ に対する応答を(b)は $y_s = [0 \ 1]^T$ に対する応答を示す。また、 $e_k^{(l)\max}$ の値は、(i) Fig. 2(a), (ii) Fig. 2(b), (iii) Fig. 3(a), (iv) Fig. 3(b) に対して、それぞれ (i) $e_1^{(1)\max} = 0.3675, e_2^{(1)\max} = -0.6033$, (ii) $e_1^{(2)\max} = 0.5049, e_2^{(2)\max} = -0.1343$, (iii) $e_1^{(1)\max} = 0.2280, e_2^{(1)\max} = -0.2783$, (iv) $e_1^{(2)\max} = 0.2180, e_2^{(2)\max} = 0.0001$ である。これらの図および $e_k^{(l)\max}$ の値から、過渡特性を考慮した場合は単に固有値のみを配置する場合に比べて、行き過ぎ量や最大振れ幅が低減化されていることがわかる。

(注4) ここで求めた固有値の中に、もし実数部が正のものが含まれている場合には、系は不安定となるので J の値としては(27)式を計算するのではなく、ある大きな数値を直接用いれば良い。

7. あとがき

本論文では、出力偏差の比例、積分動作より構成される線形多入力制御系に対して、希望の固有値配置を行い、さらにステップ状の設定値変更に対する応答の過渡特性、特に行き過ぎ量や最大振れ幅の改善を考慮したゲインの決定法について述べた。そして、例題によってその有効性を示した。

参 考 文 献

- 1) 足田：過渡応答特性を考慮した多変数線形追従システムの設計，計測自動制御学会論文集，**13**-3，243/248 (1977)
- 2) 朴，鈴木，藤井：積分形コントローラをもつ多変数線形最適追従系の設計，計測自動制御学会論文集，**10**-1，1/5 (1974)
- 3) 武田，北森：線形多入出力最適追従制御系の一設計法，計測自動制御学会論文集，**14**-4，359/364 (1978)
- 4) 深田，毛利，高田：2次形式評価を用いた多変数PI制御系のフィードバックゲインの決定法，計測自動制御学会論文集，**15**-6，739/745 (1979)
- 5) 深田，毛利，高田：積分動作をもつ多変数制御系のフィードバックゲインの決定法，計測自動制御学会論文集，**16**-4，511/516 (1980)
- 6) H. Kimura: Pole Assignment by Gain Output Feedback, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC**-20-4, 509/516 (1975)
- 7) 木村：多変数制御系の理論と応用-IV，システムと制御，**22**-8，485/494 (1978)
- 8) A. Sambandan and P. C. Chandrasekharen: Eigenvector Assignment Using Output Feedback, International J. of Control, **34**-6, 1143/1152 (1981)
- 9) 木村：多変数系と極配置，システムと制御，**27**-5，313/319 (1983)
- 10) 毛利，猪城，高田：多入力制御系の過渡特性を考慮したフィードバックゲインの決定法，計測自動制御学会論文集，**18**-11，1117/1122 (1982)
- 11) 今野，山下：非線形計画法，196，日科技連 (1978)

《付 録》

i) $(\bar{A}, \bar{B})$ の可制御性：可制御行列 $\bar{M}_c$ はつぎのようになる。

$$\bar{M}_c = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \cdots \bar{A}^{n+r-1}\bar{B}] \\ = \begin{bmatrix} 0 & B & \cdots & A^{n+r-2}B \\ I_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

ここで、 (A, B) が可制御であることを考慮すると

$$\text{rank } \bar{M}_c = n + r. \quad (\text{A.2})$$

よって $(\bar{A}, \bar{B})$ は可制御である。

ii) $(\bar{C}, \bar{A})$ の可観測性：ここではまず $\bar{C} = [C \ 0]$ として可観測性を検討する。この時可観測行列 $\bar{M}_o$ はつぎのようになる。

$$\bar{M}_o = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \\ \vdots & \vdots \\ 0 & CA^{n+r-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

ここで、 (C, A) が可観測、および(3)式を考慮すると

$$\text{rank } \bar{M}_o = n + r. \quad (\text{A.4})$$

よって可観測性は(3)式が成り立つ時保存される。実際には $\bar{C}$ は(9)式によって与えられるが、これは上の証明で用いた $\bar{C}$ を含むので、当然(9)式による $\bar{C}$ の場合にも同様のことが言える。

iii) $\bar{B}$ のフルランク性：(7)式より、つぎのように明らかに $\bar{B}$ はフルランクを持つ。

$$\text{rank } \bar{B} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix} = r. \quad (\text{A.5})$$

iv) $\bar{C}$ のフルランク性：(9)式より

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ CA & CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ A & B \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

したがって、(3)式および C がフルランクを持つことより、 $\bar{C}$ はフルランクを持つ。