異方性を示す粘弾性システムの過渡解析とその同定[†]

小林 康 秀*, 沖 田 豪*, 田 中 正 吾*, 岡 本 孝 之*

Transient Analysis of Anisotropic Viscoelastic System and Its Identification

Yasuhide KOBAYASHI*, Tsuyoshi OKITA*, Shogo TANAKA* and Takayuki OKAMOTO*

Most of work on the identification theory for viscoelastic systems and its application have been restricted to the isotropic systems. These models are not enough to express all the actual viscoelastic systems because improvements in material properties and more effective engineering capabilities in utilizing anisotropic behavior have made an increase of anisotropy in viscoelastic systems.

In this paper we propose the identification method of three-dimensional hyperbolic distributed parameter systems with anisotropic viscoelasticity. First of all, we derive the Green function of systems whose boundary conditions are given as one free surface and another fixed surfaces. In this Green function, the eigenvalues corresponding to the free surface are expressed in so complex a manner that we approximate them explicitly for the identification of the system.

The validity of the proposed method has been confirmed by digital simulation and we applied this method to the actual anisotropic viscoelastic system to estimate the system parameters. The results of the estimates from the actual physical system have shown that the proposed method is useful.

Key Words: system identification, hyperbolic distributed parameter system, anisotropic viscoelastic system, transient analysis

1. ま え が き

双曲形分布定数系の解析は、振動現象および波動現象等を取り扱う上で重要な役割りを果している。この

ような双曲形分布定数系の可制御性、可観測性、安定性に関しては、D. L. Russell¹⁾, N. Weck²⁾らにより考察されている。また、その同定は、単純にモデル化したシステムについて、有限要素法、Galerkin法等^{3), 4)}, を用いて検討されている。

先に筆者らは、等方等質の仮定のもとに、三次元双曲形分布定数系の過渡解析を行い、それに基づくシステム同定法を提案し、実際の三次元粘弾性システムへ適用した⁵⁾。しかし、現実のシステムは、生成時あるいは工作時の条件により結晶構造に方向性をもち、力学的性質に異方性を示すものが多い^{6), 7)}。このような異方性には数多くの種類があるが、ここでは比較的簡単でよく見受けられる横等方性システムについて考察する。横等方性を示す物質は、一方向の粘弾性定数のみが異なり、ロール圧延された粘弾性材料、亜鉛、緑柱石などは、この性質をもつ⁶⁾。従来、横等方二次元粘弾性システムの周波数解析はなされているが、その同定については言及されていない⁸⁾。しかも、周波数解析の結果を逆フーリエ変換により過渡応答を得ることは、一般に困難である。

そこで本論文では、横等方性三次元双曲形分布定数系の過渡解析を行ない、その同定法を考える。まず、実験に適合した境界条件を設定した上で、過渡解析によりグリーン関数を導出する。自由境界面をもつ異方性システムの固有値は、システムパラメータを含んだ複雑な関係式により与えられる。システムの過渡応答を具体的に得るには、これらの関係式を解き、固有値を求める必要がある。さらに、システム同定を行うには、未知パラメータを含むこれらの関係式から固有値を求めなければならない。しかし、固有値を解析的に陽表示することは困難であるため、システムパラメータを用いて固有値を近似陽表示し、システム同定を試みる。この近似の妥当性を検証した後、本方法を実システムへ適用し、システムパラメータを推定する。

[†] 第22回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭58・7)

* 山口大学工学部 宇部市常盤台 2557

* Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube

(Received November 1, 1984)

(Revised August 10, 1985)

2. システムのモデリング

微要素の応力，ひずみ，変位は，平衡条件，運動関係式および構成方程式により関係づけられる．この内，平衡条件，運動関係式は，物質の種類とは関係なく同一である．構成方程式は，応力-ひずみ関係を与え，ひずみが小さい範囲ではこれらは線形と考えられる．一般に，線形一次元粘弾性システムの応力 τ ，ひずみ ε の関係は，次式で与えられる⁹⁾．

$$\sum_{k'=0}^m p_{k'} \frac{d^{k'} \tau}{dt^{k'}} = \sum_{k''=0}^n q_{k''} \frac{d^{k''} \varepsilon}{dt^{k''}} \quad (1)$$

ただし， $p_{k'}$ ， $q_{k''}$ はシステムの性質を表わす定数である．

ここでは，固体的性質の強い工学的粘弾性システムへの適用を目指し，比較的簡単な Voigt モデル ($m=0$ ， $n=1$) を用いよう⁹⁾．さらに，(1)式に重ね合わせの原理を用いれば， x 軸方向のみに異方性を示す横等方粘弾性構成方程式として次式を得る¹⁰⁾．

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 & c_0 & c_0 \\ c_0 & c_0 + c_2 & c_0 + c_3 \\ c_0 & c_0 + c_3 & c_0 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{軸方向}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{せん断方向} \quad (2)$$

ただし，上式に含まれる作用素は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} c_0 &= \lambda_x + \nu_x D_t \\ c_0 + c_1 &= (\lambda_x + 2\mu_x) + (\nu_x + 2\zeta_x) D_t \\ c_0 + c_2 &= (\lambda + 2\mu) + (\nu + 2\zeta) D_t \\ c_0 + c_3 &= \lambda + \nu D_t \\ b_1 &= \mu_{xy} + \zeta_{xy} D_t \\ b_2 &= (c_2 - c_3)/2 = \mu + \zeta D_t \end{aligned} \quad (3)$$

ここで， $D(\cdot) \triangleq \partial/\partial(\cdot)$ であり， λ_x ， ν_x は x 軸方向のそれぞれ弾性定数，粘性定数， λ ， ν は y および z 軸方向のそれぞれ弾性定数，粘性定数， μ_{xy} ， μ はせん断弾性定数， ζ_{xy} ， ζ はせん断粘性定数である．

これまでに，軸方向およびせん断方向について，緩和弾性率を共に求めた例はきわめて少なく¹¹⁾，粘性が比較的小さいシステムでは，ポアソン比は定数としている場合が多い．ここでも，異方性を示す軸方向も含め，軸方向，せん断方向は同じ粘弾性比をもつとする^{12), 13)}．

$$\frac{\nu_x}{\lambda_x} = \frac{\zeta_x}{\mu_x} = \frac{\nu}{\mu_{xy}} = \frac{\zeta}{\mu} = \frac{1}{k} \quad (4)$$

(3)式の粘弾性定数は，ポアソン比 σ_{xy} ， σ_{yx} ， σ_{yz} を用いてつぎのように表わすことができる．

$$\begin{aligned} \lambda_x &= k\nu_x = \sigma_{xy} E / (1 - 2\sigma_{xy}\sigma_{yx} - \sigma_{yz}) \\ \mu_x &= k\zeta_x = \sigma_{xy} (1 - \sigma_{yx} - \sigma_{yz}) \end{aligned}$$

Fig. 1 Boundary condition of system

$$\begin{aligned} & \times E / \{2\sigma_{yz}(1 - 2\sigma_{xy}\sigma_{yx} - \sigma_{yz})\} \\ \lambda &= k\nu = (\sigma_{yz} + \sigma_{xy}\sigma_{yx}) \\ & E / \{(1 + \sigma_{yz})(1 - 2\sigma_{xy}\sigma_{yx} - \sigma_{yz})\} \\ \mu &= k\zeta = E / \{2(1 + \sigma_{yz})\} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし， E は純弾性体における Young 率に対応する．また，一般的な横等方性システムでは，粘弾性比を含め6つのパラメータが存在する．しかし，力学的に矛盾を生じない付加的な関係式がいくつか提案されており，ここではつぎの関係があるものとしよう⁷⁾．

$$\frac{b_2}{b_1} = \sigma_{yz} + \frac{1 - \sigma_{yz}}{2} + \frac{\sigma_{yz}(1 - \sigma_{xy}\sigma_{yx})}{2\sigma_{xy}(1 + \sigma_{yz})} \quad (6)$$

対象とするシステムの密度を ρ に， x ， y ，および z 軸方向の変位をそれぞれ u ， v ， w としよう．(1)，(2)式と平衡条件，運動関係式より，横等方性三次元粘弾性システムは，つぎの双曲形偏微分方程式で表わされる．

$$\begin{bmatrix} \rho D_t^2 - (c_0 + c_1) D_x^2 - b_1 D_y^2 - b_1 D_z^2 \\ -(c_0 + b_1) D_x D_y \\ -(c_0 + b_1) D_x D_z \\ -(c_0 + b_1) D_y D_z \\ \rho D_t^2 - b_1 D_x^2 - (c_0 + c_2) D_y^2 - b_2 D_z^2 \\ -(c_0 + c_3 + b_2) D_y D_z \\ -(c_0 + b_1) D_x D_z \\ -(c_0 + c_3 + b_2) D_y D_z \\ \rho D_t^2 - b_1 D_x^2 - b_2 D_y^2 - (c_0 + c_2) D_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$0 < t, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < z < l_3 \quad (7)$$

つぎに，境界条件について考察しよう．Fig. 1に示すような直方体において，上表面は自由境界面とし，その1点 $(x_0, y_0, 0)$ にインパルス状の加振入力を加える．また，他の側面および底面は支持物等を想定し固定端とする．境界条件を定式化すると，自由境界面では軸応力およびせん断応力が零である．

$$\begin{aligned} \tau_{zx}|_{z=0} &= 0 \\ \tau_{xy}|_{z=0} &= 0 \\ \tau_{xx}|_{z=0} &= f_0 \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし， f_0 は入力の大きさを表わす定数で， $\delta(t)$ は単位インパルスである．固定端では，変位が零である．

また、インパルス応答を導出するため、初期条件は零とする。

3. システムの過渡解析

3.1 グリーン関数の導出

(7)式で与えられる横等方粘弾性システムの運動方程式より、一般解を求め、設定した境界条件、初期条件のもとでグリーン関数を導出しよう。(7)式からわかるように、変位 u , v , w が恒等的に零でないためには、(7)式の作用素行列の行列式が零でなければならない。このことおよび(3), (6)式を考慮すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{\rho D_t^2 - b_1(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\} \\ & \{\rho D_t^2 - b_1 D_x^2 - b_2(D_y^2 + D_z^2)\} \\ & \times \{\rho D_t^2 - (c_0 + c_1)D_x^2 - (c_0 + c_2)(D_y^2 + D_z^2)\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

上式は、 x , y , z 軸方向の変位 u , v , w について同様であるから、まず x 軸方向の変位 u について考えよう。(9)式の各因数に対する解を $u_i (i=1, 2, 3)$ とすれば、変数分離法により、(9)式の解はそれぞれ x , y , z , t の関数 X_i , Y_i , Z_i , T_i を用いつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} D_x^2 X_i + \xi_i^2 X_i &= 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 \\ D_y^2 Y_i + \eta_i^2 Y_i &= 0, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad i=1, 2, 3 \\ D_z^2 Z_i + \phi_i^2 Z_i &= 0, \quad 0 \leq z \leq l_3 \\ \rho D_t^2 T_1 + b_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \phi_1^2) T_1 &= 0 \\ \rho D_t^2 T_2 + \{b_2 \xi_2^2 + b_2(\eta_2^2 + \phi_2^2)\} T_2 &= 0 \\ \rho D_t^2 T_3 + \{(c_0 + c_1)\xi_3^2 + (c_0 + c_2)(\eta_3^2 + \phi_3^2)\} T_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 ξ_i , η_i , ϕ_i は境界条件により定まる固有値である。

同様に、 y および z 軸方向の変位 v , w についても求め、(9)式に代入すれば、つぎの一般解を得る。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^3 u_i = \sum_{i=1}^3 A_i X_i Y_i Z_i T_i, \quad A_i = 1 \\ v &= \sum_{i=1}^3 v_i = \sum_{i=1}^3 A'_i \frac{D_x X_i}{j\xi_i} \frac{D_y Y_i}{j\eta_i} Z_i \cdot T_i \\ w &= \sum_{i=1}^3 w_i = \sum_{i=1}^3 A''_i \frac{D_x X_i}{j\xi_i} Y_i \frac{D_z Z_i}{j\phi_i} T_i \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $j = \sqrt{-1}$ 、また、 A_i , A'_i , A''_i は境界条件によって定まる実数または純虚数であり、つぎの関係がある。

$$\begin{aligned} (c_0 + c_1 - b_1)\xi_1 A_1 + (c_0 + b_1)(\eta_1 A'_1 + \phi_1 A''_1) &= 0 \\ (c_0 + b_1)\xi_1 \eta_1 A_1 + (c_0 + c_2 - b_1)\eta_1^2 A'_1 \\ - (b_1 - b_2)\phi_1^2 A''_1 + (c_0 + c_2 - b_2)\eta_1 \phi_1 A''_1 &= 0 \\ (c_0 + b_1)\xi_2 A_2 + (c_0 + c_2 - b_2)(\eta_2 A'_2 + \phi_2 A''_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c_0 + c_1 - b_1)\xi_2^2 A_2 + (b_1 - b_2)(\eta_2 + \phi_2^2) A_2 \\ + (c_0 + b_1)\xi_2(\eta_2 A'_2 + \phi_2 A''_2) &= 0 \\ (c_0 + c_2 - b_1)(\eta_3^2 + \phi_3^2) A_3 \\ - (c_0 + b_1)\xi_3(\eta_3 A'_3 + \phi_3 A''_3) &= 0 \\ (c_0 + b_1)\xi_3 \eta_3 A_3 + (c_0 + c_2 - b_2)\eta_3(\phi_3 A'_3 - \eta_3 A''_3) \\ - (c_0 + c_1 - b_1)\xi_3^2 A''_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

つぎに、境界条件より固有関数を導出しよう。固定端での境界条件より、固有値 ξ , η は次式で与えられる。

$$\xi_n = \xi_{in} = n\pi/l_1, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

$$\eta_m = \eta_{im} = m\pi/l_2, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

また、自由境界面の境界条件より、 ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 にはつぎの関係があることがわかる。

$$\begin{aligned} b_2 \phi_{2nm}^2 &= b_1 \phi_{1nm}^2 + (b_1 - b_2) \eta_m^2 \quad (15) \\ (c_0 + c_2) \phi_{3nm}^2 &= (b_1 - c_0 - c_2)(s_1^2 \xi_n^2 + \eta_m^2) + b_1 \phi_{1nm}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \xi_n^2 \phi_{3nm} \{c_0(\eta_m^2 + \phi_{1nm}^2) - (c_0 + c_3)s_1 \eta_m^2 - (c_0 + c_2)s_1 \phi_{1nm}^2\} \\ \times \{(s_1 - 1)\eta_m^2 - (s_1 + 1)\phi_{2nm}^2\} \cot(\phi_{1nm} l_3) \tan(\phi_{3nm} l_3) \\ + 2(c_2 - c_3)\eta_m^2 \phi_{1nm} \phi_{2nm} \phi_{3nm} (s_1^2 \xi_n^2 + \eta_m^2 + \phi_{1nm}^2) \\ \cot(\phi_{2nm} l_3) \tan(\phi_{3nm} l_3) \\ = \phi_{1nm} \{c_0 s_1 \xi_n^2 + (c_0 + c_3)\eta_m^2 + (c_0 + c_2)\phi_{3nm}^2\} \\ \times \{(\eta_m^2 + \phi_{1nm}^2)(\phi_{2nm}^2 - \eta_m^2) - s_1 \xi_n^2(\eta_m^2 + \phi_{2nm}^2)\} \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $s_1 \triangleq (c_0 + c_1 - b_1)/(c_0 + b_1)$ である。

(15)~(17)式より、自由境界面に対する固有値 ϕ_{inm} は、システムパラメータ σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{yx} を含み複雑な関係で与えられる。これについては、後に述べる。

これらの固有値に対する固有関数は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} X_n &\triangleq X_{in} = 2j \sin(\xi_n x) \\ Y_m &\triangleq Y_{im} = 2 \cos(\eta_m y) \\ Z_{inm} &\triangleq 2e^{i\phi_{inm} z} \cos\{\phi_{inm}(z - l_3)\}, \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (18)$$

また、時間関数 T_{inm} は(10)式および初期条件により、次式で与えられる。

$$T_{nm} \triangleq T_{inm} = \frac{K_{nm}}{\rho \omega_{nm}} \cdot e^{-\gamma_{nm} t} \sin(\omega_{nm} t) \quad (19)$$

ここで、減衰定数 γ_{nm} , 固有角振動数 ω_{nm} , ゲイン K_{nm} はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} &= (\xi_n^2 + \eta_m^2 + \phi_{1nm}^2) \zeta / 2\rho \\ \omega_{nm} &= \frac{[(\xi_n^2 + \eta_m^2 + \phi_{1nm}^2) \{4\rho\mu - (\xi_n^2 + \eta_m^2 + \phi_{1nm}^2) \xi_n^2\}]^{1/2}}{2\rho} \end{aligned}$$

$K_{nm} =$

$$\begin{aligned} & \frac{-b_1(\xi_n^2 + \eta_m^2 + \phi_{1nm}^2)}{4l_1 l_2 \left(c_2 \xi_n^2 \sum_{i=1}^3 A_i Z_{inm} |_{z=0} + 2b_2 \xi_n \eta_m \sum_{i=1}^3 A'_i Z_{inm} |_{z=0} \right)} \\ & \times \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f_0 \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) D_x X_n Y_m dy dx \end{aligned}$$

一方、自由端でのせん断応力条件より、 A_i, A'_i, A''_i にはつぎの関係がある。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \phi_{inm} A_{inm} D_z Z_{inm} \Big|_{z=0} + \sum_{i=1}^3 \xi_n A''_{inm} D_z Z_{inm} \Big|_{z=0} &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 \phi_{inm} A'_{inm} D_z Z_{inm} \Big|_{z=0} + \sum_{i=1}^3 \eta_m A''_{inm} D_z Z_{inm} \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

上式および(12)式より、 $A_i, A'_i, A''_i (i=1, 2, 3)$ が求められる。

以上のようにして、横等方三次元粘弾性システムのグリーン関数を得ることができる。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n,m} 8j \sin(\xi_n x) \cos(\eta_m y) T_{nm} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^3 A_{inm} e^{j\phi_{inm} z} \cos(\phi_{inm}(z-l_3)) \\ v &= \sum_{n,m} 8j \cos(\xi_n x) \sin(\eta_m y) T_{nm} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^3 A'_{inm} e^{j\phi_{inm} z} \cos(\phi_{inm}(z-l_3)) \\ w &= \sum_{n,m} 8j \cos(\xi_n x) \cos(\eta_m y) T_{nm} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^3 A''_{inm} e^{j\phi_{inm} z} \sin(\phi_{inm}(z-l_3)) \end{aligned} \quad (21)$$

3.2 固有値の近似陽表示

前節では、横等方三次元粘弾性システムのグリーン関数を導出した。これを用いてシステムの応答を具体的に得るには、(15)～(17)式に含まれる固有値を求める必要がある。しかし、これらの固有値は複雑な非線形関係で示され、解析的に得ることは困難である。そのため数値解法に依らざるを得ないが、それぞれの固有値の組合せについて非線形最適化手法を適用することは、ばく大な計算量を必要とする。さらに、ここで目的とするシステム同定に際しては、未知パラメータ $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{yx}$ を含むこれらの非線形連立方程式から固有値 $\phi_{inm} (i=1, 2, 3)$ を求めなければならない。そこで、固有値をシステムパラメータを用い近似陽表示することを考えよう。

(13), (14)式より、固有値 ξ_n, η_m は、 n, m とともに大きくなり、それらに対応する z 軸方向の固有値 ϕ_{inm} もまた大きくなることが(15)～(17)式によりわかる。さらに、 $\xi_n, \eta_m \rightarrow \infty$ のとき、 $\phi_{inm} \rightarrow j\infty$ となるため、近似する固有値 ϕ_{inm} を有界な値で表現する必要がある。そのため、等方等質のシステムに対しては、 $\alpha(\xi_n, \eta_m) = \phi_{inm}^2 / (\xi_n^2 + \eta_m^2)$ を定義し、固有値の近似を可能にした⁵⁾。しかし、ここで対象とするシステムは、 x 軸方向に異方性を示すので、(15)～(17)式に含まれる因数 $(s_1^2 \xi_n^2 + \eta_m^2)$ を用い次式を定義しよう。

Fig. 2 Exact eigenvalue and its approximation

Fig. 3 Numerical solution of $\alpha(0,0)$, $\alpha(\infty, \infty)$ and these approximations.

$$\alpha(\xi_n, \eta_m) \triangleq \phi_{inm}^2 / (s_1^2 \xi_n^2 + \eta_m^2) \quad (22)$$

等方等質のシステムでは、 $c_1 = 2b_1$ であるため、 $s_1 = 1$ となる。また、(15)～(17)式に含まれるポアソン比 $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}$ を σ_{yz} を基準にして次式で表わそう。

$$\sigma_{yz} \triangleq \sigma, \quad \sigma_{xy} \triangleq \sigma(1 + \theta_1), \quad \sigma_{yx} \triangleq \sigma(1 - \theta_2) \quad (23)$$

ここで、 θ_1, θ_2 は異方性の度合いを表わすパラメータで $\theta_1 = \theta_2 = 0$ のとき、等方等質のシステムを表わす。

(22)式で定義される $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ を近似するため、まず $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ の場合について、(15)～(17)式より $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ の数値解を得よう。

非線形最適化手法の初期設定値に等方等質の近似解⁵⁾を用い、ポアソン比が物理的意味をもつ $0 \leq \sigma \leq 0.5$ の範囲で求めた解 $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ を一例として示せば、Fig. 2 の各点となる。また、固有値 ξ_n についても、数値解 $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ は Fig. 2 と同様な傾向を示す。Fig. 2 は、解 $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ が固有値 ξ_n, η_m について指数関数的な変化を示し、 ξ_n, η_m の増加と共に一定値に漸近することを示している。これらの傾向は、種々のパラメータをもつシステムについても同様である。そこで、数値解 $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ を指数関数を基幹としたエルミート多項式で展開表現しよう。

$$\hat{\alpha}(\xi_n, \eta_m) = \sum_{j_1=0}^M \sum_{j_2=0}^M c_{j_1 j_2} H_{j_1 j_2}(\xi_n, \eta_m) \alpha^*(\xi_n, \eta_m) \quad (24)$$

ここで、 $H_{j_1 j_2}$ は二次元のエルミート多項式であり、 $c_{j_1 j_2}$ は $H_{j_1 j_2}$ の直交性より定まる展開係数である。また、 $\alpha^*(\xi_n, \eta_m)$ は基幹となる指数関数であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \alpha^*(\xi_n, \eta_m) &= \{\hat{\alpha}(0, 0) - \hat{\alpha}(\infty, \infty)\} e^{-(\hat{d}_1 \xi_n^2 + \hat{d}_2 \eta_m^2) l_3^2} + \hat{\alpha}(\infty, \infty) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\hat{\alpha}(0, 0)$ 、 $\hat{\alpha}(\infty, \infty)$ はポアソン比 σ_{xy} 、 σ_{yz} 、 σ_{yz} の関数であり、種々のパラメータのシステムについて、(15)～(17)式により求めると、Fig. 3 の各点として得られる。これらは、二次近似可能であり、最小二乗法によりつぎのように近似される。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(0, 0) &= 1.04024 + 1.20702\sigma_{yz} + 5.15861\sigma_{yz}^2 \\ &\quad - 1.95797\theta + 1.55092\theta^2 - 2.08901\sigma_{yz}\theta \\ \hat{\alpha}(\infty, \infty) &= -0.234396 + 0.332078\sigma_{yz} - 0.052918\sigma_{yz}^2 \\ &\quad + 0.121967\theta + 0.699399\theta^2 - 1.04952\sigma_{yz}\theta \end{aligned} \quad (26)$$

同様に、パラメータ d_1 、 d_2 はつぎのように近似される。

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 &= 0.187017 - 0.197824\sigma_{yz} + 0.743672\sigma_{yz}^2 \\ &\quad - 0.122496\theta + 0.811145\theta^2 + 0.344620\sigma_{yz}\theta \\ \hat{d}_2 &= 0.194956 - 0.111776\sigma_{yz} - 0.946998\sigma_{yz}^2 \\ &\quad + 0.263170\theta - 0.123414\theta^2 + 0.171494\sigma_{yz}\theta \end{aligned} \quad (27)$$

この $\hat{\alpha}(0, 0)$ 、 $\hat{\alpha}(\infty, \infty)$ 、 $\hat{d}_1$ 、 $\hat{d}_2$ を用い、基幹項 $\alpha^*(\xi_n, \eta_m)$ のみで表わした $\hat{\alpha}(\xi_n, \eta_m)$ を Fig. 2 に実線で示す。Fig. 2 より、基幹項のみでも $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ はほぼ近似可能と考えられる。また、 $\theta_1 \neq \theta_2$ のシステムについても同様に近似可能と考えられる。

このようにして、固有値 ϕ_{1nm} にかかわる $\alpha(\xi_n, \eta_m)$ が近似陽表示できれば、自由境界面に対する他の固有値 ϕ_{2nm} 、 ϕ_{3nm} は、(15)、(16)式より簡単に求めることができる。

4. システム同定

前章では、システムのグリーン関数を導出し、複雑に関係している固有値を近似的に陽表示した。実システムでは、システムパラメータのうち、形状を表わす大きさ l_1 、 l_2 、 l_3 および密度 ρ は容易に知ることができる場合が多い。しかし、弾性定数 μ 、粘性定数 ζ 、ポアソン比 σ_{xy} 、 σ_{yz} 、 σ_{yz} は一般に未知である場合が多い。粘弾性システムのこれら力学的性質を系統的に測定する方法はないようであるが、これらのシステム

パラメータは、応答波形の伝播速度あるいは固有振動数などに深く関係しており、その推定は振動系の解析および設計等、工学的に重要である。そこで、これらのパラメータをシステムの過渡応答波形より、系統的に推定する問題を考える。

いま、実システムの過渡応答波形の振動変位、振動速度、振動加速度の観測値を $\mathbf{m}$ とする。

$$\mathbf{m} \triangleq (u, v, w, D_t u, D_t v, D_t w, D_t^2 u, D_t^2 v, D_t^2 w)^T$$

この観測値 $\mathbf{m}$ は一般に暗振動および雑音で汚されている。したがって、(21)式のグリーン関数により得られる理論波形を $\hat{\mathbf{u}}$ とし、つぎの評価量のもとでパラメータ推定を行う。

$$J = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{R}} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{m})^T \mathbf{A} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{m}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \quad (28)$$

ただし、 $\mathbf{T}$ は観測時間、 $\mathbf{R}$ は観測領域、 $\mathbf{A}$ は重み行列である。

振動による物体の破損、破壊は主に速度成分に関係し、人体に影響を与えるのは主に加速度成分といわれている。したがって、重み行列 $\mathbf{A}$ は、モデルの使用目的および雑音の統計的性質を反映して選定する必要がある。また、評価量(28)式の最小化は非線形最適化問題となり、複数の極値が存在することがある。そのため、最適化手法においては、適切な初期設定値を与える必要がある。これらは、等方等質なシステムにおける初期値設定法を用いることが考えられる⁵⁾。

5. 実験的考察

5.1 デジタルシミュレーション

まず、本同定法の理論的正当性をシミュレーションにより検討する。導出したグリーン関数(21)式により、具体的に過渡応答波形を求めよう。

防振系などに用いられる工学的粘弾性材料を想定しシステムの各パラメータをそれぞれ $l_1 = l_2 = 1.0$ m, $l_3 = 0.01$ m, $\rho = 1.60 \times 10^3$ kg·m⁻³, $\zeta = 2.70 \times 10^2$ kg·

Fig. 4 Transient response by exact eigenvalues and estimated response by approximated eigenvalues

Table 1 Estimated parameters from noisy data

Parameters		elastic constants μ [kg/ms ²]	viscosity coefficients ζ [kg/ms]	Poisson's ratios		
				σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}
True values		0.100×10^7	270	0.486	0.450	0.414
Estimated values	Noise-free	0.101×10^7	271	0.483	0.446	0.409
	$R_v=0.05$	0.103×10^7	273	0.480	0.437	0.393
	$R_v=0.10$	0.102×10^7	277	0.480	0.440	0.400

$\text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $\mu = 1.00 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $\sigma_{xy} = 0.486$, $\sigma_{yz} = 0.450$, $\sigma_{zx} = 0.414$ とする. 加振点および観測点は, 異方性の影響を明らかにするため対称性をもたせ, 自由境界面上のそれぞれ $(0.5, 0.5, 0)$, $(0.4, 0.4, 0)$ とした. (15)~(17)式により与えられる固有値の厳密解(数値解)を用いた場合, システムの x , y , z 軸方向のインパルス応答(振動速度) $D_t u$, $D_t v$, $D_t w$ を Fig. 4 に実線で示す. なお, 本例の固有値は, いずれも, 収束性と計算時間を考慮し $n=m=200$ までを用いた. 観測点に対称性をもたせているため, システムが等方等質性であれば, x および y 軸方向の振動速度 $D_t u$, $D_t v$ は等しくなるが, 異方性のため Fig. 4 のように異なった応答を示している.

つぎに, 固有値の近似の妥当性を確認するため, 上述のシステムパラメータについて, 近似固有値を用いた応答波形を求めた. (24)式の基幹項(初項)のみで固有値を近似した場合においても, 応答波形は Fig. 4 の厳密な固有値を用いた応答波形とはほぼ一致した.

さらに, 本方法によりシステム同定が可能かどうかを調べるため, 厳密解による応答波形を与え, 近似陽表示した固有値による応答波形より, システムパラメータを推定した. パラメータ推定のための評価量は(28)式をサンプリング周期 $\Delta = 0.1 \times 10^{-3} \text{ sec}$ で離散化し, 振動速度成分のみに着目するように重み行列 A を選定した. また, 一点観測なので変数 x , y , z は省略する.

$$J = \sum_{k=10}^{60} [\{D_t \hat{u}(k\Delta) - D_t u(k\Delta)\}^2 + \{D_t \hat{v}(k\Delta) - D_t v(k\Delta)\}^2 + \{D_t \hat{w}(k\Delta) - D_t w(k\Delta)\}^2]$$

また, 上式的最適化には Fletcher-Powell 法を用い, その初期設定値には, 等方等質なシステムに対する決定法を用いた. その際, 固有値の近似式(24)は基幹項のみを用いた. 得られた各パラメータの推定値を Table 1 に, 推定波形を Fig. 4 に破線で示す. この推定波形は, 時間 t が小さい部分で厳密な固有値による応答波形と多少誤差を生じているが, 他の部分はほぼ一致している. また, Table 1 より明らかなよう

Fig. 5 Actual response of anisotropic viscoelastic system and estimated response

に, 固有値を近似陽表示したことによる各パラメータの推定誤差は数パーセント以内である. 実際のシステムでは, 観測値は暗振動, 雑音等で汚されている. そこで, 理論応答波形に平均零, 分散 σ_v^2 の白色正規性雑音を加え, 観測値とした. その際, SN 比に関して,

$$R_v = \sqrt{\frac{3 \times (60-9) \cdot \sigma_v^2}{\sum_{k=10}^{60} \{(D_t \hat{u}(k\Delta))^2 + (D_t \hat{v}(k\Delta))^2 + (D_t \hat{w}(k\Delta))^2\}}}$$

を考え, $R_v = 0.05, 0.10$ となるように σ_v^2 を設定し, 同様に推定した結果を Table 1 に示す.

観測値に雑音加わっている場合も推定誤差は数パーセントで, 本方法によりシステム同定が可能と考えられる.

5.2 実システムへの適用

これまでに, 異方性を示す三次元双曲形分布定数系のグリーン関数を導出し, システム同定法の妥当性をデジタルシミュレーションにより検討した. ここでは, 異方性を示す工学的粘弾性システムとしてクロロプレンゴムを取り上げ, その実測応答波形からパラメータ推定を行う.

大きさ $l_1 = l_2 = 1.0 \text{ m}$, $l_3 = 0.00977 \text{ m}$, 密度 $\rho = 1.565 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ なるクロロプレンゴムの側面および底面を固定する. 加振入力, 重さ 30.8 g の錘を $(0.5, 0.5, 0)$ の自由境界上に高さ 0.5 cm より自然落下させることにより得た. この入力, 完全なインパルスではないが, 応答の振動周期に比べ小さいとみなすことができる. 波形の観測には, いわゆる波の腹に

相当する(0.4, 0.4, 0)の自由境界面上に振動ピックアップを設置し、 x および y 軸方向の振動速度 $D_t u$, $D_t v$ を観測する。またこれと同時に、錘の上端部に加振入力および加振時刻を検知するための振動ピックアップを設けた。このときの応答波形 $D_t u$, $D_t v$ を Fig. 5 に実線で示す。パラメータ推定のための評価量はシミュレーション例と同様にして次式を用いた。

$$J = \sum_{k=10}^{110} [\{D_t \hat{u}(k\Delta) - D_t u(k\Delta)\}^2 + \{D_t \hat{v}(k\Delta) - D_t v(k\Delta)\}^2]$$

ただし、 $\Delta = 5/128$ msec である。

最適化の初期値設定法、固有値の近似およびその項数 $n, m (=200)$ は、前節のシミュレーションと同様にしてパラメータ推定を行った。

得られたパラメータの推定値を Fig. 5 中に記し、その推定波形を破線で示す。この推定波形は、異方性を示すシステムの実測応答波形の主要部分を大略説明しており、設定したモデルおよびグリーン関数は、異方性を示す実システムを表わしていると考えられる。また各パラメータの推定値も、システムがゴム系であることを考慮すれば、ほぼ妥当である。したがって、本方法により、横等方三次元粘弾性システムの同定が可能と考えられる。

6. おわりに

異方性システムのうち比較的多く見受けられる横等方三次元粘弾性システムの同定法について考察した。まず、実験面に適合した自由境界面を含む境界条件を設定した上で、横等方性システムのグリーン関数を導出した。自由境界面を含むシステムの固有値は複雑に関係づけられているため、固有値を近似陽表示することによりシステム同定を可能にした。つぎに、デジタルシミュレーションにより、この近似の妥当性とそれに基づく同定法の正当性について検証した。さらに、本同定法を異方性を示す実システムへ適用し、パラメータ推定を行った。得られた推定波形は、実測応答波形の主要部を大略説明しており、各パラメータ推定値もシステムのものとして妥当であった。これらの結果より、本方法は異方性を示す三次元双曲形分布定

数系の同定に有用であると考えられる。

今後の課題としては、応答波形の特徴からパラメータの概略値を簡単に把握すること。また、実測応答波形と推定波形の後部に少しずれが見られるが、これらについては、理論、実験の両面からさらに検討を加える必要がある。

終りに、卒業研究としてご協力いただいた本学学生、森山博教、日高 稔、堀本孝治君に謝意を表します。

参考文献

- 1) D. L. Russell: Controllability and Stabilizability Theorem for Linear Partial Differential Equations. Recent Progress and Open Questions, SIAM Rev. 20, 639/739 (1978)
- 2) N. Weck: A Remark on Controllability for Symmetric Hyperbolic Systems in One Dimension, SIAM J. Control and Opti., 20-1, 1/8 (1982)
- 3) M. P. Polis, R. E. Goodson and M. J. Wozny: On Parameter Identification for Distributed System Using Galerkin's Criterion, Automatica, 9, 53/64 (1973)
- 4) P. N. Paraskevopoulos and A. C. Bounas: Distributed Parameter System Identification via Walsh Functions, Int. J. Syst. Sic., 9, 75/83 (1978)
- 5) 沖田 豪, 小林康秀, 田中正吾: 過渡応答を用いた三次元双曲形分布定数系の同定, 電気学会論文誌, 101-C-6, 145/152 (1981)
- 6) R. F. S. Hearmon: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press (1961)
- 7) S. G. Lekhnitskii: Theory of elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day (1963)
- 8) S. R. Moghe and C. C. Hsiao: Stress Distribution in Anisotropic Visco-Elastic Hollow Sphere, J. Apl. Mech., 32, 31/36 (1965)
- 9) W. Flugge: Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Company (1967)
- 10) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性, 培風館 (1980)
- 11) 松本浩之: 線形粘弾性体の衝撃応答, 日本機械学会論文集, 48-A-436, 1475/1480 (1982)
- 12) K. C. Valanis and A. Iowa: Some Exact Wave Propagation Solutions in Viscoelastic Materials: Acta Mechanica, 4-2, 170/190 (1967)
- 13) 川井良次, 中川紀寿, 船越昭範: 衝撃を受ける粘弾性材料の波動に関する研究, 日本機械学会論文集, 48-A-425, 101/109 (1982)