指定した安定余裕を保証する状態フィードバック則†

近 藤 良*・原 辰 次*・古 田 勝 久*

State Feedback Law with Specified Stability Margin

Ryou KONDO*, Shinji HARA* and Katsuhisa FURUTA*

1. ま え が き

最適レギュレータの状態フィードバック則は、ゲイン余裕 $1/2$ から無限大、位相余裕 60° を有することが知られている。また、最近リカッチ方程式の解を用いて、または解の存在性を条件として、これとは異なる安定余裕をもつ状態フィードバックの設計法が、いくつか提案されている^{2)~5)}。しかしそれらのリカッチ方程式は異なる形をしており、統一的な取り扱いはなされていない。そこで、いくつかのパラメータを含む一般的なリカッチ方程式を用いて、指定した安定余裕を保証する状態フィードバック則のクラスを明らかにし、今まで知られていたものが特例として扱えることを示す。また乗法的変動および加法的変動に対するロバスト安定性について考察する。

2. 状態フィードバックとその安定余裕

可制御線形システム：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (1)$$

$$x(t) \in R^n, v(t) \in R^m, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}$$

の入力側に finite gain¹⁾, nonanticipative¹⁾ の作用素 N (変動と呼ぶ)：

$$v(t) = (Nu)(t); N0 = 0 \quad (2)$$

が Fig. 1 のように挿入されているとし、状態フィードバック：

$$u(t) = -Fx(t); F = \alpha B^T P + \beta D \quad (3)$$

を考える。ここで P はリカッチ方程式：

$$A^T P + PA - \gamma(PB + \varepsilon D^T) \\ (B^T P + \varepsilon D) + \delta D^T D + Q = 0 \quad (4)$$

の正定対称解であり、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ はスカラー実数、 $D \in$

$R^{m \times n}$, Q は正定対称行列である。このとき、つぎの補題が成立する。

[補題] リカッチ方程式(4)を満たす正定対称解 P が存在し

$$\mu \triangleq \alpha^2 \delta - \gamma(\beta - \alpha \varepsilon)^2 > 0 \quad (5)$$

が成立していたとする。このとき任意の $\omega \in R$ について

$$W(\omega) \triangleq \gamma \delta G^*(j\omega)G(j\omega) + \beta^2 I \\ + \nu(G^*(j\omega) + G(j\omega)) > 0 \quad (6)$$

が成り立つ。ただし $\nu = \alpha \delta + \gamma \varepsilon(\beta - \alpha \varepsilon)$,

$$G(s) = F(sI - A)^{-1}B \quad (7)$$

である。また任意の $u(t) \in L_2^m[0, \infty)$ (注1) に対し変動要素 N が不等式

$$h(u) = \beta^2 \langle Nu, Nu \rangle - 2\nu \langle Nu, u \rangle \\ + \gamma \delta \langle u, u \rangle \leq 0 \quad (8)$$

を満たすならば閉ループ系は漸近安定である。■

(証明) $E(s) \triangleq B^T P(sI - A)^{-1}B$, $H(s) \triangleq D(sI - A)^{-1}B$, $\tilde{Q}(s) \triangleq B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B$ とおき、リカッチ方程式(4)を変形すると

$$-E(s) - E^T(-s) - \gamma(E^T(-s) + \varepsilon H^T(-s))(E(s) \\ + \varepsilon H(s)) + \delta H^T(-s)H(s) = -\tilde{Q}(s)$$

を得る。両辺に μ を掛け、(7)を代入し $s = j\omega$ とおくと

$$K^*(j\omega)K(j\omega) - W(\omega) = -\mu \tilde{Q}(j\omega)$$

となる。ここで $K(s) = \gamma(\beta - \alpha \varepsilon)E(s) + \nu H(s) + \beta I$ である。これより(6)が得られる。

P を(4)の正定対称解とし、 $\tilde{x}$ を初期値 x_0 に対する閉ループ系の解とすると、任意の $\tau \in [0, \infty)$ につい

Fig. 1 Closed-loop system

(注1) $L_2^m[0, \infty)$

$$= \{x | x: [0, \infty) \rightarrow R^n, \int_0^\infty x^T(t)x(t) dt < \infty\}$$

(注2) $\langle x, y \rangle = \int_0^\infty x^T(t)y(t) dt$

† 第14回制御理論シンポジウムで発表(昭60・5)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Tokyo Institute of Technology,
Faculty of Engineering., Meguro-ku, Tokyo

(Received July 23, 1985)

Key Words: state feedback control, stability margin,
robust stability

て

$$\begin{aligned} x_0^T P x_0 &= \bar{x}^T(\tau) P \bar{x}(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{dt} (\bar{x}^T(t) P \bar{x}(t)) dt \\ &= \bar{x}^T(\tau) P \bar{x}(\tau) - \langle \bar{x}_\tau, (A^T P + P A) \bar{x}_\tau \rangle \\ &\quad - 2 \langle B^T P \bar{x}_\tau, N \bar{u}_\tau \rangle \geq \langle \bar{x}_\tau, Q \bar{x}_\tau \rangle \\ &\quad - 2 \langle B^T P \bar{x}_\tau, N \bar{u}_\tau \rangle - \gamma \langle (B^T P + \varepsilon D) \bar{x}_\tau, \\ &\quad (B^T P + \varepsilon D) \bar{x}_\tau \rangle + \delta \langle D \bar{x}_\tau, D \bar{u}_\tau \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ(注3)。さらに(3), (4), (5)を用いると

$$\begin{aligned} x_0^T P x_0 &\geq \langle \bar{x}_\tau, Q \bar{x}_\tau \rangle \\ &\quad + \{ \gamma(\beta - \alpha \varepsilon) B^T P \bar{x}_\tau + \nu D \bar{x}_\tau \\ &\quad + \beta N \bar{u}_\tau \|^2 - h(\bar{u}_\tau) \} / \mu \end{aligned}$$

となり, (8)より $x_0^T P x_0 \geq \langle \bar{x}_\tau, Q \bar{x}_\tau \rangle$ を得る。 Q は正定対称行列だから, $\bar{x}$ は L_2 に含まれ, N が finite gain だから $\bar{u}$ もまた L_2 に含まれる¹⁾。したがって $\bar{x}$ は原点に収束し, 閉ループ系は漸近安定となる。

(証明終)

(注意) (6)と(8)は変動要素と入力から変動要素の入り口までの伝達関数が Safonov の入出力グラフが互いに相補領域にあれば安定であるという“分離原理”を満たしている⁷⁾。したがって一巡伝達関数について(6)が成り立つので, (8)のような変動については漸近安定であることが Safonov の結果からも言える。

3. 指定した安定余裕を保証するパラメータ

ここでは二通りの変動要素について考える。一つは finite gain, memoryless, 時変の非線形要素

$$(Nu)(t) = f(u(t), t) \quad (9)$$

であり, 任意の $u \in R^m$, $t \in [0, \infty)$ について

$$(I.1) \quad (f(u, t) - K_H u)^T (f(u, t) - K_L u) \leq 0$$

$$(II.1) \quad u^T (f(u, t) - K_L u) \geq 0 \quad (10)$$

のいずれかを満たす。ただし, $K_H, K_L \in R$, $K_H > K_L$ 。

もう一つは伝達関数 $L(s)$ で表わされる時不変, L_2 入出力安定な要素で, 任意の $\omega \in R$ について

$$(I.2) \quad L^*(j\omega)L(j\omega) - (K_H + K_L)(L^*(j\omega) + L(j\omega))/2 + K_H K_L I \leq 0$$

$$(II.2) \quad L^*(j\omega) + L(j\omega) \geq 2K_L I \quad (11)$$

のいずれかを満たす。ただし, $K_H, K_L \in R$, $K_H > K_L$ 。

1入力の場合について(I.1)および(I.2)の不等式を満たす領域を Fig. 2 に示す(注4)。

この二つはつぎのようなクラスに含まれることが内積の定義と Parseval の定理から言える。

(注3) $x_\tau(t) \triangleq \begin{cases} x(t), & t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ $\|x\|^2 \triangleq \langle x, x \rangle$

(注4) (10), (11)で K_H, K_L は負でもよく, (II.1), (II.2)は図において $K_H \rightarrow \infty$ に相当する。また変動要素が $K_L \rightarrow -\infty$ の場合は, IIの結果でフィードバック則の符号を反転したものに等しい。

$$(I) \quad \langle Nu, Nu \rangle - (K_H + K_L) \langle Nu, u \rangle + K_H K_L \langle u, u \rangle \leq 0$$

$$(II) \quad \langle Nu, u \rangle - K_L \langle u, u \rangle \geq 0 \quad (12)$$

以下(I), (II)の不等式を満たすとき N をそれぞれ $(K_L, K_H), (K_L, \infty)$ の変動要素と呼ぶことにする。

ここで(8)と(12)とを等価にし(5)を満たすパラメータを求めると

$$(I) \quad \alpha \delta + \gamma \varepsilon (\beta - \alpha \varepsilon) = \beta^2 (K_H + K_L) / 2$$

$$\gamma \delta = K_H K_L \beta^2, \quad \beta \neq 0, \quad \delta - \gamma \varepsilon^2 > 0 \quad (13)$$

$$(II) \quad \gamma \delta = 2K_L \alpha (\delta - \varepsilon^2 \gamma), \quad \alpha > 0, \quad \beta = 0, \quad \delta - \gamma \varepsilon^2 > 0 \quad (14)$$

となり, 補題よりつぎの定理が成立する。

《定理1》 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ が(13) {(14)}を満たしリカッチ方程式(4)の正定対称解が存在したとする(注5)。このとき状態フィードバック(3)により閉ループ系は $(K_H, K_L) \{(K_L, \infty)\}$ の変動要素に対し漸近安定となる。

$\alpha \sim \varepsilon$ の内で独立なパラメータを抽出すると以下の定理を得る。

《定理2》 Table 1 で与えられる $\bar{\alpha} \sim \bar{\varepsilon}$ は(13) {(14)}を満たす。さらに, $\rho_1 \rho_2 > 0$ を満たす任意の実数 ρ_1, ρ_2 に対し $\alpha = \bar{\alpha} \rho_2 / \rho_1, \beta = \bar{\beta} \rho_2, \gamma = \bar{\gamma} \rho_2 / \rho_1, \delta = \bar{\delta} \rho_1 \rho_2, \varepsilon = \bar{\varepsilon} \rho_1$ もまた(13) {(14)}を満たす。

これより安定余裕を保証するパラメータの中で, (I)の場合は $\rho_1, \rho_2, \bar{\varepsilon}$, (II_a)の場合は $\rho_1, \rho_2, \bar{\varepsilon}, \bar{\delta}$, (II_b)の場合は $\rho_1, \rho_2, \bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}$ に自由度があることがわかる。リカッチ方程式を用いて安定余裕を保証する従来の方法は, 定理2, Table 1 の特殊な場合として導け, 以下のように対応する。

Molander²⁾他: (K_L, K_H)

$$I_a \rightarrow \rho_1 := \frac{K_H + K_L}{2K_H K_L}, \quad \rho_2 := \frac{2}{K_H + K_L}, \quad \bar{\varepsilon} := \frac{2K_H K_L}{K_H + K_L}$$

平山, 平井⁶⁾: (K_L, K_H)

$$I_a \rightarrow \rho_1 := \frac{1}{2K_L} \left[\frac{2}{K_H - K_L} \right]^{1/2}, \quad \rho_2 := \left[\frac{2}{K_H - K_L} \right]^{1/2}$$

$$\bar{\varepsilon} := K_L$$

Fig. 2 Admitted perturbation

(注5) $r > 0$ かつ(13)または(14)をみたせば(4)を満たす正定対称解が必ず存在する。

Table 1 Parameters satisfying (13) and (14)

	α	β	γ	δ	ε	条 件
I _a	$\frac{1}{K_H K_L - \varepsilon^2} \left[\pm \frac{K_H + K_L}{2} - \varepsilon \right]$	1	± 1	$\pm K_H K_L$	ε	$K_H K_L - \varepsilon^2 \geq 0$
I _b	$\frac{1}{1 - K_H K_L \varepsilon^2} \left[\pm \frac{K_H + K_L}{2} - \varepsilon K_H K_L \right]$	1	$\pm K_H K_L$	± 1	ε	$1 - K_H K_L \varepsilon^2 \leq 0$
II _a	1	0	$\frac{2K_L \delta}{\delta + 2K_L \varepsilon^2}$	δ	ε	$\delta + 2K_L \varepsilon^2 > 0, \delta \neq 0$
II _b	1	0	$\bar{\gamma}$	$\frac{-2K_L \varepsilon^2 \bar{\gamma}}{\bar{\gamma} - 2K_L}$	ε	$\bar{\gamma} - 2K_L < 0, \bar{\gamma} \neq 0$

Molander 他²⁾, 示村, 藤田⁵⁾: (K_L, ∞)

(Lehtomaki³⁾: $K_L = 0$)

II_a → $\rho_1 = \rho_2$, $\bar{\varepsilon} = 0$ ($\bar{\gamma} = 0$)

また $K_H = 1, K_L = -1$ とおくと, 条件 (I.2) は周波数領域で単位円内を表わすので, 任意の遅れに対し漸近安定であるための十分条件が得られる. (文献 4) の結果は (15) において $\bar{\varepsilon} = 0, \rho_1 = \rho_2 = 1$ とした場合に当たる.)

[系] ある $\rho_1 \rho_2 > 0$ を満たす $\rho_1, \rho_2, \bar{\varepsilon}$ に対し

$$\alpha = \frac{\bar{\varepsilon}}{1 + \bar{\varepsilon}^2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \beta = \rho_2, \quad \gamma = -\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \delta = \rho_1 \rho_2 \quad (15)$$

とし, リカッチ方程式 (4) を満たす正定対称解が存在したとする. このとき, 状態フィードバック則 (3) をもつ閉ループ系は入力端での任意の時間遅れに対し漸近安定である. ■

最後に, ロバスト安定性について考察する. ここで変動要素 N の代わりにプラントに乗法的変動と加法的変動があった場合について考える. ただし, 変動のない場合に閉ループ系は漸近安定であると仮定する. $G(s)$ が安定な乗法的変動を受け $G(s)(I + \Delta G_m(s))$ となったときを考える. $I + \Delta G_m(s)$ は入力端の変動要素 $L(s)$ と見なせるから $L(s) = I + \Delta G_m(s)$ とおくと, (8) より任意の $\omega \in R$ について

$$\beta^2 \Delta G_m^*(j\omega) \Delta G_m(j\omega) + (\beta^2 - 2\nu + \gamma\delta)I + (\beta^2 - \nu)(\Delta G_m^*(j\omega) + \Delta G_m(j\omega)) \leq 0 \quad (16)$$

が成立するならば, 閉ループ系の漸近安定性が保たれる. 特に $\alpha \sim \varepsilon$ が (13) を満たしているならば, (16) は

$$\|\Delta G(j\omega) + (1 + (K_H + K_L)/2)I\| \leq (K_H - K_L)/2 \quad (17)$$

となり, この十分条件として次式が得られる.

$$\|\Delta G_m(j\omega)\| \leq \min\{1 - K_L, K_H - 1\} \quad (18)$$

また $G(s)$ に加法的変動が加わり $G(s) + \Delta G_a(s)$ となった場合は, $G(s)$ に $(I + \Delta G_a(s))^{-1}$ という乗法的変動が加わったと考えられる. いま, $(I + \Delta G_a(s))^{-1}$ が安定であるとする, (8) より任意の $\omega \in R$ について

$$\gamma\delta \Delta G_a^*(j\omega) \Delta G_a(j\omega) + (\gamma\delta + \beta^2 - 2\nu)I$$

$$+ (\gamma\delta - \nu)(\Delta G_m^*(j\omega) + \Delta G_m(j\omega)) \leq 0 \quad (19)$$

ならば閉ループ系は漸近安定である. 特に $\alpha \sim \varepsilon$ が (13) を満たしているならば, (19) は $K_L > 0$ に対して

$$\left\| \Delta G_m(j\omega) + \left(1 - \frac{1}{2K_H} - \frac{1}{2K_L}\right)I \right\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_L} - \frac{1}{K_H} \right) \quad (20)$$

となり, この十分条件として次式が得られる.

$$\|\Delta G_m(j\omega)\| \leq \min\{1 - 1/K_H, 1/K_L - 1\} \quad (21)$$

従来の最適制御は $\alpha = \gamma, \beta = \varepsilon = 0$ とした場合に相当し, $K_H = \infty, K_L = 1/2$ になる. したがって, (18), (21) は最適制御に対する結果の拡張になっている.

4. あとがき

本論文の結果は, $\alpha \sim \varepsilon$ が対角行列である場合にまで容易に拡張できる. このとき入力チャンネルごとに異なる安定余裕を指定することが可能となる. 定理 2 で与えられたフリーパラメータがシステムの挙動にどのような影響を及ぼすかを明らかにするのが今後の課題である.

参 考 文 献

- 1) M. G. Safonov, et al.: Gain and Phase Margins for Multiloop LQG Regulators, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22-2**, 454/460 (1977)
- 2) P. Molander, et al.: Synthesis of State Feedback Control Laws with a Specified Gain and Phase Margin, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-25-5**, 928/931 (1980)
- 3) N. A. Lehtomaki, et al.: Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26-1**, 75/92 (1981)
- 4) 古川：むだ時間系に対する周波数領域における安定条件, 第 22 回 SICE 学術講演会予稿集, 65/66 (1983)
- 5) 示村, 藤田：Integrity を保証し, 広い位相余裕を実現する制御系の構成法について, 第 6 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 215/218 (1983)
- 6) 平山, 平井：非線形多変数サーボ系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **20-10**, 28/32 (1984)
- 7) M. G. Safonov: Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems, MIT Press (1980)