L型の最適ディジタルサーボ系

美多 勉*・片岡 良彦*・榊 陽*

On the Design of Type L Optimal Digital Servosystems

Tsutomu MITA*, Yoshihiko KATAOKA* and Yo SAKAKI*

1. はじめに

最近、村田¹⁾、愛田²⁾らによって2型、およびL型のディジタルサーボ系の設計法が示されているが、状態フィードバック制御の理論体系からみて、必ずしも分かり易いものではないように思われる。ここでは筆者らの前論文³⁾の結果を流用し、2型の最適サーボ系の設計法を示し、さらに、これをもとにL型の最適サーボ系の設計指針を示す。特徴としては、拡大系の最適制御問題が通常の最適レギュレータの解だけを用いて解けるところにある。

2. 2型の最適ディジタルサーボ系の設計

連続時間系を離散化して求められた系を

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad y_i = Cx_i \quad (i \geq 0) \quad (1)$$

とする。ただし、 $x_i \in R^n$, $u_i \in R^m$, $y_i \in R^m$ で、 (A, B) は可制御 (可到達), (C, A) は可観測で、かつ1に零点がないものとする。 y_i は $r_i = r^1_i + r^0_i$ の形式の目標値に定常偏差なく追従させたい制御量である。

まず、内部モデル原理を満たすため、Fig. 1 のように二つの積算変数 z^1_i, z^2_i を用い、制御則を

$$u_i = -Hx_i + z^1_i \quad (2)$$

$$z^1_{i+1} = z^1_i + z^2_i + K_1 e_i \quad (3)$$

$$z^2_{i+1} = z^2_i + K_2 e_i \quad (4)$$

$$e_i = r_i - y_i \quad (5)$$

とする。ここで、 H, K_1, K_2 は安定化のためのパラメータであり、以下、最適制御を用いて決定される。

最適制御を最適レギュレータ問題に帰着させて解くために、以下、 $x_i, u_i, v_i (=u_{i+1})$ を状態変数にとることとする。すると、(1)~(5)式より

$$v_{i+1} = u_{i+1} = -Hx_i - HBu_i + z^1_i + z^2_i + K_1 e_i \quad (6)$$

$$v_{i+1} = u_{i+2} = -HA^2x_i - HABu_i - HBv_i + z^1_i + 2z^2_i + (K_1 + K_2)e_i + K_1 e_{i+1} \quad (7)$$

となる。(7)式において、 e_i, e_{i+1} は x_i, u_i, v_i などの関数として表わされるが、さらに、 $z^1_i + 2z^2_i$ の項をこれらの関数で表わす必要がある。そこで、(2), (6) 式をまとめると

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & 0 \\ HA & HB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1_i \\ z^2_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} e_i \quad (8)$$

を得る。これから、 z^1_i, z^2_i を求め、(7)式から $z^1_i + 2z^2_i$ の項を消去してまとめると

$$\begin{aligned} v_{i+1} = & -[H(A - I_n)^2 + K_1 C(A - I_n) + K_2 C]x_i \\ & -[H(A - I_n)B - HB + K_1 CB + I_m]u_i \\ & -[HB - 2I_m]v_i + (K_2 - K_1)r_i + K_1 r_{i+1} \\ \triangleq & -J_1 x_i - J_2 u_i - J_3 v_i + (K_2 - K_1)r_i \\ & + K_1 r_{i+1} \end{aligned} \quad (9)$$

となり、閉ループ系は、 $X_i = (x_i', u_i', v_i')'$ とおくと

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ -J_1 & -J_2 & -J_3 \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ K_2 - K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{bmatrix} \quad (i \geq 0) \quad (10)$$

となる。ここで、 $J_1 \sim J_3$ を整理すると

$$(J_1, J_2, J_3) = (H, K_1, K_2)M + (0, I_m, -2I_m) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M = & \begin{bmatrix} (A - I_n)^2 & (A - I_n)B - B & B \\ C(A - I_n) & CB & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} A - I_n & B & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} A - I_n & B & 0 \\ C & 0 & 0 \\ C & 0 & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -I_m & I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

を得、 I に零点がないことより、 $|M| \neq 0$ となる。

* 千葉大学工学部 千葉市弥生町 1-33

* Faculty of Engineering, Chiba University, Chiba
(Received July 10, 1985)
(Revised August 31, 1985)

Key Words: digital control, optimal servosystem

$$\begin{aligned}
 X_{i+1} = & \begin{bmatrix} A & B \\ & I_m \\ & & \ddots \\ & & & I_m \\ -J_1 & -J_2 & \cdots & -J_{L+1} \end{bmatrix} X_i \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 & \cdots & a_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i+L-1} \end{bmatrix} \quad (22)
 \end{aligned}$$

の形式として表わされ、 $J_1 \sim J_{L+1}$ は $H, K_1 \sim K_L$ の線形関数となる。そこで、定常値からの偏差を $\tilde{X}_i$ とおき偏差系をつくると

$$\tilde{X}_{i+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ & I_m \\ & & \ddots \\ L-1 \text{個} & & I_m \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tilde{X}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} w_i \quad (23a)$$

に

$$w_i = -(J_1, J_2, \cdots, J_{L+1}) \tilde{X}_i \quad (23b)$$

の状態フィードバック制御を施したものとみなされる。ただし、 $w_i = \tilde{v}_{i+1}^T = \tilde{u}_{i+L}$ である。そこで、(14)式と同形式の評価関数を最小にすることを考えると、文献3)より、(16)式の F を使い

$$J_1 = FA^L, J_2 = FA^{L-1}B, \cdots, J_{L+1} = FB \quad (24)$$

となるので、 $J_1 \sim J_{L+1}$ から $H, K_1 \sim K_L$ の最適値が逆算でき、 F の線形関数として表わされる（具体的な $H, K_1 \sim K_L$ の形は紙面の都合上省略する）。

ただし、最適性を保証するために、偏差系の初期値については、前章と同じ仮定を設ける。

3. おわりに

2型の最適ディジタルサーボ系の設計法と、それをもとにして、L型の最適ディジタルサーボ系の設計指針をまとめてみた。ただし、(1)式が連続時間系から導かれた場合、目標値が、 $r_i = a_0(iT)^{L-1} + a_1(iT)^{L-2} + \cdots + a_{L-1}$ で与えられるとき、連続時間系の制御量 $y(t)$ がサンプル点 iT 以外でも、 $y(t) = a_0 t^{L-1} + a_1 t^{L-2} + \cdots + a_{L-1}$ となるためには、一般に $L-1$ 次以上のホルダを用いて制御する必

要がある⁴⁾。なお、本稿では簡単のため外乱項を設けなかったが、内部モデルで発生可能なクラスの外乱があるときにも同様の結果を得る。

参考文献

- 1) 村田：ランプ入力、定加速度入力に対する有限整定応答制御器の設計，計測自動制御学会論文集，19-8，673/675 (1983)
- 2) 愛田：多項式目標入力に追従する準最適ディジタル制御系の設計，計測自動制御学会論文集，20-8，677/684 (1984)
- 3) T. Mira: Optimal Digital Feedback Control Systems Counting Computation time of Control Laws, IEEE Trans. on Automatic Control AC-30-6, 542/548 (1985)
- 4) 美多，ディジタル制御理論，昭晃堂 (1984)

《付 録》

[$\tilde{X}_0$ が設計パラメータに依存しないことの証明]：簡単のため $L=3$ で考えていく。第1章では $L=2$ の場合を扱っているので、以下において、 $\beta^2=0, \alpha^2=0, y^2=0$ として考えていけばよい。

まず、操作量の定常値を $\tilde{u}_i = \beta^2 i^2 + \beta^1 i + \beta^0$ とすると、 x_i, y_i の定常値は $i \rightarrow \infty$ で $\tilde{x}_i = \alpha^2 i^2 + \alpha^1 i + \alpha^0$ ，式となる必要がある。これらを、(1)式両辺へ代入し $\tilde{y}_i = y^2 i^2 + y^1 i + y^0$ の形 i のべき項で整理すると

$$E = \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (A1)$$

とおくことにより

$$\begin{aligned}
 E \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad E \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \beta^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 E \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \beta^0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 + \alpha^1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A2)
 \end{aligned}$$

となり、目標値 $r_i = r^2 i^2 + r^1 i + r^0$ と $\tilde{y}_i$ が一致するよう、 $y^2 = r^2, y^1 = r^1, y^0 = r^0$ とおくと、 $\tilde{x}_i, \tilde{u}_i$ は、 $|E| \neq 0$ より、 r_i だけから唯一に定まる。ここで、(22)式を使うと、 $\tilde{v}_1^T = \tilde{u}_{i+1}, \tilde{v}_2^T = \tilde{u}_{i+2}$ も r_i から $H, K_1 \sim K_3$ に独立に唯一に定まる。よって、 $\tilde{X}_i (i \rightarrow \infty)$ も設計パラメータと独立な値となる。