双線形システムの解導出への標準基底の 構成アルゴリズムと可制御性[†]

寺 嶋 一 彦*・篠 田 克 彦**・明 石 一***

An Algorithm of Canonical Basis for Deriving Explicit Solutions of Bilinear Systems and Controllability

Kazuhiko TERASHIMA*, Katsuhiko SHINODA** and Hajime AKASHI***

This paper derives an explicit solution of bilinear systems from the work of Wei and Norman about the solutions of homogeneous linear differential equations. This solution is based on the canonical basis of the Lie algebras spanned by the coefficient matrices, which are supposed to be solvable. The main achievement of this paper is an algorithm to compute these canonical basis.

The explicit solution then follows directly by a standard procedure from the results of Wei and Norman. The solution of bilinear systems is applied to the controllability of bilinear systems.

Key Words: bilinear systems, explicit solution, canonical basis, Lie algebra, controllability.

1. 緒 言

双線形システム方程式の解は、時変係線形システム方程式と同様に、遷移行列¹⁾を用いて形式的に解を表現することができる。しかし、一般に遷移行列を求めることは難しいので、遷移行列の解析解をえようとすれば、ある制約のもので求めることが多い²⁾。遷移行列、すなわち、時変係斉次行列微分方程式の解析解の

導出には、Lie 代数の概念を用いたものが有力である^{3)~5)}。

たとえば、Willsky³⁾等は、システム行列から生成される Lie 代数が、可解のとき、Lie の定理により、すべてのシステム行列を下三角（あるいは上三角）にさせる相似変換行列が存在する事実にもとづき、微分方程式の解を上から順に逐次求めることができることを示している。しかし相似変換行列をみつめることは難しく、またこの方法では、解を構成できることを保証しているだけで、具体的な形で与えていない。

また、Wei-Norman^{4),5)}は、Lie 代数が可解のとき、標準基底（基底の順序付け）を用いて、微分方程式の解を、行列指数関数の有限個の積という簡潔な形で与えている。著者等も、Wei-Norman の手法を、確率システムに適用し、同様の解を求めている^{6),7)}。しかし、実際重要な役割を果たす標準基底の具体的な決定法については、今までのところ明らかにされていない。先の相似変換行列を求めるのと同様、解析解を導出するために、標準基底の構成アルゴリズムを与えることは、重要な問題である。

そこで、本論文では、システム行列より生成される Lie 代数から、標準基底を決定する具体的なアルゴリズムを導出した。そして、時変係斉次線形微分方程式の解の導出に展開した Wei-Norman の手法を、双線形システム方程式に適用し解析解を求めた。さらに、得られた解を用いて、双線形システムの可制御性の条件を求めた。本論文で得た可制御性の結果は、Hirschorn^{8),9)}が求めた可制御性の結果を適用できない、すなわち、chain 条件をみたさないクラスに対しても適用できるものである。

なお、本論文では、行列は大文字で、ベクトル、スカラーは小文字で、“/” はマトリクスやベクトルの転置

† 第 21 回 SICE 学術講演会で発表 (昭57・7)

* 豊橋技術科学大学工学部

豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1

** 三菱重工業(株)長崎造船所 長崎市飽野浦町 1-1

*** 摂南大学工学部 寝屋川市池田中町 17-8

* Faculty of Engineering, Toyohashi University of Technology, Toyohashi

** Nagasaki Shipyard, Mitsubishi Heavy Industry, Nagasaki

*** Faculty of Engineering, Setsunan University, Neyagawa

(Received September 17, 1984)

(Revised December 25, 1984)

を表わす。また、 $A's \equiv \{A_1, \dots, A_l\}$, $B's \equiv \{B_1, \dots, B_m\}$ と定義し、 $\{A's, B's\}_{LS}$ は $\{A's, B's\}$ によって張られる線形空間を表わす。 $\{A's, B's\}$ から、 $[A, B] = AB - BA$ により定義される Lie 演算によって閉じる代数を Lie 代数⁴⁾ と言い、 $\mathcal{L}(A's, B's)$ と表わす。

2. 問題の記述

以下で記述される双線形システムを考える。

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)B_i x(t) + Fv(t), \quad x(t_0) = x. \quad (1)$$

ただし、 $A(t) = \sum_{i=1}^l a_i(t)A_i$ であり、 $a_i(t)$ は $i=1, \dots, l$ に対して一次独立なそれぞれ有界なスカラ時間関数で、 A_i は $n \times n$ 定数行列である。 $x(t)$ は n 次元状態ベクトル、 B_i は $n \times n$ 定数行列、 F は $n \times q$ ($q < n$) 定数行列である。乗法入力 $u_i(t)$ ($i=1, \dots, m$; $m < n$) は $[0, \infty)$ から R^1 への連続スカラ入力、加法入力 $v(t)$ は $[0, \infty)$ から R^q への q 次元連続入力ベクトル値関数で、 $u_i(t)$ と $v(t)$ は独立である。

本論文の主要結果が適用できるための条件である、“Lie 代数が可解”の定義と、その時の重要な性質を補題としてあげる。

[定義 1]^{4), 10)} Lie 代数 $\mathcal{L}$ によって生成される導来列 $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}] = [A, B] | A, B \in \mathcal{L}^{(k-1)} \}$ ($k=1, 2, \dots$) において、もしある整数 $k(\geq 1)$ に対して、 $\mathcal{L}^{(k)} = \{0\}$ ならば、 $\mathcal{L}$ は可解という。もし、 $\mathcal{L}^{(1)} = \{0\}$ ならば、 $\mathcal{L}$ は可換という。

[補題 1]^{5), 10)} $\mathcal{L}$ を可解 Lie 代数とすると、 $\mathcal{L}$ の基底 $\{C_1, \dots, C_N\}$ において基底変換を適当におこなうことによって $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_N\}$ の張る $\mathcal{L}$ の部分空間 $\mathcal{L}_k$ ($k=1, 2, \dots, N$) が $\mathcal{L}$ のイデアルであるようにとることができる。すなわち、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \dots \supset \mathcal{L}_N$ となるような $\mathcal{L}$ のイデアル $\mathcal{L}_k$ が存在する¹⁰⁾。したがって $[\tilde{C}_i, \tilde{C}_j] \in \mathcal{L}_i$ ($i \geq j$) となり、

$$[\tilde{C}_i, \tilde{C}_j] = \sum_{k=i}^N \gamma_{ij}^k \tilde{C}_k \quad (i \geq j) \quad (2)$$

と書ける。(参考文献[5]; pp. 331. 定理 2) ここで、 γ_{ij}^k は構造定数と呼ばれ、(2)式を満たす $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_N\}$ を本論文では、標準基底と呼ぶことにする。

補題 1 は、Lie の定理から導かれ、証明は文献[10]に譲る。

可制御性の定義は、線形理論における完全可制御性の定義¹⁾を用いるが、念のため以下に記す。

[定義 2] 初期時刻 t_0 での初期状態を $x_0 \in R^n$ と表わすとき、 (t_0, x_0) を $(t_f, 0)$ にする入力を与える時刻

$t_f < \infty$ が存在するときは、単に x_0 は t_0 で可制御という。すべての状態が t_0 で可制御のとき、システムは、 t_0 で完全可制御という。

3. 標準基底の構成アルゴリズム

システム行列 $\{A_1, \dots, A_l, B_1, \dots, B_m\}$ より、Lie 演算 $[X, Y] \triangleq XY - YX$ のもとで閉じるように生成された Lie 代数 $\mathcal{L}(A's, B's)$ の基底を $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ とする。(1)式の解を与えるのに重要な役割をはたす標準基底を $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_N\}$ と表わすとき、それらを補題 1 に基づき、 $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ から構成するアルゴリズムを以下に与える。

[Step 1]

補題 1 により、 $\mathcal{L} = \{C_1, \dots, C_N\}_{LS}$ の一次元部分空間 $\mathcal{L}_N$ を、 $\mathcal{L}$ のイデアル、すなわち、 $[\mathcal{L}, \mathcal{L}_N] \in \mathcal{L}_N$ であるようにとることができる。そこで、 $\mathcal{L}_N$ の基底を $\tilde{C}_N$ とし、それに対して $\tilde{C}_N = \sum_{j=1}^N \alpha_N^j C_j$ なる一次変換を用い、 $\mathcal{L}_N$ が $\mathcal{L}$ のイデアルであることにより、

$$[C_i, \tilde{C}_N] = \lambda_N^{(i)} \tilde{C}_N \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

が成立するように、 α_N^j ($j=1, \dots, N$) を決める。ただし、 $\lambda_N^{(i)}$, α_N^j はスカラ複素数である。よって、 $[C_i, \tilde{C}_N] = \sum_{j=1}^N \alpha_N^j [C_i, C_j] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_N^j \gamma_{ij}^k C_k = \sum_{k=1}^N \lambda_N^{(i)} \alpha_N^k C_k$ となり、また、 $C_1, \dots, C_N$ は一次独立より、

$$\Gamma^{(i)} \alpha_N = \lambda_N^{(i)} \alpha_N \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

が成り立つ。ただし、 $\Gamma_{kj}^{(i)} = \gamma_{ij}^k$, $\alpha_N = (\alpha_N^1, \dots, \alpha_N^N)$ を表わす。したがって、 α_N^j を求める問題は、(4)式で表わされる固有値問題となる。(4)式は Lie の定理を等価に変換して導出したものであるから必ず(4)式を満たす共通な α_N は存在する。ただし、一意性は保証されない。(4)式より α_N^j ($j=1, \dots, N$) が決まり、 $\tilde{C}_N$ が求まる。

[Step 2]

$\mathcal{L}$ の次元は N より、 $\{B_1, \dots, B_{N-1}, \tilde{C}\}$ も $\mathcal{L}$ の基底となる。 B_i ($i=1, \dots, N-1$) は、 $\{B_1, \dots, B_{N-1}, \tilde{C}_N\}_{LS} = \{C_1, \dots, C_N\}_{LS}$ となるように、 C_i の添字を適当に並べかえたものである。補題 1 により、 $\mathcal{L}$ の二次元部分空間 $\mathcal{L}_{N-2}$ を $\mathcal{L}$ のイデアル、すなわち、 $[\mathcal{L}_{N-2}, \mathcal{L}] \in \mathcal{L}_{N-2}$ のようにとることができる。そこで、 $\mathcal{L}_{N-2}$ の基底を、 $\mathcal{L}_{N-2} = \{\tilde{C}_{N-1}, \tilde{C}_N\}_{LS}$ とし、 $\tilde{C}_{N-1} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j B_j$ なる一次変換を用い、また $\mathcal{L}_{N-2}$ が $\mathcal{L}$ のイデアルであることにより、

$$[B_i, \tilde{C}_{N-1}] = \sum_{k=N-1}^N \tilde{\lambda}_k^{(i)} \tilde{C}_k \quad (i=1, \dots, N-1) \quad (5)$$

となるように α_{N-1}^j ($j=1, \dots, N-1$) を決める。す

なわち,

$$[B_i, \tilde{C}_{N-1}] = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j \tilde{\gamma}_{ij}^k B_k \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j \tilde{\gamma}_{ij}^N \tilde{C}_N = \tilde{\lambda}_{N-1}^{(i)} \tilde{C}_{N-1} + \tilde{\lambda}_N^{(i)} \tilde{C}_N$$

ここで, $\tilde{C}_{N-1} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j B_j$ を用いて上式を整理すると,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j \tilde{\gamma}_{ij}^k - \tilde{\lambda}_{N-1}^{(i)} \alpha_{N-1}^k \right) B_k \\ + \left(\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j \tilde{\gamma}_{ij}^N - \tilde{\lambda}_N^{(i)} \right) \tilde{C}_N = 0 \quad (6)$$

ここで, $B_1, \dots, B_{N-1}, \tilde{C}_N$ が一次独立であることを用いると,

$$\tilde{F}^{(i)} \alpha_{N-1} = \lambda_{N-1}^{(i)} \alpha_{N-1} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (7)$$

および,

$$\tilde{\lambda}_N^{(i)} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{N-1}^j \tilde{\gamma}_{ij}^N \quad (i=1, \dots, N-1) \quad (8)$$

が導かれる。ただし, $\tilde{F}_{kj}^{(i)} = \tilde{\gamma}_{ij}^k$, $\alpha_{N-1} = (\alpha_{N-1}^1, \dots, \alpha_{N-1}^{N-1})'$ である。なお, (8) 式の $\tilde{\lambda}_N^{(i)}$ は, (7) 式で $\alpha_{N-1} = (\alpha_{N-1}^1, \dots, \alpha_{N-1}^{N-1})'$ が求まれば決まる。したがって, α_{N-1}^j を求める問題は, (7) 式で与えられる固有値問題となる。(7) 式より α_{N-1}^j が求まり, $\tilde{C}_{N-1}$ が決まる。

以下, Step 2 の手続きの繰り返しによって, $\tilde{C}_{N-2}, \dots, \tilde{C}_2, \tilde{C}_1$ を順次構成することができる。

なお, 本節のアルゴリズムの具体的な適用については, 6 節の例 1 で詳細に記す。

4. 双線形システムの基本解

(1) 式の解は, 遷移行列 $\Phi(t, t_0)$ を用いて,

$$x(t) = \Phi_u(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_u(t, s) F v(s) ds, \quad (9)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

と書くことができる。ここで, $\Phi_u(t, t_0)$ は (1) 式の基本解 $X_u(t)$ を用いて $\Phi_u(t, s) = X_u(t) X_u^{-1}(s)$ と表わすことができる¹⁾。ただし, (1) 式の基本解 $X_u(t)$ は次式を満たす。

$$\dot{X}_u(t) = \left(\sum_{i=1}^l a_i(t) A_i + \sum_{i=1}^m u_i(t) B_i \right) X_u(t), \quad (10) \\ X_u(t_0) = I.$$

よって, (10) 式の解析解がわかれば, (9) 式の形式解は具体的な解となる。

本節では, (10) 式の解 $X_u(t)$ を Wei-Norman の手法にしたがって求める。そのためつぎの準備を必要とする。

(10) 式のシステム行列, $A's, B's$ より生成された

Lie 代数 $\mathcal{L}(A's, B's)$ のひとつの基底集合を $\{C_1, \dots, C_N\}$ とする。なお本論文では, Lie 代数が可解であるクラスに限って議論を進める。Lie 代数が可解のとき, すでに述べたように, (2) 式をみたす標準基底が存在し, それを $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_N\}$ と表わす。なお実際問題においては, 3 節の構成法によって標準基底を求める。そのとき, システム行列はつぎのように表わすことができる。

$$A_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tilde{C}_j, \quad B_i = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \tilde{C}_j \quad (11)$$

ただし, α_{ij}, β_{ij} はスカラー定数で, N は Lie 代数 $\mathcal{L}(A's, B's)$ の次元である。(11) 式を (10) 式に代入すると,

$$\dot{X}_u(t) = \left(\sum_{j=1}^N w_j(t) \tilde{C}_j \right) X_u(t), \quad X_u(t_0) = I \quad (12)$$

ただし,

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^l \alpha_{ij} a_i(t) + \sum_{i=1}^m \beta_{ij} u_i(t) \quad (13)$$

である。

さてそこで, (12) 式は Wei-Norman が考えたモデルと同形であるので, Wei-Norman^{4), 5)} が展開した方法に従って (10) 式 (あるいは (12) 式) の基本解を求めると, つぎのようになる。

《定理 1》 (10) 式のシステム行列から生成される Lie 代数 $\mathcal{L}(A's, B's)$ が可解ならば, そのとき, (10) 式で記述される方程式の解はつぎのようになる。

$$X_u(t) = \prod_{i=1}^N (\exp \{g_i(t) \tilde{C}_i\}) \quad (14)$$

ただし, $\tilde{C}_i$ は $\mathcal{L}(A's, B's)$ の標準基底, $g_i(t)$ はスカラー時間関数である。また, $g_1(t_0) = \dots = g_N(t_0) = 0$ である。

証明は, Wei-Norman の論文 (文献[4]の pp. 577 と[5]の定理 2 の証明) にしたがってできるが, $g_i(t)$ の求め方を示すために, 付録に略記する。

5. 双線形システムの可制御性

時変係線形システムの可制御性については, 入力を含まない遷移行列 $\Phi(t, t_0)$ を用いて, 行列 $\Phi(t_0, s)F$ の n 個の行ベクトルが $[t_0, t]$ 間で, 線形一次独立であるとき, システムは t_0 で完全可制御であるという必要十分条件が明らかにされている¹⁾。したがって, $\Phi(t_0, s)F = X(t_0)X^{-1}(s)F = X^{-1}(s)F$ より, $X^{-1}(s)$ すなわち基本解 $X(s)$ が求まれば, 可制御性を判定できることがわかる。

そこで, (1) 式で記述される双線形システムの可制御性に対しても, 基本解 $X_u(t)$ を求めたので, 入力

$u_i(t)$ ($i=1, \dots, m$) にだけ注意すれば, 時変系の結果を適用することができ, 以下の結果を与える.

【定理 2】 $\mathcal{L}(A's, B's)$ が可解であるとする. そのとき, $n \times m$ 行列

$$X_n^{-1}(t)F = \left(\prod_{i=N}^1 \exp\{-g_i(t)\tilde{C}_i\} \right) F \quad (15)$$

の n 個の行ベクトルが, $[t_0, t_2]$ 上のある制御入力, $\{u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)\}$ に対して, 線形一次独立となるような有限時間 $t_2(>t_0)$ が存在するときのみ, (1) 式で記述されるシステムは, 時刻 t_0 で完全可制御である.

(証明は, 時変系理論の結果¹⁾より明らかなので省略する.)

定理 2 の一次独立性の検証は複雑であるので, つぎに実用的な十分条件を与える.

【定理 3】 $\mathcal{L}(A's, B's)$ が可解であるとする. そのとき, ある制御入力 $\{u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)\}$ に対して,

$$\text{rank}[Q(t_1), Q^{(1)}(t_1), \dots, Q^{(n-1)}(t_1)] = n \quad (16)$$

であるような, 時刻 t_1 ($t_1 \in [t_0, \infty)$) が存在するならば, (1) 式で記述されるシステムは, 時刻 t_0 で完全可制御である. ただし, $Q^{(k)}(t_1)$ は $Q(t_1)$ の k 階微分を表わし, $Q(t_1)$ は次式で表わされる.

$$Q(t_1) = \left(\sum_{i=N}^1 \exp\{-g_i(t_1)\tilde{C}_i\} \right) F. \quad (17)$$

(証明は, 時変系理論の結果¹⁾より明らかなので省略する.)

(注意 1) (1) 式で, 加法入力, 乗法入力と同じである, すなわち,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)B_i x(t) + Fu(t) \quad (18)$$

ただし, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]'$ である一般的な双線形システム¹¹⁾の可制御性に対しては, 本論文でえた可制御性の定理 2, 3 の内容を改めなければならない.

すなわち, 「ある制御入力 $\{u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)\}$ に対して」という表現を, 「すべての制御入力 $\{u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)\}$ に対して」に改める. (理由は, (1) 式の場合は, 乗法入力に制約をつけても加法入力には何ら関係がなかったが, (18) 式の場合は, 加法入力にも制約をつけることになり制御を保証できなくなることによる.) しかし, この場合は, 定理 3 において, 判定条件をみたまシステムは少なく実用的でない (例題 1 参照).

6. 例 題

本論文で得られた結果を用いて以下の例題の可制御性を考える.

【例題 1】 つぎのシステムの可制御性を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i(t)A_i x + \sum_{i=1}^2 u_i(t)B_i x \\ &+ Fv(t), x(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (19)$$

ただし, $\alpha_1(t)=t$, $\alpha_2(t)=1$, $v(t)=[v_1(t), v_2(t)]'$ であり,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $C_1 \triangleq A_1$, $C_2 \triangleq A_2$, $C_3 \triangleq B_1$, $C_4 \triangleq B_2$ と定義すると, $[C_1, C_2]=0$, $[C_1, C_3]=C_3$, $[C_1, C_4]=C_4$, $[C_2, C_3]=C_4$, $[C_2, C_4]=C_3$, $[C_3, C_4]=0$. よって $\mathcal{L}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ LS. $\mathcal{L}^{(1)} = \{C_3, C_4\}$, $\mathcal{L}^{(2)} = \{0\}$ なので, Lie 代数 $\mathcal{L}$ は可解である. しかし, $[C_2, C_4]=C_3$ なので $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ は標準基底でない.

(i) 標準基底の決定

【Step 1】 $\tilde{C}_4$ を $\tilde{C}_4 = \sum_{j=1}^4 \alpha_j C_j$ とおく. (3) 式にしたがって, $[C_1, \tilde{C}_4] = \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 = \lambda_4^{(1)} \tilde{C}_4$, $[C_2, \tilde{C}_4] = \alpha_3 C_4 + \alpha_4 C_3 = \lambda_4^{(2)} \tilde{C}_4$, $[C_3, \tilde{C}_4] = -\alpha_4 C_3 - \alpha_3 C_4 = \lambda_4^{(3)} \tilde{C}_4$, $[C_4, \tilde{C}_4] = -\alpha_4 C_4 - \alpha_3 C_3 = \lambda_4^{(4)} \tilde{C}_4$. $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ は線形一次独立なので, (4) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix} &= \lambda_4^{(1)} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix} &= \lambda_4^{(2)} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix} &= \lambda_4^{(3)} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix} &= \lambda_4^{(4)} \begin{bmatrix} \alpha_4^1 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_4^3 \\ \alpha_4^4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって, $\lambda_4^{(1)} = \lambda_4^{(2)} = 1$, $\lambda_4^{(3)} = \lambda_4^{(4)} = 0$, $\alpha_4^1 = 0$, $\alpha_4^2 = 0$, $\alpha_4^3 = 1$, $\alpha_4^4 = 1$. したがって, $\tilde{C}_4 = C_3 + C_4$.
【Step 2】 $\mathcal{L} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ LS = $\{C_1, C_2, C_3, \tilde{C}_4\}$

C_3+C_4 LS なので, $\tilde{C}_3=\sum_{j=1}^3\alpha_3^jC_j$ とおく. (5)式にしたがって, $[C_1, \tilde{C}_3]=\alpha_3^3C_3=\tilde{\lambda}_3^{(1)}\times\sum_{j=1}^3\alpha_3^jC_j+\tilde{\lambda}_4^{(1)}\tilde{C}_4$. $[C_2, \tilde{C}_3]=\alpha_3^3C_4=-\alpha_3^3C_3+\alpha_3^3\tilde{C}_4=\tilde{\lambda}_3^{(2)}\sum_{j=1}^3\alpha_3^jC_j+\tilde{\lambda}_4^{(2)}\tilde{C}_4$. $[C_3, \tilde{C}_3]=(\alpha_3^2-\alpha_3^1)C_3-\alpha_3^2\tilde{C}_4=\tilde{\lambda}_3^{(3)}\sum_{j=1}^3\alpha_3^jC_j+\tilde{\lambda}_4^{(3)}\tilde{C}_4$. よって Step 1 と同様に固有値問題をとくと, $\tilde{\lambda}_3^{(1)}=1$, $\tilde{\lambda}_3^{(2)}=-1$, $\tilde{\lambda}_3^{(3)}=0$, $\alpha_3^1=\alpha_3^2=0$, $\alpha_3^3=1$. よって $\tilde{C}_3=C_3$. (8)式にしたがって, $\tilde{\lambda}_4^{(1)}=0$, $\tilde{\lambda}_4^{(2)}=1$, $\tilde{\lambda}_4^{(3)}=0$.

[Step 3] $\mathcal{L}=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ LS $=\{C_1, C_2, \tilde{C}_3=C_3, \tilde{C}_4=C_3+C_4\}$ LS より, $\tilde{C}_2=\sum_{j=1}^2\alpha_2^jC_j$ とおく. そのとき, $[C_1, \tilde{C}_2]=0$, $[C_2, \tilde{C}_2]=0$. よって $\tilde{C}_2=C_2$, $\tilde{C}_1=C_1$ である. したがって $\mathcal{L}=\{\tilde{C}_1=C_1, \tilde{C}_2=C_2, \tilde{C}_3=C_3, \tilde{C}_4=C_3+C_4\}$ LS である. $[\tilde{C}_1, \tilde{C}_2]=0$, $[\tilde{C}_1, \tilde{C}_3]=\tilde{C}_3$, $[\tilde{C}_1, \tilde{C}_4]=\tilde{C}_4$, $[\tilde{C}_2, \tilde{C}_3]=\tilde{C}_4-\tilde{C}_3$, $[\tilde{C}_2, \tilde{C}_4]=\tilde{C}_4$, $[\tilde{C}_3, \tilde{C}_4]=0$ なので, 確かに $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4\}$ は標準基底である.

(ii) 基本解の導出

標準基底を用いると, (19)式の基本解を満たす方程式はつぎのようになる.

$$\dot{X}_u(t)=\left(\sum_{i=1}^4w_i(t)\tilde{C}_i\right)X_u(t), X_u(t_0)=I \quad (20)$$

ただし, $w_1(t)=a_1(t)$, $w_2(t)=a_2(t)$, $w_3(t)=u_1(t)-u_2(t)$, $w_4(t)=u_2(t)$ である. (20)式の基本解は定理 1 より,

$$X_u(t)=\sum_{i=1}^4\exp\{g_1(t)\tilde{C}_i\}.$$

$g_1\sim g_4$ はつぎのように求まる. 付録(A.5)式に従い,

$$(a) \quad i=1: \tilde{C}_1=\sum_{k=1}^4\phi_{1k}\tilde{C}_k$$

$$\therefore \phi_{11}=1, \phi_{12}=\phi_{13}=\phi_{14}=0.$$

$$(b) \quad i=2: (\exp\{g_1 \text{ ad } \tilde{C}_1\})\tilde{C}_2=\tilde{C}_2+g_1[\tilde{C}_1, \tilde{C}_2]$$

$$+\frac{g_1^2}{2}[\tilde{C}_1, [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2]]+\cdots=\tilde{C}_2$$

$$=\sum_{k=2}^4\phi_{2k}\tilde{C}_k \quad \therefore \phi_{22}=1, \phi_{23}=\phi_{24}=0$$

$$(c) \quad i=3: (\exp\{g_1 \text{ ad } \tilde{C}_1\})(\exp\{g_2 \text{ ad } \tilde{C}_2\})\tilde{C}_3$$

$$=(\exp\{g_1 \text{ ad } \tilde{C}_1\})\{C_3+g_2[\tilde{C}_2, \tilde{C}_3]+\cdots\}$$

$$=(\exp\{g_1 \text{ ad } \tilde{C}_1\})\left\{e^{-g_2}\tilde{C}_3+\frac{1}{2}(e^{g_1}-e^{-g_2})\tilde{C}_4\right\}$$

$$=e^{g_1-g_2}\tilde{C}_3+\frac{1}{2}(e^{g_1+g_2}-e^{g_1-g_2})\tilde{C}_4$$

$$=\sum_{k=3}^4\phi_{3k}\tilde{C}_k$$

$$\therefore \phi_{33}=e^{g_1-g_2}, \phi_{34}=\frac{1}{2}(e^{g_1+g_2}-e^{g_1-g_2})$$

$$(d) \quad i=4: \text{同様に}$$

$$(\exp\{g_1 \text{ ad } \tilde{C}_1\})(\exp\{g_2 \text{ ad } \tilde{C}_2\})(\exp\{g_3 \text{ ad } \tilde{C}_3\})\tilde{C}_4$$

$$=e^{g_1+g_2}\tilde{C}_4=\sum_{k=4}^4\phi_{4k}\tilde{C}_k \quad \therefore \phi_{44}=e^{g_1+g_2}$$

したがって, (A.9)式により

$$\dot{g}_1=t, \dot{g}_2=1, \dot{g}_3=e^{-g_1+g_2}(u_1-u_2)$$

$$\dot{g}_4=\frac{1}{2}(e^{-g_1-g_2}-e^{-g_1+g_2})(u_1-u_2)+e^{-g_1-g_2}u_2$$

となり, $g_1\sim g_4$ は, g_1 から順に求積法で求まる.

(iii) 可制御性

定理 2 の (15)式によって,

$$X_u^{-1}(t)F=\begin{bmatrix} -g_3-3g_4 & \frac{1}{2}(e^{-g_1-g_2}-e^{-g_1+g_2}) \\ -2g_3-3g_4 & \frac{1}{2}(e^{-g_1-g_2}-e^{-g_1+g_2}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この場合, 三つの行ベクトルが一次独立であるかどうかは, $g_1\sim g_4$ が時間の関数であることより判定することは難しい, したがって定理 3 の十分条件により判定する.

$$Q(t_0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q^{(1)}(t_0)=\begin{bmatrix} -2u_1(t_0)-2u_2(t_0) & -a_2(t_0) \\ -2u_1(t_0)-u_2(t_0) & -a_1(t_0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である. ここで, 定理 1 より $g_1(t_0)=g_2(t_0)=g_3(t_0)=g_4(t_0)=0$ である. よって, $u_1(t_0)=u_2(t_0)$ でなければ, $\text{rank}[Q(t_0), Q^{(1)}(t_0), Q^{(2)}(t_0)]=2$ となり, このシステムは完全可制御である.

ここでもし, (18)式の加法入力 $v(t)$ が, 乗法入力と同じ $u(t)$ である双線形システムの場合には, $u_1(t_0)\neq u_2(t_0)$ という拘束が入力に生じるので, 注意 1 より可制御という判定は下せない.

[例題 2] Hirschorn が考察したつぎのシステムの可制御性を考える.

$$\dot{x}=Ax+u_1(t)B_1x+Fv(t), x(t_0)=x_0 \quad (21)$$

ただし, $u_1(t)$ はスカラー入力, 入力 $v(t)$ は $v(t)=[v_1(t), v_2(t)]'$ であり,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, $[A, B_1]\triangleq B_2$, $[A, B_2]=0$, $[B_1, B_2]=B_2$, $\mathcal{L}(A, B_1)=\{A, B_1, B_2\}$ LS. $\mathcal{L}^{(1)}=\{B_2\}$, $\mathcal{L}^{(2)}=\{0\}$ より, $\mathcal{L}$ は可解. 一方, chain 条件²⁾を調べる. $\mathcal{B}=\{B_1\}_{\text{LA}}=\{B_1\}$, $\mathcal{G}=\{\mathcal{B}$ によって $\mathcal{L}$ の中で生成されるイデアル $\}=\{B_1, B_2\}$. また $[B_1, B_2]=B_2$ より $[\mathcal{B}, \mathcal{G}]\not\subset \mathcal{B}$. したがって chain 条件は満たされず, Hirschorn の可制御性の結果は適用できない (文献 [8]; pp. 945),

先の Lie 演算より, $\{\tilde{C}_1\triangleq A, \tilde{C}_2\triangleq B_1, \tilde{C}_3\triangleq B_2\}$ は標準基底である. よってこの標準基底を用いて, (21)式の基本解は次式をみだす.

$$\dot{X}_u(t) = \left(\sum_{i=1}^3 w_i(t) \tilde{C}_i \right) X_u(t), \quad X_u(t_0) = I$$

ここで, $w_1(t)=1$, $w_2(t)=u_1(t)$, $w_3(t)=0$ である. 定理1を用いて基本解を求め, 定理2を適用すると,

$$X_u^{-1}(s)F = \left(\sum_{i=1}^3 \exp\{-g_i(t)\tilde{C}_i\} \right) F \\ = \begin{bmatrix} 0 & e^{-g_3} \\ g_1 e^{-g_2} - g_3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ただし, 例題1と同様の手続きで $g_1 \sim g_3$ は次式となる.

$$\dot{g}_1(t)=1, \quad \dot{g}_2(t)=u_1(t), \quad \dot{g}_3(t)=-g_1(t)e^{-g_2(t)}u_1(t).$$

例題1と同様, この形から可制御性を判定することは難しいので, 定理3を用いると,

$$Q(s) = X_u^{-1}(s)F, \quad Q^{(1)}(s) \\ = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{g}_3 e^{-g_2} \\ \dot{g}_1 e^{-g_1} - g_1 \dot{g}_2 e^{-g_2} - \dot{g}_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって,

$$\text{rank}[Q(t_0), Q^{(1)}(t_0), Q^{(2)}(t_0)] \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} = 3$$

となり, (21)式のシステムは完全可制御である.

ここで, 上のランク条件は, 入力 u に依存していないので, システム(30)式の加法入力 $v(t)$ が $u(t)=[u_1(t), u_2(t)]'$ である一般的な双線形システムに対しても, 注意1により可制御となる.

[例題3] つぎのシステムを考える.

$$\dot{x} = Ax + u(t)Bx + f u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (22)$$

ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$[A, B]=0$, $\mathcal{L}(A, B)=\{A, B\}_{\text{LS}}$. $\mathcal{L}^{(1)}=[\mathcal{L}, \mathcal{L}]=0$ より $\mathcal{L}$ は可換, (22)式の基本解 $X_u(t)$ は可換より容易に求まり,

$$X_u(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos \alpha(t) & -e^{-t} \sin \alpha(t) \\ e^{-t} \sin \alpha(t) & e^{-t} \cos \alpha(t) \end{bmatrix}$$

ただし, $\alpha(t) = \int_0^t u(s)ds$ である. 定理2に従い,

$$X_u^{-1}(t)f = \begin{bmatrix} e^t \cos \alpha(t) + e^t \sin \alpha(t) \\ -e^t \sin \alpha(t) + e^t \cos \alpha(t) \end{bmatrix}$$

である. この行ベクトルは, 恒等的に $u(s)=0(0 \leq s \leq t)$ でないすべての入力に対して一次独立であることは容易にわかるから, (22)式のシステムは完全可制御である.

ところで, (22)式で $B=[0]$ である線形時不変シ

ステムでは, $\text{rank}[f, Af]=1$ より不可制御である. (22)式は, $u(t)Bx$ の双線形項が加入することで可制御となった.

7. 結 言

本論文の主な貢献はつぎの通りである.

- (i) 標準基底の構成アルゴリズムを導出した.
- (ii) 時変係斉次線形微分方程式の解に対して, Wei-Norman が提案した方法を, (1)式の双線形システムに適用し, 解析解をえた.
- (iii) (1)式で記述される双線形システムの可制御条件を解析的に計算できる形で与えた. また, Hirschorn の結果が適用できない, すなわち chain 条件をみたさないクラスにも本手法は適用できることを示した. さらに, 本論文でえた可制御性の結果は, 加法入力と乗法入力と同じである一般的な双線形システム(18)式に対しても, 定理の表現を少しかえることによって適用できるが, その十分条件は制約が強いのであまり実用的でない.

なお, Lie 代数が可解でない場合は, g_i を求積法で求めることは一般には難しいが, ひとつの方法として Lie 代数の分解を用いる方法があり, 定理の表現をえる可能性はある. 詳しくは, 文献[6]を参照されたい. また時間遅れをもつ双線形システムの解と可制御性については, 文献[12]を参照されたい.

最後に, 有益な御指摘, 御助言を頂いた査読者の方々に感謝いたします.

参 考 文 献

- 1) C.T. Chen: Introduction to Linear System Theory, Holt Reinhart Winston (1970)
- 2) Min-Yen Wu: Solution of Certain Classes of Linear Time-Varying Systems, International J. of Control, **31**-1, 11/20 (1980)
- 3) A.S. Willsky, S.I. Marcus and D.N. Martin: On the Stochastic Stability of Linear Systems Containing Colored Multiplicative Noise, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20**, 711/713 (1975)
- 4) J. Wei and E. Norman: Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations, J. Math. Phys., **4**-4, 575/581 (1963)
- 5) J. Wei and E. Norman: On Global Representations of the Solutions of Linear Differential Equations as a Product of Exponentials, Proc. Amer. Math. Soc., **15**, 327/334 (1964)
- 6) K. Terashima and H. Akashi: Decomposition and Stability of Linear Systems with Multiplicative Noise, IFAC 8th Triennial World Congress Preprints, Aug., Kyoto, **II**, 26/31 (1981); Automatica, **20**-6, 773/785 (1984)
- 7) 砂原善文, 大住 晃, 寺嶋一彦: 線形確率システム方程式の解表現とその確率1の安定性, システムと制御, **25**-

- 12769/777 (1981)
- 8) R. Hirschorn: Topological Semigroups, Sets of Generators, and Controllability, Duke Math. J., **40**, 937/947 (1973)
- 9) R. Hirschorn: Controllability in Nonlinear Systems, J. Diff. Eq., **19**, 46/61 (1975)
- 10) 松島与三: リー環論, 共立出版 (1978)
- 11) R. R. Mohler: Bilinear Control Process with Applications to Engineering, Ecology and Medicine, Academic Press, New York (1973)
- 12) 寺嶋一彦, 山口 直, 明石 一: 状態に時間遅れをもつ双線形システムの可制御性, システムと制御, **28-3**, 194/202 (1984)

《付録》 (定理 1 の証明)

(10) 式 (あるいは (12) 式) の解を (14) 式のように仮定する. (14) 式を時間 t について微分すると,

$$\dot{X}_u(t) = \sum_{i=1}^N \dot{g}_i \left(\prod_{j=1}^{i-1} \exp \{g_j \tilde{C}_j\} \right) \tilde{C}_i \left(\sum_{j=i}^1 \exp \{g_j \tilde{C}_j\} \right) \quad (\text{A. 1})$$

ただし, $\dot{g}_i$ はことわりのない限り $\dot{g}_i(t)$ を意味する. そこで, (A. 1) 式の両辺に右から, $X_u^{-1}(t)$ をかけると, (A. 1) 式はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \dot{X}_u(t) X_u^{-1}(s) \\ = \sum_{i=1}^N \dot{g}_i \left(\prod_{j=1}^{i-1} \exp \{g_j \tilde{C}_j\} \right) \tilde{C}_i \left(\sum_{j=i-1}^1 \exp \{-g_j \tilde{C}_j\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

ここで, Baker-Hansdorff の公式^{4),7)}を紹介する.

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \exp \{g_j \tilde{C}_j\} \right) \tilde{C}_i \left(\sum_{j=i-1}^1 \exp \{-g_j \tilde{C}_j\} \right) \\ = \left(\prod_{j=1}^{i-1} \exp \{g_j \text{ad } \tilde{C}_j\} \right) \tilde{C}_i \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

ただし, $\text{ad } A^0 B = B$, $\text{ad } A^k B = [A, \text{ad } A^{k-1} B]$ ($k=1, 2, \dots$) であり,

$$(\exp \{\text{ad } A\}) B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{ad } A^k B \quad (\text{A. 4})$$

と定義される. また (A. 3) 式は, $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_N\}$ が標準

基底であるためつぎのようになる.

$$\left(\prod_{j=1}^{i-1} \exp \{g_j \text{ad } \tilde{C}_j\} \right) \tilde{C}_i = \sum_{k=i}^N \phi_{ik}(t) \tilde{C}_k \quad (\text{A. 5})$$

ただし, $\phi_{ik}(t)$ はスカラー時間関数である. これは, (A. 4) 式の定義式によって, (A. 5) 式の左辺を計算し, (2) 式の関係を用いると (A. 5) 式がえられる.

したがって, (A. 2) 式に, (A. 3), (A. 5) 式を用いれば, 次式がえられる.

$$\dot{X}_u(t) X_u^{-1}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=i}^N \dot{g}_i \phi_{ik}(t) \tilde{C}_k \quad (\text{A. 6})$$

一方, (12) 式より,

$$\dot{X}_u(t) X_u^{-1}(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j(t) \tilde{C}_j \quad (\text{A. 7})$$

(A. 6) 式と (A. 7) 式を等置し, $\tilde{C}_k$ ($k=1, \dots, N$) の線形一次独立性によりつぎの方程式がえられる.

$$\omega(t) = \Phi(t)' g(t) \quad (\text{A. 8})$$

ただし, $\omega(t) = [\omega_1(t), \dots, \omega_N(t)]'$, $g(t) = [g_1(t), \dots, g_N(t)]'$, $[\Phi(t)]_{ij} = \phi_{ij}$ ($\phi_{ij} = 0$; $i > j$).

Lie 代数が可解ならば, $0 \leq t < \infty$ に対して, (A. 8) 式の右辺の行列 $\Phi(t)'$ の逆行列の存在は保証されるから (証明は, 文献 [7] の pp. 777 をみよ), $\Phi(t)'$ の逆行列を $\Psi(t)$ とすれば, (A. 8) 式から,

$$g(t) = \Psi(t) \omega(t) \quad (\text{A. 9})$$

がえられる. ただし, $[\Psi(t)]_{ij} = \psi_{ij}(t)$ ($\psi_{ij}(t) = 0$; $i < j$).

ところで, (A. 9) 式右辺の行列 $\Psi(t)$ の P 行目 ($P=1, \dots, N$) の要素は, Lie 代数が可解ならば, $g_1, \dots, g_{P-1}$ の関数となるから (証明は, 文献 [7] の pp. 777 をみよ), g_i ($i=1, \dots, N$) は, (A. 9) 式によって順番に求積法によって一意的に求まる. なお, $g_1(t_0) = \dots = g_N(t_0) = 0$ は, (12), (14) 式から自明である.

したがって, (10) 式 (あるいは (12) 式) の解は, (14) 式になる. (証明終)