最適フィードフォワード補償器の一設計法[†]

竹 垣 盛 一*・松 井 敬 三**

A Design Method of Optimal Feedforward Compensator

Morikazu TAKEGAKI* and Keizo MATSUI**

In this paper, a design method of optimal feedforward compensator provided for disturbance input is proposed. Firstly, disturbance input is assumed to be uncorrelated stochastic process. The design is based on system impulse responses and consists of minimizing the mean square weighted values of outputs and control inputs. The optimal compensator, which is FIR (Finite Impulse Response) filter, is obtained by solving a normal equation. The normal equation can be solved by fast recursive order up date algorithm, so called LWR algorithm. The method is extended to the case of colored noise disturbance and step disturbance. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key Words: feedforward compensator, linear discrete system, least squares criterion, FIR filter, digital processing technique.

1. ま え が き

プラントに印加される外乱が観測可能なとき、これを制御信号として取込んでフィードフォワード制御することにより外乱の影響を効果的に抑制できる。実プラントには、たとえば火力プラントにおけるボイラ蒸気温度制御¹⁾のように、外乱信号を用いたフィードフォワード制御が制御性能向上に有効な役割を果す例は多くあり、外乱補償器の設計は実用的に重要な問題である。ところで、制御系設計理論の分野では、定常的な静特性に着目したフィードフォワード制御の設計法は確立されている²⁾が、過渡特性を考慮したものは比較的少なく、モデルマッチングによる方法³⁾、補償

器のパラメータを非線形計画法により最適化する方法³⁾、線形計画法を用いる方法⁴⁾等が提案されている。

本論文では、外乱による応答に対する最小二乗規範にもとづいたフィードフォワード補償器の一設計法について述べる。二乗規範のもとで最適な補償器を設計する問題は準自由構成 Wiener 問題⁵⁾として従来より解析的設計法^{5), 6)}の分野で研究されており、一般に Wiener-Hopf 方程式をスペクトル分解の手法を用いて解くことにより設計されていたが、ここでは補償器を FIR (Finite Impulse Response) フィルタの形で求めているため問題は簡単になり、線形連立方程式である正規方程式の求解に帰着される。この正規方程式は補償器の次数を逐次更新して高速に解くことができるため従来の数値計画法を用いた最適設計法^{3), 4)}に比べ演算処理の点でかなり有利である。最初に外乱を白色過程と想定して設計を行う。これは、全ての周波数で同一のパワーをもつ外乱を想定した設計であるが、時間領域でいえばインパルス外乱を想定したことと等価になる。つぎに、その拡張として、外乱のスペクトルを考慮した場合およびステップ外乱を想定した場合の設計について述べる。最後に簡易ボイラモデルを用いたシミュレーションにより提案した手法の有効性を示す。また、LWR 算法を用いた、正規方程式の逐次解法アルゴリズムを付録に示す。

2. 制御対象および外乱補償器の記述

Fig. 1 のようなシステムを考える。システムは、 m 出力 (y)、 n 入力 (u)、1 外乱 (w) を有する離散時刻線形定常系であり、プラントの伝達関数 $H(z)$ 、 $d(z)$ は安定とする。このとき、システムの入出力関係はつぎのように記述される。

$$y(z) = H(z)u(z) + d(z)w(z) \quad (1)$$

$$u(z) = C(z)w(z) \quad (2)$$

外乱から出力への直達分はないものとして $H(z)$ 、 $d(z)$ はインパルス応答を用いてつぎのように表現で

[†] 第 13 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 59・5)

* 三菱電機(株)中央研究所 尼崎市塚口本町 8-1-1

** 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山 1-1

* Mitsubishi Electric Corp., Amagasaki

** Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

(February 6, 1984)

(December 12, 1984)

Fig. 1 Schematic diagram of control system

きる。

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i z^{-i}, \quad d(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i z^{-i} \quad (3)$$

$H(z)$, $d(z)$ は、既にフィードバック補償された後の、制御入力-出力間、外乱-出力間の入出力関係を表わしていると考えてよい。

外乱補償器 $c(z)$ としては一般に ARMA フィルタが考えられるが、ここでは、有限のインパルス応答で切った FIR フィルタを考えるためにする。すなわち、フィルタの次数を P としたとき、 $c(z)$ は

$$c(z) = \sum_{i=0}^P c_i z^{-i} \quad (4)$$

と書ける。このとき、(1), (2) 式を出力の成分ごとに書くとつぎようになる。

$$y_j(z) = \left[\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h_j^T(i) z^{-i} \right\} \left\{ \sum_{i=0}^P c_i z^{-i} \right\} + \sum_{i=0}^{\infty} d_j(i) z^{-i} \right] w(z) \quad (j=1, \dots, m) \quad (5)$$

ただし、

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T, \quad H_i^T = [h_1(i), \dots, h_m(i)] \quad (6)$$

$$\mathbf{d}_i^T = (d_1(i), \dots, d_m(i))$$

とおいた。ここに T は行列、ベクトルの転置を示す。(5) 式は、時刻 k における第 j 番目の出力および外乱の値を $y_j(k)$, $w(k)$ とすると時間領域で次式のように表現される。

$$y_j(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \{ (\mathbf{h}_j^T(i), \dots, \mathbf{h}_j^T(i-p)) \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} + d_j(i) \} w(k-i) = \sum_{i=1}^{\infty} g_j(i) w(k-i) \quad (j=1, \dots, m) \quad (7)$$

3. 最適フィードフォワード補償器の設計

本章では、外乱 $w(k)$ を平均値 0 の白色過程とした時につぎの評価関数を最小にする $c_i (i=0, \dots, p)$ を求めることを考える。

$$J = E \left\{ \sum_{j=1}^m q_j y_j^2(k) + \mathbf{u}^T(k) R_1 \mathbf{u}(k) \right\} \quad (8)$$

ここに、 E は期待値を表わし、 $q_1, \dots, q_m > 0$, R_1 は正定値対称行列とする。一般性を失うことなく、 $w(k)$ の共分散は 1 とする。(7) 式より、

$$E \{ y_j^2(k) \} = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_j(i) w(k-i) \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_j(i) w(k-i) \right) \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} g_j^2(i) \quad (9)$$

$$E \{ \mathbf{u}^T(k) R_1 \mathbf{u}(k) \} = E \left\{ \left(\sum_{i=0}^P \mathbf{c}_i^T w(k-i) \right)^T R_1 \left(\sum_{i=0}^P \mathbf{c}_i w(k-i) \right) \right\} = \sum_{i=0}^P \mathbf{c}_i^T R_1 \mathbf{c}_i \quad (10)$$

となるので、(8) 式の評価関数 J はつぎのように書ける。

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^m q_j (\tilde{\mathbf{c}}_p^T \tilde{\mathbf{h}}_j(k) + d_j(k))^2 \right\} + \tilde{\mathbf{c}}_p^T \tilde{R}_1 \tilde{\mathbf{c}}_p \quad (11)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{c}}_p^T = (c_0^T, \dots, c_p^T), \quad \tilde{\mathbf{h}}_j^T(k) = [\mathbf{h}_j^T(k), \dots, \mathbf{h}_j^T(k-p)]$$

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \dots & R_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

とおいた、上式より、考える問題は、時刻 $k=0$ にインパルス(ユニットパルス)が印加されたときにつぎの評価関数を最小化する問題と等価になることがわかる。

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^m q_j y_j^2(k) + \mathbf{u}^T(k) R_1 \mathbf{u}(k) \right\} \quad (13)$$

評価関数 J を最小にする $\tilde{\mathbf{c}}_p$ は(11) 式において、 $\partial J / \partial \tilde{\mathbf{c}}_p = 0$ とおけば次式を満足することがわかる。

$$\sum_{j=1}^m q_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{h}}_j(k) \tilde{\mathbf{h}}_j^T(k) \tilde{\mathbf{c}}_p + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{h}}_j(k) d_j(k) \right\} + \tilde{R}_1 \tilde{\mathbf{c}}_p = 0 \quad (14)$$

ここで、

$$\tilde{X}_p = \sum_{j=1}^m q_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{h}}_j(k) \tilde{\mathbf{h}}_j^T(k) \right\} + \tilde{R}_1,$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_p = \sum_{j=1}^m q_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{h}}_j(k) d_j(k) \right\} \quad (15)$$

とおくと(14) 式はつぎのように書ける。

$$\tilde{X}_p \tilde{\mathbf{c}}_p = -\tilde{\mathbf{r}}_p \quad (16)$$

行列 $\tilde{X}_p$ は正定値なので最適な $\tilde{\mathbf{c}}_p$ が $\tilde{\mathbf{c}} = -\tilde{X}_p^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_p$ と求まる。ここで、議論の便宜上、つぎの行列を導入する。

$$X_j(l) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{h}_j(k) \mathbf{h}_j^T(k-l),$$

$$\mathbf{r}_j(l) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{h}_j(k-l) d_j(k) \quad \begin{matrix} l=0, \dots, p \\ j=1, \dots, m \end{matrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 X(l) &= \sum_{j=1}^m q_j X_j(l) \quad (l=1, \dots, p), \\
 X(0) &= \sum_{j=1}^m q_j X_j(0) + R_1 \\
 \mathbf{r}(l) &= \sum_{j=1}^m q_j \mathbf{r}_j(l) \quad (l=0, \dots, p)
 \end{aligned} \quad (18)$$

このとき、 $\tilde{X}_p, \tilde{\mathbf{r}}_p$ はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_p &= \begin{bmatrix} X(0) & X(1) & X(2) & \cdots & X(p) \\ X^T(1) & X(0) & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ X^T(p) & & & X(1) & X(0) \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathbf{r}}_p &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0) \\ \mathbf{r}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(p) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (19)$$

上式のように、 $\tilde{X}_p$ はブロックトプリッツ性をもつので、(16)式の正規方程式は LWR 算法⁷⁾を用いることにより逐次次数を更新して解くことができる。具体的なアルゴリズムは付録に示すが、良く知られているように、この逐次解法を用いることにより演算に要する掛算の数が、通常の逆行列の計算に比べて $O(p^3)$ から $O(p^2)$ に減少する⁷⁾。

ところで、プラントによっては、アクチュエータはなるべく滑らかに動作させたいという要望もでてくる。この場合には(8)式あるいは(13)式の評価関数に入力の変動分に対するペナルティ項を追加する方法が考えられる。すなわち、(8)式の評価関数をつぎのように修正する。

$$\begin{aligned}
 J = E \left\{ \sum_{j=1}^m q_j y_j^2(k) + \mathbf{u}^T(k) R_1 \mathbf{u}(k) \right. \\
 \left. + \Delta \mathbf{u}^T(k) R_2 \Delta \mathbf{u}(k) \right\}
 \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ とおいた。このとき、上式右辺第3項は、

$$\begin{aligned}
 E(\Delta \mathbf{u}^T(k) R_2 \Delta \mathbf{u}(k)) \\
 = \mathbf{c}_0^T R_2 \mathbf{c}_0 + (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0)^T R_2 (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0) + \cdots \\
 + (\mathbf{c}_p - \mathbf{c}_{p-1})^T R_2 (\mathbf{c}_p - \mathbf{c}_{p-1}) + \mathbf{c}_p^T R_2 \mathbf{c}_p \\
 = \tilde{\mathbf{c}}_p^T \tilde{R}_2 \tilde{\mathbf{c}}_p
 \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ただし、

$$\tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 2R_2 & -R_2 & & & 0 \\ -R_2 & 2R_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -R_2 & 2R_2 \end{bmatrix}$$

とおいた。これより、(15)式の $\tilde{X}_p$ に $\tilde{R}_2$ が追加されることになる。こうして、(18)式の $X(l)$ ($l=0, 1, \dots, p$) のうち、 $X(0), X(1)$ だけをつぎのように修正すれば(20)式の評価関数の形で入力の変動分に対するペナルティ項を追加できることがわかる。

$$\begin{aligned}
 X(0) &= \sum_{j=1}^m q_j X_j(0) + R_1 + 2R_2 \\
 X(1) &= \sum_{j=1}^m q_j X_j(1) - R_2
 \end{aligned} \quad (22)$$

以上、補償器設計の手順をまとめるとつぎのようになる。

- (i) プラントの入出力データよりインパルス応答を求め(17)式の $X_j(l), \mathbf{r}_j(l)$ ($j=1, \dots, m; l=0, \dots, p$) を計算する。ただし、実際には十分大きな N に対して

$$\begin{aligned}
 X_j(l) &\simeq \sum_{k=1}^N \mathbf{h}_j(k) \mathbf{h}_j^T(k-l), \\
 \mathbf{r}_j(l) &\simeq \sum_{k=1}^N \mathbf{h}_j(k-l) d_j(k)
 \end{aligned}$$

を実行する。

- (ii) 評価関数の重み q_j ($j=1, \dots, m$), R_1, R_2 を決めて、(18), (22)式より $X(l), \mathbf{r}(l)$ ($l=1, \dots, p$) を計算する。
- (iii) 逐次更新式(付録 A.1~A.3 式)により正規方程式を解き $\tilde{\mathbf{c}}_p$ を求める。
- (iv) インパルス応答を用いてシミュレーションを行い、 $\tilde{\mathbf{c}}_p$ による制御性能を評価する。十分満足いく性能が得られないときは重みを調節して(ii), (iii)の計算を繰り返す。

計算の手数は(i)が最もかかるが、これは1回行っておけばよい。システムのインパルス応答は、ステップ応答試験データから直接求めるか、ランダム信号による試験データ(入出力データ)から推定することになる。こうして得られるインパルス応答列は一般に測定誤差や雑音等の影響で十分収束しないと考えられるので、実際には、インパルス応答列に適当なウィンドウをかける等の操作が必要になる。(iii)の計算は、重みを変更するごとに実行するため、これを高速に解く LWR 算法の効果は大きいと考えられる。なお、より良い制御性を得るためには、それだけ補償器の次数 p を高くする必要があるが、制御に要する演算時間

やメモリに制約がある場合には、FIR 補償器を低次の ARMA モデルで近似することも考えねばならない。

4. 設計法の拡張

前章では、外乱として白色過程を想定した設計について述べたが、ここでは、その拡張として有色雑音、およびステップ外乱を想定した時の設計について述べる。

4.1 外乱のスペクトルを考慮した場合の設計

外乱として白色過程を考えることは、全ての周波数帯で同一のパワーをもつ外乱を想定することになる。しかし、印加される外乱のパワースペクトルが既知である場合、あるいは、特定のパターンのパワースペクトルをもつ外乱を想定すればよい場合には、そのパワースペクトル情報を考慮した設計が行える。外乱 $w(k)$ の自己相関列を $r(l)$ ($l=0, 1, \dots$) とする。ここでは十分大きな l に対して $r(l)$ が十分小さくなるものと考え、ある L があって $l > L$ で $r(l)=0$ と仮定する。

このとき(7)式より、

$$E\{y_j^2(k)\} = \sum_{i=1}^L 2 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} g_j(i) + l g_j(i) r(l) \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} g_j^2(i) r(0) \quad (23)$$

$$E\{u^T(k)u(k)\} = \sum_{i=1}^L 2 \left\{ \sum_{i=0}^P c_i^T R c_{i+1} r(l) \right\} + \sum_{i=0}^P c_i^T R c_i r(0) \quad (24)$$

となる。これより、(8)式の評価関数 J を計算するとつぎのように整理される。

$$J = \sum_{j=1}^m q_j \left[\tilde{c}_p^T \{ \tilde{X}_j^{(1)} \} \tilde{r}_p + 2 \tilde{c}_p^T \sum_{l=0}^L \tilde{r}_p^{(l)} \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^{\infty} d_j(i) d_j(i+l) r(l) + \sum_{i=1}^{\infty} d_j^2(i) r(0) \right] \\ + \tilde{c}_p^T R \tilde{c}_p \quad (25)$$

ここに、

$$\tilde{X}_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \tilde{h}_j(k) \tilde{h}_j^T(k+l) + \tilde{h}_j(k+l) \tilde{h}_j^T(k) \} r(l) \\ (l=1, \dots, L)$$

$$\tilde{X}_j^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \tilde{h}_j(k) \tilde{h}_j^T(k) \} r(0)$$

$$\tilde{r}_p^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \tilde{h}_j(k) d_j(k+l) + \tilde{h}_j(k+l) d_j(k) \} r(l) \\ (l=1, \dots, L)$$

$$\tilde{r}_p^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_j(k) d_j(k) r(0)$$

$$R = \begin{bmatrix} Rr(0) & Rr(1) & \dots & Rr(p) \\ Rr(1) & Rr(0) & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & Rr(1) \\ Rr(p) & & & Rr(0) \end{bmatrix} \quad (26)$$

とおいた。さらに、

$$X_p = \sum_{j=1}^m q_j \left\{ \sum_{l=0}^L \tilde{X}_j^{(l)} \right\} + R, \quad r_p = \sum_{l=0}^L r_p^{(l)} \quad (27)$$

とおくと最適な $\tilde{c}_p$ を与える正規方程式は次式のようになる。

$$X_p \cdot \tilde{c}_p = -r_p \quad (28)$$

(26), (27) 式より、 X_p もブロックテプリットであるので前章で述べた(16)式の正規方程式同様、LWR 算法により高速に求解できる。ただし、(26)式からわかるように、 X_p, r_p の要素の計算はやや複雑になる。

4.2 ステップ外乱に対する補償器の設計

ここでは、外乱の平均値が変化する場合を考えて、ステップ状外乱を想定する。この場合、定常偏差を除去する操作を施しておけば、前章で述べたインパルス外乱の場合に帰着される。まず、

$$H^s(k) = \sum_{i=1}^k H_i, \quad d^s(k) = \sum_{i=1}^k d_i \quad (29)$$

とおく。このとき、定常偏差が除去できるための条件

$$R \text{ an } kH^s(\infty) = m \quad (30)$$

が成り立つなら次式を満足するベクトル g が存在する。

$$H^s(\infty)g + d^s(\infty) = 0 \quad (31)$$

このような g を用いてあらかじめ $g w(k)$ を入力しておくとして出力関係式(1)は、 $\Delta w(k) = w(k) - w(k-1)$ において

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i u_{k-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \{ H^s(i)g + d^s(i) \} \Delta w(k-i) \quad (32)$$

と書ける。したがって、前章の議論で $d_i \rightarrow H^s(i)g + d^s(i)$, $w(k) \rightarrow \Delta w(k)$ と置き換えればつぎのような形の最適フィードフォワード制御則が得られる。

$$u(k) = \sum_{i=1}^P c_i \Delta w(k-i) \quad (33)$$

なお、閉ループ系が積分補償されている場合には、インパルス応答 $d(i)$ をステップ応答 $d^s(i)$ で置き換えるだけでよい。

5. シミュレーションによる検討

Fig. 2 のようなブロック図のモデルを用いて提案した設計法の検証を行った。詳細は省略するが、このモデルは貫流形定圧運転ボイラーの定格出力付近に

Fig. 2
Block diagram of linearized
boiler model

おけるプロセスの挙動を現象的に近似したものであり¹⁰⁾、ブロック図にはボイラのアナログ制御系が含まれている。システムの入出力変数はつぎのようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{FR (水 燃 比): } U_1 \\ \text{SP (ス プ レ ー 流 量): } U_2 \\ \text{GD (ガ ス ダ ン パ ー 開 度): } U_3 \end{array} \right\} \text{操作入力}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{SHT (主 蒸 気 温 度): } Y_1 \\ \text{RHT (再 熱 蒸 気 温 度): } Y_2 \\ \text{TP (主 蒸 気 圧 力): } Y_3 \end{array} \right\} \text{出力}$$

$$\text{MWD (負 荷 指 令): } W$$

このシステムでは負荷指令 MWD は外乱として取扱われる。また、制御対象は SHT, RHT とする。ここでは、ステップ外乱に対する設計を行った結果について示す。 $U_1 \sim U_3$ にユニットパルスを印加したときの Y_1, Y_2 応答、および、MWD にユニットステップを印加したときの Y_1, Y_2 の応答を 5 秒間隔でサンプリングした系列 $H_i, \mathbf{d}^s(i) (i=1, \dots, M)$ に $\lambda=0.995$ の指数窓を掛けたものを用いて補償器を設計した。ここで M は応答が十分収束するところまでとるが、今回は $M=200$ とした。Fig. 3 は MWD にステップを印加したときの制御結果の 1 例である。評価関数の重みはつぎのようにした。

$$(q_1, q_2) = (20, 10), \quad R_1 = \text{diag.}\{1, 5, 1\}, \\ R_2 = \text{diag.}\{10, 10, 10\}$$

図のように，かなり振動的であった出力の応答が補償器により改善され，すみやかに収束している．ここで補償器の次数は $p=100$ としているが，入力 of 応答をみればわかるように，これ以上次数を上げる必要はない．入力の応答を滑らかにするには入力増分にペナル

ティを加えることが効果的である。 q_1, q_2, R_1 は前と同じで $R_2=0$ としたときの応答を **Fig. 4** に示す。 Fig. 3, Fig. 4 より、重み R_2 を加えることにより、制御性能をほとんど劣化させずに入力への応答を滑らかにできることがわかる。

6. あとがき

システムの出入力データ(インパルス応答)を用いて二乗規範の意味で最適なフィードフォワード補償器を設計する方法を述べた。二乗規範のもとで最適な制御器を設計する問題は準自由構成 Wiener 問題⁶⁾と呼ばれており、解析的設計法^{5), 6)}の分野で古くから研究されてきたが、その解法は難解でかなり複雑であり、かならずしも実用的な方法とはいえない。本論文では、補償器を FIR フィルタとすることにより準自由構成 Wiener 問題を正規方程式の求解に帰着させている。このため、正規方程式は通常かなり大きなサイズのを解かねばならないが、LWR 算法を用いることにより高速に解け、次数更新ごとにインパルス応答 $\hat{c}_k$ の収束性が判定できる。このように、本設計法は計算機を援用して設計するのに適している。シミュレーションにより本設計法の有効性を示した。今回はステップ外乱の場合について述べたが、ランダム外乱の場合にも同様に良好な結果が得られている。また、高次の FIR 補償器は多変数の Mullis-Roberts 算法^{8), 9)}により低次 ARMA フィルタで近似されるが、この場合にも同等の制御性能が得られる。これらについては別の機会に述べる。

《付 録》

正規方程式(16), (27)式の逐次解法

Fig. 3 Step response of boiler model controlled by the compensator ($Q=\text{diag.}(20, 10)$, $R1=\text{diag.}(1, 5, 1)$, $R2=\text{diag.}(10, 10, 10)$)

(16), (27)式の正規方程式は, AR 過程に対する Yule-Walker 方程式の逐次解法 (LWR 算法)⁷⁾ を利用することにより, 次数 p を逐次更新して解くことができる. すなわち, (16)式に対して ((27)式でも同様) つぎの二つの方程式

Fig. 4 Step response of boiler model controlled by the compensator ($Q=\text{diag.}(20, 10)$, $R1=\text{diag.}(1, 5, 1)$, $R2=0$)

$$\bar{F}_p \cdot \bar{X}_p = [I, F_1(p), \dots, F_r(p)] \bar{X}_p = [Y_p, 0 \dots 0]$$

$$\bar{B}_p \cdot \bar{X}_p = [B_r(p), \dots, B_1(p), I] \bar{X}_p = [0, \dots, 0, Z_p]$$

を考え, これらの逐次更新式を利用して $\bar{c}_p^T = (c_p^T(p), \dots, c_p^T(p))$ の次更新を行う. アルゴリズムにまとめるとつぎようになる.

(i) 初期条件

$$c_0(0) = -X^{-1}(0)r(0), \quad Y_0 = Z_0 = X(0)$$

(ii) $P \rightarrow p+1$

$$\left. \begin{aligned} \pi_p &= \sum_{i=0}^P F_i(p) X(p+1-i), \\ \Sigma_p &= \sum_{i=0}^P c_i^T(p) X(p+1-i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p &= -\pi_p Z_p^{-1}, \quad \beta_p = -\pi_p^T Y_p^{-1} \\ \bar{F}_{p+1} &= [\bar{F}_p; 0] + \alpha_p [0; \bar{B}_p] \\ \bar{B}_{p+1} &= \beta_p [\bar{F}_p; 0] + [0; \bar{B}_p] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{p+1} &= [I - \alpha_p \beta_p] Y_p \\ Z_{p+1} &= [I - \beta_p \alpha_p] Z_p \\ \alpha_p^T &= -(\bar{r}_{p+1}^T + \Sigma_p^T) Z_p^{-1} \\ \bar{c}_{p+1}^T &= [\bar{c}_p^T; 0^T] + \alpha_p^T \bar{B}_{p+1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$\bar{X}_p$ が正定値であることから Y_p, Z_p の正定値がいえる⁷⁾ ので任意の次数に対して上記アルゴリズムは計算できる. しかし, 実際には有限個のデータから $X(l)$ を計算するので, 数値的に安定に次数更新をすすめるためにシステムのインパルス応答列に指数窓等を掛けておく必要がある. なお, p 次の最適補償器 $\bar{c}_p$ を用

いたときの評価関数 J ((8)式) の値を J_p^* とすると (11), (16), (A.3) 式より次式が成立つ.

$$J_{p+1}^* = J_p^* + \tilde{\mathbf{r}}_{p+1}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{p+1}^T \mathbf{a}_p \quad (\text{A.4})$$

J_p^* は次数に関して単調減少であるので, (A.4) 式の右辺第2項を次数更新ごとに計算し, その収束性を評価することによって補償器の適切な次数が判定できる.

参 考 文 献

- 1) 中村他：最適制御理論のボイラ制御への応用, 計測と制御, **18-4**, 53/60 (1979)
- 2) E. J. Davison: Multiuvariable Tuning Regulator, The Feedforward and Robust Control of General Servomechanism Problem, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-21-1**, 35/47 (1976)
- 3) R. Isermann: Digital Control System, Chap. 17, Springer-Verlag (1977)
- 4) O. Uchida, et al.: Application of Linear Programming to Thermal Power Plant Control, IFAC 8th World Congress Preprints Vol. 20, 109/114(1981)
- 5) G.C. Newton, et al.: Analytical Design of Linear Feedback Controls, John Wiley & Sons, Inc. (1957)
- 6) J. Weston and J. J. Bongiorno: Extension of Analytical Design Technique to Multivariable Feedback Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-17-5**, 613/620 (1972)
- 7) 有本：信号・画像のデジタル処理, 産業図書 (1980)
- 8) C. T. Mullis and R. A. Roberts: The Use of Second Order Information in the Approximation of Discrete-Time Linear Systems, IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing. **ASSP-24-3**, 226/238 (1976)
- 9) Y. Inoue: Approximation of Multinariaible Linear Systems with Impulse Pespone and Autocorrelation Sequences, IFAC 8th. World Congress Preprints, **I**, 1/6 (1981)
- 10) 中村：発電用ボイラの最適制御, 日本機械学会第560回講習会教材「機械技術者のための制御理論」111/126 (1983)