不完全状態情報系における準最適制御†

飯 田 達 彦*

Suboptimal Control in Incomplete State Information Systems

Michihiko IIDA*

Studied in this paper is a kind of suboptimal control strategies in linear time-invariant systems with the possibility of aggregation and with incomplete state information.

The concept of an aggregated state estimation is introduced and it is shown that the asymptotic estimation of aggregated states, or of linear functions of state variables under conditions of the aggregation for the systems reduces to Luenberger estimation of the entire state variables of the virtual aggregated models retaining complete observability of the systems. It is also shown that the separation property between control and estimation problems can be concluded in the pseudo-suboptimal control systems constructed by suboptimal feedback control laws based upon the aggregated state estimators.

An expression of upper and lower bounds on relative pseudo-suboptimality is given by means of the pencil of quadratic forms without any assumptions on initial conditions in the systems.

Key Words: aggregation, observability, estimation, suboptimal control, pseudo-suboptimality

1. 緒 言

高次の制御対象に線形 2 次形式最適制御問題を適用する場合に、計算規模や制御系の構成など実用上の制約に対して、次元低下モデルによる近似的最適制御方策が有利となることが知られている。具体的な次元低下の手法¹⁾も数多く発表されているが、縮約法と、それに基づく準最適制御方策²⁾が報告されて以来、縮約

の手法は多くの研究成果をもたらした。特に、縮約法はこれまでの多くの次元低下の手法を綜合する一つの見方であると考えられるものであることが明らかにされ³⁾ 縮約による準最適制御方策の一般性が広く認識されるに至った。

しかしながら、縮約法に基づく準最適制御方策が実用化されるためには、状態情報が直接測定で得られない、いわゆる不完全状態情報系における制御方策が確立されなくてはならないが、この方向に関しては少数の特殊な場合に対する研究⁴⁾が報告されているに過ぎず、また、線形関数推定も未解決の問題を抱えている⁵⁾。

本論文においては、完全可制御かつ完全可観測で縮約可能な線形時間不変系が不完全状態情報の制御対象として与えられるものとするとき、

i) 双対縮約系の導入により、縮約モデルの完全可制御性と完全可観測性を保証するための条件を求め、この条件の下で、

ii) 固有値の任意な共役配置が可能な縮約状態推定系を提案し、その漸近推定条件を与える。つぎに

iii) 完全状態情報の仮定の下で求められた準最適制御則に対して、推定された縮約状態を適用する擬似準最適制御則に基づく制御系における制御と推定問題の分離性と安定性を論じ、

iv) この擬似準最適制御系の準最適性を議論するために 2 次形式ペンシルを導入して、相対的準最適性に関する上限および下限を与える。

最後に、解説用の簡単な数値例を示す。

2. 縮約モデルの制御および観測構造

2.1 縮約モデル

縮約可能な線形定係数系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

が与えられるものと仮定する。ただし、状態、入力お

† 第 6 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 58・12)

* 東海大学工学部 平塚市北金目 1117

* Faculty of Engineering, Tokai University, Hiratsuka

(Received May 10, 1984)

(Revised January 17, 1985)

よび出力ベクトルはそれぞれ

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, y(t) \in \mathbb{R}^r \quad (2.3)$$

とし、係数行列 A, B, C はそれぞれ適合次数をもつものとする。さらに、一般性を失うことなく

$$\text{rank } C = r \quad (2.4)$$

と仮定する。

このとき、縮約行列 $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $r \leq m < n$ による系(2.1-2)の縮約モデルは次式で与えられる。

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = Hz(t) \quad (2.6)$$

ここで、

$$z(t) = \Gamma x(t) \quad (2.7)$$

は縮約状態変数を表わし、係数行列 F, G, H の間には縮約条件とよばれるつぎの関係が少くとも近似的に成立しているものとする。

$$F\Gamma = \Gamma A \quad (2.8)$$

$$G = \Gamma B \quad (2.9)$$

$$H\Gamma = C \quad (2.10)$$

さらに、縮約の物理的意味から、一般性を損うことなく次の仮定をおくことができる。

$$\text{rank } \Gamma = m \quad (2.11)$$

縮約行列 Γ が最高階数 m をもつとき、 Γ の擬逆進行列 Γ^+ は次式で与えられる。

$$\Gamma^+ = \Gamma^T (\Gamma \Gamma^T)^{-1} \quad (2.12)$$

ただし、 X^T は X の転置行列を表わすものとする。このとき、縮約条件(2.8)に対する整合条件は、

$$\Gamma A \Gamma^+ \Gamma = \Gamma A \quad (2.13)$$

となり、

$$F = \Gamma A \Gamma^+ \quad (2.14)$$

は、i) $\Gamma A \Gamma^+ \Gamma = \Gamma A \Rightarrow$ 最小ノルム解、

ii) $\Gamma A \Gamma^+ \Gamma \neq \Gamma A \Rightarrow$ 最小ノルムの最小2乗近似解

を与える。同様に縮約条件(2.10)に対する整合条件は

$$C \Gamma^+ \Gamma = C \quad (2.15)$$

であり、このとき、

$$H = C \Gamma^+ \quad (2.16)$$

は、i) $C \Gamma^+ \Gamma = C \Rightarrow$ 最小ノルム解、

ii) $C \Gamma^+ \Gamma \neq C \Rightarrow$ 最小ノルムの最小2乗近似解を与える⁵⁾。ただし、ノルムはすべて

$$\|X\|_2 = \{\text{tr}(X^* X)\}^{1/2}$$

を用いるものとする。

本論文では、縮約条件(2.8), (2.10)が共に解をもつ場合を完全縮約、整合条件が共に近似的に成立するような近似解をもつ場合を不完全縮約とよぶことにする。

2.2 双対縮約モデル

系(2.1-2)の双対系は次式で与えられる。

$$\dot{\xi}(t') = A^T \xi(t') + C^T \mu(t') \quad (2.17)$$

$$\eta(t') = B^T \xi(t') \quad (2.18)$$

また、縮約モデル(2.5-6)の双対系は、

$$\dot{\zeta}(t') = F^T \zeta(t') + H^T \mu(t') \quad (2.19)$$

$$\eta(t') = G^T \zeta(t') \quad (2.20)$$

で与えられる。ただし、 t' は t の逆時間を表わすものとする。

このとき、縮約モデルの双対系(2.19-20)は原系の双対系(2.17-18)から縮約行列 $\Gamma^{+T} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ による縮約変換

$$\zeta(t') = \Gamma^{+T} \xi(t') \quad (2.21)$$

によって与えられることが明らかであり、したがって系(2.19-20)は系(2.17-18)の Γ^{+T} による縮約モデルであり、原系(2.1-2)の双対縮約モデルとなる。

2.3 縮約系の可制御性と可観測性

縮約モデルの制御および観測構造に関して、つぎの命題を与えることができる。

[命題1] (縮約系の制御および観測構造)

系(2.1-2)が完全可制御および/または完全可観測のとき、その縮約系(2.5-6)が完全可制御および/または完全可観測となるための必要十分条件は縮約行列 Γ が最高階数をもつことである。

(証明) 系(2.1)の可制御行列を C とすると仮定により、

$$\text{rank } C = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (2.22)$$

可制御行列 C に Γ を左乗すると

$$\Gamma C = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Cayley-Hamilton の定理により

$$\text{rank } \Gamma C = \text{rank } C_* \quad (2.24)$$

ただし、 C_* は縮約系(2.5)の可制御行列を表わし

$$C_* = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{m-1}G \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

で与えられる。(2.24)式に Sylvester の不等式を適用し(2.22)式を用いると

$$\text{rank } \Gamma \leq \text{rank } C_* \leq \text{rank } \Gamma \quad (2.26)$$

が得られ、命題の前半が証明された。

つぎに、系(2.1-2)の可観測行列を $\mathcal{O}$ とすると、仮定により、

$$\text{rank } \mathcal{O} = \text{rank } \mathcal{O}_\xi = n \quad (2.27)$$

ただし、 $\mathcal{O}_\xi$ は双対系(2.17)の可制御行列である。このとき、命題の前半から、

$$\text{rank } \Gamma^{+T} = \text{rank } \Gamma = m \quad (2.28)$$

が双対縮約系(2.19)の完全可制御のための必要十分条件となるから、双対縮約系(2.19)の可制御行列を $\mathcal{O}_\zeta$

縮約系(2.5-6)の可観測行列を $\mathcal{O}_z$ とすると, (2.28) 式が成り立つとき, かつこのときに限り,

$$\text{rank } C_z = \text{rank } \mathcal{O}_z = m \quad (2.29)$$

となり, 命題は証明された. //

3. 縮約状態推定の理論

縮約状態推定の問題をつぎのように設定する.

完全可観測な系(2.1-2)に対して, その縮約モデルが(2.5-6)式で与えられるとき, 系(2.1-2)の入・出力変数から縮約状態 $z(t) = \Gamma x(t)$ を推定せよ.

縮約状態の推定は縮約条件(2.8-10)の下での線形関数推定⁷⁾と考えることができ, つぎの命題が与えられる.

[命題2] (縮約状態推定)

系(2.1-2)が完全可観測で, 縮約行列 Γ が最高階数をもつとき, $(m-r)$ 次元の動的系

$$\dot{w}(t) = Mw(t) + N_1 y(t) + N_2 u(t) \quad (3.1)$$

$$\hat{z}(t) = Ww(t) + Vy(t) \quad (3.2)$$

は

$$\det[(C\Gamma^+)^T U^T] \neq 0 \quad (3.3)$$

を満足する任意の $U \in \mathbb{R}^{(m-r) \times m}$ に対して, つぎの縮約状態推定条件

$$MU\Gamma = U\Gamma A - N_1 C \quad (3.4)$$

$$N_2 = U\Gamma B \quad (3.5)$$

$$WU\Gamma + VC\Gamma = \Gamma \quad (3.6)$$

が満足されるとき, M を安定行列とすることができ

$$\hat{z}(t) \doteq \Gamma x(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

の意味で系(2.1-2)の縮約状態を漸近的に推定する.

(証明) $\text{rank } \Gamma = \text{rank } \Gamma^+ = m$ であるから, (2.4) 式の仮定の下でつぎの関係が成立する.

$$\text{rank } C\Gamma^+ = r \quad (3.8)$$

したがって, (3.3)式を満足する U は常に存在する.

また, (3.6)式に Γ^+ 右乗して $\Gamma\Gamma^+ = I_m$ なる関係を用いると,

$$WU + VC\Gamma^+ = I_m \quad (3.9)$$

すなわち,

$$\begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Gamma^+ \\ U \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.10)$$

が得られる. ただし, I_r は r 次元単位行列を表わす.

ここで, 推定誤差 $e(t)$ を次式で定義する.

$$e(t) = \hat{z}(t) - \Gamma x(t) = \begin{bmatrix} C\Gamma^+ \\ U \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - \Gamma x(t) \quad (3.11)$$

このとき,

$$\begin{bmatrix} C\Gamma^+ \\ U \end{bmatrix} e(t) = \begin{bmatrix} y(t) - C\Gamma^+ \Gamma x(t) \\ w(t) - U\Gamma x(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

となり, (3.12)式において

$$\text{i) } C\Gamma^+ \Gamma = C \Rightarrow y(t) - C\Gamma^+ \Gamma x(t) = 0 \quad (3.13)$$

$$C\Gamma^+ \Gamma \doteq C \Rightarrow y(t) - C\Gamma^+ \Gamma x(t) \doteq 0 \quad (3.14)$$

$$\text{ii) } \varepsilon(t) \equiv w(t) - U\Gamma x(t) \quad (3.15)$$

とおくとき, $\varepsilon(t)$ の動作は(2.1)および(3.1)式から縮約状態推定条件(3.4-6)の下で次式により表現される.

$$\dot{\varepsilon}(t) = M\varepsilon(t), \quad \varepsilon(0) = w(0) - U\Gamma x(0) \quad (3.16)$$

また, 縮約状態推定条件(3.4-6)および縮約条件(2.8-10)から

$$MU = U\Gamma - N_1 H \quad (3.17)$$

$$N_2 = U\Gamma \quad (3.18)$$

$$WU + VH = I_m \quad (3.19)$$

が得られる. (3.17-19)式は $(m-r)$ 次元の動的系(3.1-2)が縮約モデル(2.5-6)の状態観測器となるための観測条件⁸⁾である. したがって, 縮約モデル(2.5-6)が完全可観測のとき, M を安定行列にする N_1 を求めることができる⁹⁾.

したがって, 系(2.1-2)が完全可観測のとき, 縮約行列 Γ が最高階数をもつならば,

$$\varepsilon(t) = 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

とすることができる.

以上の議論により, 縮約モデル(2.5-6)が

$$\text{完全縮約} \Rightarrow \hat{z}(t) = \Gamma x(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (\text{完全推定}) \quad (3.21)$$

$$\text{不完全縮約} \Rightarrow \hat{z}(t) \doteq \Gamma x(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (\text{近似推定}) \quad (3.22)$$

となる. 以上により命題は証明された. //

縮約状態を推定する機構を, 状態変数の部分的推定機構と共に検出器(detector)とよぶ¹⁰⁾ことにする.

検討事項

i) 最小次元縮約状態検出器

証明の過程から, 系(2.1-2)に対して縮約状態検出器を構成するためには, 仮想した縮約モデル(2.5-6)に対する条件(3.17-19)を満足する最小次元状態観測器⁹⁾を構成すればよいことが明らかである. これを原系(2.1-2)に対する最小次元縮約状態検出器とよぶ.

ii) 同次元縮約状態検出器

$$U = W = I_m, \quad V = 0 \quad (3.23)$$

とおくことができ, このとき検出器(3.1-2)は m 次元となり, 縮約モデル(2.5-6)の同次元状態観測器⁹⁾となる. これを原系(2.1-2)に対する同次元縮約状態検出器とよぶ. この場合には, 不完全縮約モデルに対しても完全推定を行うことができる.

4. 擬似準最適制御系の構造

4.1 線性 2 次形式最適制御¹¹⁾

完全可制御かつ完全可観測な線形系(2.1-2)が制御対象として与えられるとき、2 次形式評価関数

$$J[u(t)] = \int_0^{\infty} [x^T(t)Q_0x(t) + u^T(t)Ru(t)] dt, \quad Q_0 \geq 0, R > 0 \quad (4.1)$$

を最小にする最適制御則 $u_0[x(t)]$ は次式で与えられる。

$$u_0[x(t)] = K_0x(t), \quad K = -R^{-1}B^T T_0 \quad (4.2)$$

ただし、 T_0 は次の代数 Riccati 方程式の対称正定符号解である。

$$A^T T_0 + T_0 A - T_0 B R^{-1} B^T T_0 + Q_0 = 0 \quad (4.3)$$

このとき、最適評価関数値 J_0 は次式で与えられる。

$$J_0 = J[u_0(x(t))] = x^T(0)T_0x(0) \quad (4.4)$$

4.2 完全状態情報系における準最適制御²⁾

制御対象(2.1-2)が完全状態情報系であると仮定し、これに対する縮約モデル(2.5-6)が与えられる場合には、制御対象(2.1-2)に対する準最適制御は縮約モデル(2.5-6)に対する 2 次形式評価関数

$$J_M[u(t)] = \int_0^{\infty} [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (4.5)$$

を最小にする最適制御として求められる。ただし、

$$Q = (\Gamma^+)^T Q_0 \Gamma^+ \quad (4.6)$$

とする。このとき、制御対象(2.1-2)に対する準最適制御則 $u_s[x(t)]$ は次式で与えられる。

$$u_s[x(t)] = K\Gamma x(t), \quad K = -R^{-1}GP \quad (4.7)$$

ここで、 P は次の代数 Riccati 方程式の対称正定符号解である。

$$F^T P + P F - P G R^{-1} G^T P + Q = 0 \quad (4.8)$$

このとき、準最適評価関数値 J_s は次式で与えられる。

$$J_s = J[u_s(x(t))] = x^T(0)T x(0) \quad (4.9)$$

ただし、 $[A+BK\Gamma]$ が安定行列のとき T はつぎの Lyapunov 方程式の一意解である。

$$[A+BK\Gamma]^T T + T[A+BK\Gamma] = -[Q+\Gamma^T K^T R K T] \quad (4.10)$$

準最適制御則(4.7)による評価関数値の増分は

$$J_s - J_0 = x^T(0)\Delta x(0) \quad (4.11)$$

で表わされる。ただし、

$$\Delta = T - T_0 \quad (4.12)$$

であり、 Δ が満足すべき方程式は式(4.10)から

$$[A+BK\Gamma]^T \Delta + \Delta[A+BK\Gamma] = -\delta B R^{-1} B^T \delta \quad (4.13)$$

で与えられ、 $\delta = T_0 - \Gamma^T P \Gamma$ が満足すべき方程式は、

$$[A - B R^{-1} B^T \Gamma^T P \Gamma]^T \delta + \delta [A - B R^{-1} B^T \Gamma^T P \Gamma] - \delta B R^{-1} B^T \delta + Q_0 - \Gamma^T Q \Gamma = 0 \quad (4.14)$$

である。

4.3 擬似準最適制御系の安定性

制御対象(2.1-2)が完全可制御かつ完全可観測な不安全状態情報系である場合には、縮約行列 Γ が最高階数をもつとき縮約状態推定系を構成して、準最適制御則における縮約状態をその推定値で置換すると、

$$u_p[z(t)] = Kz(t) + v(t) \quad (4.15)$$

が得られる。これを擬似準最適制御則とよぶ。ただし、 $v(t) \in R^p$ は外部入力ベクトルを表わす。このとき、制御対象(2.1-2)、縮約状態検出器(3.1-2)および擬似準最適制御則(4.15)で構成される擬似準最適制御系の閉ループ状態方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BKVC & BKW \\ N_1C+N_2KVC & M+N_2KW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ N_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.16)$$

ここで、推定誤差の成分 $\varepsilon(t)$ による表現を得るために正則変換

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -U\Gamma & I_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

による状態方程式(4.16)の同値変換を行うと、縮約状態推定条件(3.4-6)の下でつぎの結果を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK\Gamma & BKW \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.18)$$

(4.18) 式の表現からつぎの事実が明らかになる。

この擬似準最適制御系においても、観測器による並御系と同様⁸⁾ に

i) 制御と推定の両問題に関して分離性が成立し、

Fig. 1 Pseudo-suboptimal control system

推定部分系は外部入力から非可制御である。

ii) これら両問題に対する独立な安定化により全制御系の安定性が保証される。

準最適縮約状態フィードバックによる制御対象の安定化に関する一般論は現在のところ与えられていないが、E. J. Davison, S. S. Lamba および S. V. Rao の縮約行列を適用する場合、 F に受け継がれない A の非支配的固有値が安定な固有値のとき $[F+GK]$ を安定にする K は縮約モデルが可制御のとき存在し、 $[A+BK\Gamma]$ を安定にすることが証明されている¹²⁾。したがって、この縮約行列を用いた準最適制御と上記の縮約状態検出器により安定な制御系を構成しうることが明らかになった。

擬似準最適制御系の構造を Fig. 1 に示す。

5. 擬似準最適性

5.1 擬似準最適評価関数値

不完全状態情報系に対して、擬似準最適制御を行う場合の評価関数値および最適評価関数値からのその増分を求める。

擬似準最適制御則(4.15)に対して(3.2)と(3.15)式を代入するとつぎの表現が得られる。

$$u_p(t) = K[\Gamma \quad W] \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

ただし、外部入力 $v(t)=0$ とする。この擬似準最適制御(5.1)を評価関数(4.1)に代入すると擬似準最適評価関数値 J_p は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} J_p &= J[u_p(t)] \\ &= \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q + \Gamma^T K^T R K \Gamma & \Gamma^T K^T R K W \\ W^T K^T R K \Gamma & W^T K^T R K W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

擬似準最適系(4.18)の $v(t)=0$, $[x^T(0) \quad \varepsilon^T(0)]^T$ に対する応答を用いて(5.2)式を計算するとつぎの結果が得られる。

$$J_p = \begin{bmatrix} x(0) \\ \varepsilon(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12}^T & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \varepsilon(0) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

ただし、2次形式(5.3)の行列はつぎの Lyapunov 方程式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A+BK\Gamma & BKW \\ 0 & M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12}^T & \Delta_{22} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12}^T & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+BK\Gamma & BKW \\ 0 & M \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} Q + \Gamma^T K^T R K \Gamma & \Gamma^T K^T R K W \\ W^T K^T R K \Gamma & W^T K^T R K W \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

の対称解である。擬似準最適系(4.18)のシステム行列が安定行列のとき、(5.4)式は一意解をもち、(4.10)式から解の一意性により、

$$\Delta_{11} = T \quad (5.5)$$

が得られる。

最適評価関数値 J_0 からの J_p の増分 δJ は(4.12)式の Δ を用いてつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \delta J &= J_p - J_0 \\ &= \begin{bmatrix} x(0) \\ \varepsilon(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{12} \\ \Delta_{12}^T & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \varepsilon(0) \end{bmatrix} \\ &= x^T(0)\Delta x(0) + \varepsilon^T(0)\Delta_{22}\varepsilon(0) + 2\varepsilon^T(0)\Delta_{12}x(0) \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.6)式の右辺第1項は完全状態情報の下における縮約に基づく増分であり、第2および第3項は縮約状態の推定に係る増分を表わしている。

制御対象の初期状態 $x(0)$ に関する先験的情報が与えられない場合には、縮約状態検出器の初期状態 $w(0)$ を0とすることは妥当な基準を与えるものと考えられる。このとき、

$$\varepsilon(0) = -U\Gamma x(0) \quad (5.7)$$

となり、増分 δJ は次式で与えられる。

$$\delta J = x^T(0)T_d x(0) \quad (5.8)$$

ただし、 T_d は次式で表わされる対称行列である。

$$T_d = \Delta + \Gamma^T U^T \Delta_{22} U \Gamma - [\Gamma^T U^T \Delta_{12}^T + \Delta_{12} U \Gamma] \quad (5.9)$$

5.2 相対的準最適性

最適評価関数値 J_0 に対する擬似準最適評価関数値 J_p の相対増分率を次式で定義する。

$$\frac{\delta J}{J_0} = \frac{x^T(0)T_d x(0)}{x^T(0)T_0 x(0)}, \quad T_0 > 0 \quad (5.10)$$

このとき、二つの実2次形式 δJ と J_0 による2次形式正則ペンシル

$$\delta J - \lambda J_0 \quad (5.11)$$

に対する特性方程式

$$\det[T_d - \lambda T_0] = 0 \quad (5.12)$$

は常に n 個の実特性根 λ_i , $i=1, 2, \dots, n$ をもち

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (5.13)$$

とすると、つぎの関係が成立する¹³⁾。

$$\lambda_1 \leq \frac{\delta J}{J_0} \leq \lambda_n \quad (5.14)$$

すなわち、擬似準最適評価関数値の相対増分率は、縮約状態検出器の初期状態 $w(0)$ を0とするとき、その下限および上限はそれぞれ正則ペンシル(5.11)の最小および最大特性根によって与えられる。

さらに、(5.14)式における等号は、 $x(0)$ がそれぞれ最小または最大の特性根 λ_i , $i=1, n$ に対して

$$T_0 x_i(0) = \lambda_i T_0 x_i(0), \quad i=1, n \quad (5.15)$$

を満足する Principal vector $x_i(0)$, $i=1, n$ に等しいときに成り立ち、それぞれ相対増分率の下限および上限を与える制御対象の初期値となる。

6. 数 値 例

6.1 制御対象と縮約モデル

不完全状態情報系(2.1-2)が3次系であり、係数行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

によって与えられるものとする。この系は完全可制御かつ完全可観測である。この系を制御対象とし、評価関数(4.1)の行列が

$$Q_0 = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1], \quad R=1$$

である場合の擬似準最適制御が求められているものとする。

行列 A の固有値 $\lambda(A) = \{\pm j, -10\}$ のうち支配的固有値 $\pm j$ を受け継ぐ縮約モデル(2.5-6)を構成するために Davison-Lamba-Rao の縮約行列¹²⁾

$$\Gamma = M_0 T_2 M_A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 & 0.01 \\ 0.10 & 1.00 & 0.10 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank } \Gamma = 2$$

を用いると、縮約モデルの係数行列は次のようになる。

Fig. 2 Detector simulation

for $u(t)=0$, $x^T(0)=[1 \quad 0 \quad 0]$, $w(0)=0$

(a) Full-order detector with $\lambda(M) = \{-10, -10\}$

(b) Min-order detector with $\lambda(M) = \{-10\}$

$$F = \Gamma A \Gamma^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.99 \\ -1.00 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \Gamma B = \begin{bmatrix} -0.10 \\ 0.99 \end{bmatrix},$$

$$H = C \Gamma^+ = [1.01 \quad 0]$$

このモデルは完全可制御かつ完全可観測な不完全縮約モデルである。

6.2 縮約状態検出器

i) 同次元縮約状態検出器

動的系(3.1-2)は2次となり、 $U=W=I_2$, $V=0$ とし M の固有値 $\lambda(M) = \{-10, -10\}$ となるように N_u を指定するとつぎの同次元縮約状態検出器が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1(t) \\ \dot{\hat{z}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 99 \end{bmatrix} y(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

ii) 最小次元縮約状態検出器

1次の動的系(3.1-2)において、 $M=-10$ とし、(3.3)式を満足する U として $U = [-10 \quad 1]$ を指定するとつぎの最小次元縮約状態検出器が求められる。

$$\dot{w}(t) = -10w(t) - 101y(t) + 2u(t)$$

$$\hat{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} y(t)$$

これらの検出器による縮約状態推定に関するシミュレーション結果を Fig. 2 に示す。これらの結果は何れも、漸近推定が確実に行なわれていることを示している。

6.3 擬似準最適制御

i) 制御則

Riccati 方程式(4.8)において

$$Q = (\Gamma^+)^T Q_0 \Gamma^+ = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると、その対称正定符号解は

$$P = \begin{bmatrix} 1.92 & 0.46 \\ 0.46 & 1.45 \end{bmatrix}$$

となり、準最適制御則は次式で与えられる。

$$u_s[x(t)] = K \Gamma x(t) = -[0.27 \quad 1.39] \Gamma x(t)$$

この制御則による閉ループ・システム行列 $A + BK \Gamma$ は安定である。準最適制御則の $\Gamma x(t)$ を $\hat{z}(t)$ で置換してつぎの擬似準最適制御則を得る。

$$u_p[\hat{z}(t)] = K \hat{z}(t) = -[0.27 \quad 1.39] \hat{z}(t)$$

ii) 制御系

同次元および最小次元縮約状態検出器による擬似準最適制御系の閉ループ状態方程式はそれぞれつぎのように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{\varepsilon}_1(t) \\ \dot{\varepsilon}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14.11 & -14.88 & -11.36 & -2.73 & -13.88 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -14.11 & -14.88 & -11.36 & -13.88 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_3(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Fig. 3 Zero input responses in a pseudo-suboptimal control system

for $x^T(0) = [1 \ 0 \ 0]$, $w(0) = 0$

(a) with full-order detector

(b) with min.-order detector

それぞれの制御系に対する零入力応答に関するシミュレーション結果を Fig. 3 に示し、完全状態情報の下での最適および準最適制御系の応答と比較した。

6.4 準最適性

与えられた数値例に対する評価関数値の増分 (5.8) および相対増分率 (5.14) はそれぞれつぎのように求められる。ただし、準最適制御、同次元および最小次元縮約状態検出器による擬似準最適制御に対する評価関数の増分をそれぞれ $\delta J_0, \delta J_1, \delta J_2$ で表わすものとする。

$$\begin{aligned} \delta J_0 &= x^T(0) T_{11} x(0) \\ &= x^T(0) \begin{bmatrix} 0.16 & 0.11 & 0 \\ 0.11 & 0.11 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} x(0); \end{aligned}$$

$$0.009 \leq \frac{\delta J_0}{J_0} \leq 0.16$$

$$\delta J_1 = x^T(0) T_{11} x(0)$$

$$= x^T(0) \begin{bmatrix} 8.61 & -1.40 & -0.36 \\ -1.40 & 0.50 & 0.10 \\ -0.36 & 0.10 & 0.03 \end{bmatrix} x(0);$$

$$0.037 \leq \frac{\delta J_1}{J_0} \leq 5.18$$

$$\delta J_2 = x^T(0) T_{12} x(0)$$

$$= x^T(0) \begin{bmatrix} 15.21 & -1.48 & -0.61 \\ -1.48 & 0.28 & 0.07 \\ -0.61 & 0.07 & 0.03 \end{bmatrix} x(0);$$

$$0.010 \leq \frac{\delta J_2}{J_0} \leq 8.53$$

評価関数値の相対増分率は制御対象の任意の初態条件に対して、検出器の初期条件をすべて零とした場合について計算されていることを考慮すれば、これらの値は十分な実用性を示しているものと考えることができる。

7. 結 言

完全可制御かつ完全可観測な線形定係数の制御対象が縮約可能な系とみなされる場合に、不完全状態情報の下でこれを擬似的に準最適制御するための方策を論議し、

i) 双対縮約系を導入して、縮約系が完全可制御かつ完全可観測となるための必要十分条件は、縮約行列が最高階数をもつことであることを示し、

ii) 完全可観測な縮約モデルを仮想することにより固有値の任意な共役配置が可能な縮約状態推定系とその漸近推定条件を与えた。縮約状態の推定は線形関数状態推定の特殊例と考えられるが、縮約条件の下での推定系は完全可観測な縮約モデルに対する Luenberger 推定系に帰着することが示された。また

iii) 擬似準最適制御系における制御と推定問題の分離性を明らかにし、系の安定性が制御系と推定系の独立な安定化によって達成されることを示し、さらに

iv) 擬似準最適制御系における相対的準最適性の限

界に関する表現が2次形式ペンシルの特性根を用いることにより、初期条件に何ら仮定を設けることなく与えられることを示した。

積分器増設系に本論文の結果を適用することにより持続外乱の下での定値制御系や、また追値制御系に対しても応用することが可能であるが、これらについては稿を改めて論じたい。また、評価関数の相対増分率を最小化するための設計法などは今後の課題とする。

謝辞 文部省宇宙科学研究所西村敏充教授から本論文に対する貴重な助言を戴いた。ここに記して著者の深甚の謝意を表わす。

参 考 文 献

- 1) 前田：大規模な線形システムの低次元化モデルとシステム構造，システムと制御，**22-11**，655/664 (1978)
- 2) M. Aoki：Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-13-3**，246/253 (1981)
- 3) 神藤，岩住：Aggregation 法による各種低次元化モデルの表現法，計測自動制御学会論文集，**17-1**，139/146 (1981)
- 4) M.R. Chidambara and R.B. Schainker：Lower Order Generalized Aggregated Model and Suboptimal Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-2**，175/180 (1971)
- 5) S. Kawaji：Design Procedure of Observer for the Linear Functions of State, International J. of Control, **32-3**，381/394 (1980)
- 6) R. Penrose：On Best Approximate Solution of Linear Matrix Equations, Proc. Camb. Phil. Soc. **52-1**，17/19 (1956)
- 7) H. Kimura：Geometric Structure of Observers for Linear Feedback Control Law, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22-5**，846/855 (1977)
- 8) D.G. Luenberger：An Introduction to Observers, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-16-6**，596/602 (1971)
- 9) W.M. Wonham：Dynamic Observers：Geometric Theory, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-15-2**，258/259 (1970)
- 10) W.M. Wonham：Linear Multivariable Control：Geometric Approach, Springer (1979)
- 11) R.E. Kalman：Contribution to the Theory of Optimal Control, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **5**，102/119 (1960)
- 12) S.S. Lamba and S.V. Rao：On Suboptimal Control via the Simplified Model of Davison, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-4**，448/450 (1974)
- 13) F.R. Gantmacher：The Theory of Matrices, **1**, Chelsea (1960)