ポアソン分布からのずれをもつ確率現象の マスタ方程式による一考察[†]

真 山 紀*

A Consideration of Poisson-Like Probabilistic Phenomena by the Master Equation

Osamu MAYAMA*

An approximation method for cutting off a moment hierarchy in moment-calculations by the master equation is studied based on a Poisson distribution.

A condition of requiring a Poisson distribution is presented in terms of transition rates. This report proposes a simple model for transition rates that are quadratic in terms of a random variable and permit transitions only between each state $(0, 1, 2, \dots)$ and the nearest. Using this model, the method is explained. The first two order moments are obtained for the steady state as time t tends to infinity. The approach is applied to the study of a traffic flow.

Key Words: nonlinear system, master equation, moment, Poisson-like distribution, traffic flow

1. はじめに

確率現象の研究には、有効な多くの方法がある。たとえば、得られた観測量から母集団を推定する方法があり、また系の機構から観測量を求める方法がある。本論文では系の非線形性と観測量の関係を、マスタ(master)方程式を用い考察する。マスタ方程式における遷移率(単位時間当りの遷移確率)が確率変数について非線形のときは多くの場合、この方程式から得られる1次モーメントの方程式が非線形となり、また n 次モーメントの方程式に $n+1$ 次以上のモーメントの項が現われて n 次モーメントの方程式は閉じない。

このモーメント階層を閉じる系統的な方法は Van Kampen により研究された^{1),2)}。彼は微小なパラメータを用いてマスタ方程式を展開し、さらにその漸近解が Gaussian 分布であることを明らかにした。彼の理論の条件は久保、松尾、北原³⁾、Nicolis、Prigogine⁴⁾および鈴木^{5),6)}が強調したが、それは分布の最大値を与える状態値に比べてゆらぎが小さいことである。確率変数の状態値がすべて非負の整数値なら、平均値の減少につれ状態値の離散的性質は無視できなくなり、ゆらぎは小さくない典型的な一例はポアソン分布である。ポアソン分布は確率論において基本的で、また広汎に用いられている重要な分布である^{7),8)}。平均値が大きくなるとポアソン分布は当然対応する Gaussian 分布となる⁹⁾。

待ち行列の計算における入力など実際の問題で、独立事象のポアソン分布やこの基本的な分布との関係が不明な分布を用いることが少なくない。しかし一般に系には相互作用が存在し、この非線形効果まで含めてポアソン分布からのずれを考慮すべき場合がある。

本論文では、閉じたモーメントを系統的に得る近似理論をポアソン分布をもとに考察する。2章で、着目したマスタ方程式の時間依存のない解がポアソン分布となるための、確率変数について線形・非線形によらない、遷移率の条件を明らかにする。さらに、確率変数について2次の非線形となる、遷移率の簡潔なモデルを与える。3章で、このモデルを用い近似理論を説明する。そして、モデルの係数と確率分布形の関係を引く。4章で、相互作用の存在する系の例として、実測された交通流がポアソン分布ではなく、常にある種の分布形になることを明らかにする¹⁰⁾。さらに、2,3章におけるモデルと理論をこの統計的性質の研究に応用する。5章で結語を与える。

[†] 第25回自動制御連合講演会で発表(昭57・11)

* 東海大学工学研究科 東京都渋谷区富ヶ谷 2-28-4

* Course of Applied Science, Tokai University, Shibuya-ku, Tokyo

(Received March 9, 1984)

(Revised February 12, 1985)

2. 条件とモデル

連続時間で離散的確率過程を考える。時刻 t での系の状態を示す確率変数を X 、時刻 t での状態 X の確率を $P(X, t)$ 、状態 X から状態 X' への遷移率を $W(X, X')$ とする。さらに、状態値は非負の整数値、遷移率は X にのみ依存し $X' = X-1, X+1$ のとき正で $|X - X'| > 1$ のとき 0 とする。

これら諸量によるマスタ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = & W(X+1, X)P(X+1, t) \\ & + W(X-1, X)P(X-1, t) \\ & - P(X, t) \{W(X, X+1) \\ & + W(X, X-1)\} \\ & \text{for } X=1, 2, 3, \dots, \quad (2.1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = & W(X+1, X)P(X+1, t) \\ & - W(X, X+1)P(X, t) \\ & \text{for } X=0. \quad (2.1b) \end{aligned}$$

マスタ方程式(2.1)における遷移率に関する確率の保存は

$$W(X, X) = \begin{cases} -\{W(X, X+1) + W(X, X-1)\} \\ \text{for } X=1, 2, 3, \dots, \\ -W(X, X+1) \text{ for } X=0. \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.1)式の時刻 $t \rightarrow \infty$ での時間依存のない解 (time-independent solution) $P(X, \infty)$ は、確率を正と仮定し、次式から得られる。

$$W(X, X-1)P(X, \infty) = W(X-1, X)P(X-1, \infty) \\ \text{for } X=1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

(2.3)式を逐次的に用い

$$P(X, \infty) = P(0, \infty) \prod_{M=1}^X \frac{W(M-1, M)}{W(M, M-1)}, \quad (2.4a)$$

ここで、規格化条件 $\sum_{X=0}^{\infty} P(X, \infty) = 1$ から

$$P(0, \infty) = \left[\sum_{X=1}^{\infty} \left\{ \prod_{M=1}^X \frac{W(M-1, M)}{W(M, M-1)} \right\} \right]^{-1}. \quad (2.4b)$$

すべての X で $0 < P(X, \infty) < 1$ となるのは $\lim_{X \rightarrow \infty} \{W(X-1, X)/W(X, X-1)\} < 1$ の場合である。

(2.4)式から、 $P(X, \infty)$ は $W(X-1, X)$ と $W(X, X-1)$ の比で決定され、ポアソン分布となる条件は

$$\frac{W(X-1, X)}{W(X, X-1)} = \frac{K}{X} \quad \text{for } X=1, 2, 3, \dots, \quad (2.5)$$

ここで、 K は正の定数でポアソン分布の1次モーメントとなる。

つぎに、遷移率 $W(X, X')$ の簡潔な一つのモデルを

Fig. 1 Schematic of transition rate $W(X, X')$ from X to $X' (X \neq X')$ for $X=1, 2, 3, \dots, N-1$

与える。Fig. 1 が示すように、 Ω を系の大きさを表わすパラメータ、 λ/Ω , a/Ω および b/Ω を正の定数、 N を X の上限として、異なる状態間の遷移率を

$$W(X, X+1) = \Omega \frac{\lambda}{\Omega} \left(1 + \frac{a}{\Omega} \frac{X}{\Omega} \right) \\ \text{for } X=0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.6a)$$

$$W(X, X-1) = \Omega \frac{\lambda}{\Omega} \left(1 + \frac{b}{\Omega} \frac{X}{\Omega} \right) \\ \text{for } X=1, 2, 3, \dots, N, \quad (2.6b)$$

と仮定する。(2.6)式は、 X と Ω について X/Ω の、適当な係数をもつ冪展開を表わす。線形項の係数 a/Ω と非線形項の係数 b/Ω が十分小さいときは、遷移率における X/Ω の主要な摂動となる。パラメータ Ω が十分大きいときは、係数 a/Ω , b/Ω の項のない遷移率となる。

(2.6)式における X の上限と(2.1)式から、マスタ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = & -\Omega \Lambda P(X, t) \\ & + \Omega \frac{X+1}{\Omega} \left(1 + B \frac{X+1}{\Omega} \right) P(X+1, t) \\ & \text{for } X=0, \quad (2.7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = & \Omega \left(\Lambda + \Lambda A \frac{X-1}{\Omega} \right) P(X-1, t) \\ & - \Omega \left\{ \Lambda + (\Lambda A + 1) \frac{X}{\Omega} + B \frac{X}{\Omega} \frac{X}{\Omega} \right\} P(X, t) \\ & + \Omega \left(\frac{X+1}{\Omega} + B \frac{X+1}{\Omega} \frac{X+1}{\Omega} \right) P(X+1, t) \\ & \text{for } 0 < X < N, \quad (2.7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = & \Omega \Lambda \left(1 + A \frac{X-1}{\Omega} \right) P(X-1, t) \\ & - \Omega \frac{X}{\Omega} \left(1 + B \frac{X}{\Omega} \right) P(X, t) \\ & \text{for } X=N, \quad (2.7c) \end{aligned}$$

ここで、 $\Lambda = \lambda/\Omega$, $A = a/\Omega$ および $B = b/\Omega$ 。状態 X の上限にではなく系の機構に着目するので極限 $N \rightarrow \infty$

をとる(注1). したがって, X が 1 次モーメントの値より増加するにつれ $P(X, t)$ は急速に減少する必要がある. (2.4) 式から, 時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常解 (steady solution: 記号 $P(X, \infty)$ を再び用いる) は

$$P(X, \infty) = \left[1 + \sum_{X=1}^{\infty} \left\{ \prod_{M=1}^X \frac{A \left(1 + A \frac{M-1}{\Omega} \right)}{\frac{M}{\Omega} \left(1 + B \frac{M}{\Omega} \right)} \right\} \right]^{-1} \cdot \prod_{M=1}^X \frac{A \left(1 + A \frac{M-1}{\Omega} \right)}{\frac{M}{\Omega} \left(1 + B \frac{M}{\Omega} \right)}. \quad (2.8)$$

定常解(2.8)がポアソン分布となる場合の 1 次モーメントは, (2.6a) 式からの $W(X-1, X)$ ($X=1, 2, 3, \dots, N$) および (2.6b) 式の $W(X, X-1)$ において $N \rightarrow \infty$ として (2.5) 式へ代入し,

$$\langle X(\infty) \rangle = \begin{cases} \Omega A \left(1 - \frac{A}{\Omega} \right) & \text{for an } A \text{ expression,} \\ \Omega A - \frac{1}{1 + \frac{B}{\Omega}} & \text{for a } B \text{ expression,} \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで, $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均. したがって, B/Ω は A/Ω のロジスティック変換 $B/\Omega = \frac{A/\Omega}{1 - A/\Omega}$ であり, 不等式 $B > A$, $A > \langle X(\infty) \rangle / \Omega$ および $\Omega > A$ を得る. パラメータ Ω には下限がある.

具体例(2.9)が示すように, 条件(2.5)は定常分布が系の線形, 非線形性によらず厳密にポアソン分布となりを示している.

3. 近似理論

極限 $N \rightarrow \infty$ においてマスタ方程式(2.7)の両辺に X^n を掛けアンサンブル平均から, X の n 次モーメントの時間変化を表わす方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle X^n(t) \rangle &= \Omega \sum_{M=0}^{n-1} {}^n C_M \left[\Omega \langle X^M(t) \rangle \right. \\ &\quad + \{ A + (-1)^{n-M} \} \frac{\langle X^{M+1}(t) \rangle}{\Omega} \\ &\quad \left. + (-1)^{n-M} B \frac{\langle X^{M+2}(t) \rangle}{\Omega^2} \right], \quad (3.1) \end{aligned}$$

ここで ${}^n C_M = \frac{n!}{M!(n-M)!}$ (注2). (3.1) 式は右辺に X の $n+1$ 次モーメントの項を持つので閉じない. この

(注1) 極限 $N \rightarrow \infty$ および $a=b=0$ なら, 確率変数 X について線系となる(2.6)式は時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常分布として 1 次モーメントが有限値 λ のポアソン分布を与える.

(注2) 極限 $N \rightarrow \infty$ において, マスタ方程式(2.7)は確率

モーメント階層を X のモーメントそれ自身を用い閉じるのは困難なので, $\Delta X(t) \equiv X - \langle X(t) \rangle$ を用い X の 1 次モーメントの時間変化を表わす方程式を,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\langle X(t) \rangle}{\Omega} &= A - (1 - A A) \frac{\langle X(t) \rangle}{\Omega} - B \left(\frac{\langle X(t) \rangle}{\Omega} \right)^2 \\ &\quad - B \frac{\langle (\Delta X(t))^2 \rangle}{\Omega} \frac{1}{\Omega}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

と変換する. 時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常状態について(3.2)式は

$$\begin{aligned} 0 &= A - (1 - A A) \frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} - B \left(\frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} \right)^2 \\ &\quad - B \frac{\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle}{\Omega} \frac{1}{\Omega}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

同様に, X の 2 次モーメントの時間変化を表わす方程式を時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常状態について,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A + \frac{1}{\Omega} \right) \frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} - \left(1 - A A - B \frac{1}{\Omega} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} \right)^2 - B \left(\frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} \right)^3 \\ &\quad - \left(1 - A A - B \frac{1}{\Omega} \right) \frac{\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle}{\Omega} \frac{1}{\Omega} \\ &\quad - 3B \frac{\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle}{\Omega} \frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} \frac{1}{\Omega} \\ &\quad - B \frac{\langle (\Delta X(\infty))^3 \rangle}{\Omega} \frac{1}{\Omega^2}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

と変換する.

(3.3), (3.4) 式において, $\langle X(\infty) \rangle$, $\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle$ そして $\langle (\Delta X(\infty))^3 \rangle$ と現われるモーメント階層を閉じるため, はじめに確率母関数

$$G(Z, t) = \sum_{X=0}^{\infty} P(X, t) Z^X \quad (|Z| \leq 1),$$

を用いる. 時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常状態について, ポアソン分布の確率母関数は

$$G(Z, \infty) = \exp \{ \langle X(\infty) \rangle (Z - 1) \}, \quad (3.5)$$

となり, 両式を Z で 3 階微分し $Z=1$ として

$$\langle X(\infty) \rangle \langle X(\infty) - 1 \rangle \langle X(\infty) - 2 \rangle = \langle X(\infty) \rangle^3, \quad (3.6)$$

を得る. 3 次モーメントに (3.6) 式を用い, ポアソン分布の 1 次から 3 次のモーメントの関係は, Ω も考慮して

$$\nabla \text{ 母関数 } G(Z, t) = \sum_{X=0}^{\infty} P(X, t) Z^X \quad (|Z| \leq 1) \text{ から,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(Z, t) &= \Omega (Z - 1) \left\{ A G(Z, t) + \left(A A \frac{Z}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B \frac{1}{\Omega^2} \right) \frac{\partial}{\partial Z} G(Z, t) - B \frac{Z}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} G(Z, t) \right\}, \end{aligned}$$

と変換される. n が小さい場合, 上式右辺がすべての項に $(Z-1)$ を持つので両辺を Z で n 階偏微分して $Z=1$ と, (3.1) 式を容易に得る.

$$\frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} = \frac{\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle}{\Omega} = \frac{\langle (\Delta X(\infty))^3 \rangle}{\Omega} \quad (3.7)$$

つぎに, (3.3), (3.4)式における $\langle X(\infty) \rangle / \Omega$ を

$$\frac{\langle X(\infty) \rangle}{\Omega} = x + \varepsilon x_1 + O_\varepsilon(\varepsilon^2), \quad (3.8)$$

とする。ここで, ε はパラメータ Ω の逆数, $O_\varepsilon(\varepsilon^2)$ は ε の高次項, x と x_1 は ε について各オーダー項の係数を。1次モーメント (2.9) のポアソン分布は, $B/\Omega < 1$ のとき (3.8) 式を満たす。さらに, $\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle / \Omega$ と $\langle (\Delta X(\infty))^3 \rangle / \Omega$ を (3.8) 式同様,

$$\frac{\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle}{\Omega} = y + O_\varepsilon(\varepsilon^1), \quad (3.9a)$$

$$\frac{\langle (\Delta X(\infty))^3 \rangle}{\Omega} = z + O_\varepsilon(\varepsilon^1), \quad (3.9b)$$

とする。 x, y および z は ε について1次の項で, ポアソン分布の場合 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき (3.7) 式から $x=y=z$ となる。(3.8) 式における x および εx_1 と (3.9) 式における y および z は, 次節で1次と2次のモーメントを得るのに十分な, ε についてのオーダー項になる。

そして, ε についてオーダー評価する。(3.8), (3.9a) 式を (3.3) 式へ代入し $\varepsilon \langle X(\infty) \rangle$ と $\varepsilon \langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle$ を一定にして $\varepsilon \rightarrow 0$ において, 右辺における ε について同じオーダー項を集め0とおく。したがって,

$$A - (1 - \Lambda A)x - Bx^2 = 0 \quad \text{in terms of } \varepsilon^0, \quad (3.10a)$$

$$By + (1 - \Lambda A + 2Bx)x_1 = 0 \quad \text{in terms of } \varepsilon^1, \quad (3.10b)$$

を得る。同様に, (3.8), (3.9) 式を (3.4) 式へ代入し, $\varepsilon \langle X(\infty) \rangle, \varepsilon \langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle$ および $\varepsilon \langle (\Delta X(\infty))^3 \rangle$ を一定にして $\varepsilon \rightarrow 0$ において, 右辺における ε について同じオーダー項を集め0とおく。したがって,

$$x \{ A - (1 - \Lambda A)x - Bx^2 \} = 0 \quad \text{in terms of } \varepsilon^0, \quad (3.11a)$$

$$(1 + Bx)x + \{ A - 2(1 - \Lambda A)x - 3Bx^2 \} x_1 - (1 - \Lambda A + 3Bx)y = 0 \quad \text{in terms of } \varepsilon^1, \quad (3.11b)$$

を得る。

(3.10), (3.11) 式から x と y は

$$x = (\Lambda A - 1 + \sqrt{D}) / (2B), \quad (3.12a)$$

$$y = \Lambda(1 + Ax) / \sqrt{D}, \quad (3.12b)$$

ここで $D = (\Lambda A - 1)^2 + 4\Lambda A$ 。

上式の x と y は $A \rightarrow 0$ のとき $x = (-1 + \sqrt{1 + 4\Lambda A}) / (2B)$

Fig. 2 Variation of the number of passing cars per hour

Fig. 3 Relationship between the sample distribution $P(X)$ of observed values X per 15 sec from 18:00 to 19:00 and the Poisson distribution with the same mean

$\langle (2B)$ と $y = \Lambda / \sqrt{1 + 4\Lambda A}$ になる。他方 $B \rightarrow 0$ のときは (3.10), (3.11) 式から $x = \Lambda / (1 - \Lambda A)$ と $y = \Lambda / (1 - \Lambda A)^2$ を得, $1 - \Lambda A > 0$ となる。

パラメータ ε について統計量を一定にした $\varepsilon \rightarrow 0$ において x_1 は y の決定に用いられ, 1次モーメントの (3.3) 式から閉じた1次モーメント x を, 2次モーメントについて分散の (3.4) 式から閉じた分散 y を順次に得た。

(3.12) 式から y と x の比は

$$\frac{y}{x} = \Lambda \left(A + \frac{1}{x} \right) / \sqrt{D}, \quad (3.13)$$

(3.13) 式は観測量の分布形が, 同じ平均値 x のポアソン分布に比較し, 狭いか広いかを表わす。すなわち, 条件 $1 - \Lambda A + 2\Lambda B > 0$ で,

$$y > x > \Lambda \quad (\text{wider}) \quad \text{for } A > B, \quad (3.14a)$$

$$y = x = \Lambda \quad (\text{the Poisson distribution})$$

$$\text{for } A = B, \quad (3.14b)$$

$$y < x < \Lambda \quad (\text{narrower}) \quad \text{for } A < B. \quad (3.14c)$$

平均値が大きくなると、2章におけるポアソン分布は Gaussian 分布、3章における近似は Gaussian 近似となる。

4. 応 用

モデル(2.6)を高速道路上の交通流の研究に用いる。

秦野市内の東名高速道路上に固定した観測地点で、下り方向に通過する15秒当りの車の台数が、12:00から24時間連続測定された(注3)。

はじめに、実測値から1時間当りの交通量を調べた。Fig. 2が示すように、1時間当りの交通量は1日内で大きく変化する(注4)。

つぎに、1時間当りの(相対)度数分布を調べた。この分布はつぎの性質を常に示した。Fig. 3が示すように、度数分布の値は平均値の同じポアソン分布に比べ、ピーク付近で小さく両裾付近で大きい。この分布形は2時間当りと3時間当りの度数分布からも確認された。

実測値から明らかにされたこの性質の研究のため、モデル(2.6)における Ω を長さ、 X/Ω を時刻 t での区間 Ω に存在する車の台数(つまり密度 X/Ω)、 N を区間 Ω に存在できる車の台数の上限とした(交通流について(2.6)式を付録で与える)。(3.12)式は次式に変換された。

$$A = (x + Bx^2 - A)/(Ax), \quad (4.1a)$$

$$B = (x^2 - Ay)/\{x^2(y - x)\}, \quad (4.1b)$$

ここで、度数分布は Fig. 3 が示すように常に分散が

平均値より大きい($y > x$)ので $x^2/y > A$ 。

交通流で A の値は直接明らかでなく A と B は(4.1)式から得られるので、数値計算における A の初期値をつぎのように得た。度数分布はポアソン分布から大きくずれておらず A, x および y が同じオーダーで、また高速道路上の車流の度数効果は小さく X/Ω の2次の係数 B が小さいとし、 x^2/y の値を整数化し初期値とした。各 A の値について、厳密な定常解(2.8)から X の上限値200で計算したが、より大きい上限値の変化に分布はほとんど同じであった。

Table 1に、Fig. 2における典型的な4例の値を示す。すなわち、一定な交通量(18:00-19:00)、少ない交通量(3:00-4:00)、急速に変化している交通量(6:00-7:00)そして多量の交通量(11:00-12:00)の場合である。Table 1において18:00-19:00間と6:00-7:00間の値を比較すると、小さい A の場合の平均値と分散は大きい A の場合より、係数 A と B のため大きい値になりうることが示される。Fig. 4(a), (b), (c)および(d)に、Table 1に対応する分布を示す。係数 A の値は小数2位まで得れば十分である。

度数分布と理論の与える分布の一致は良い。モデル(2.6)は高速道路上の交通流の統計的性質を説明する。

5. おわりに

系の機構と観測量の関係をマスタ方程式を用い考察

Table 1 Values of four cases (a), (b), (c) and (d).
The asterisk indicates the n -th decimal place omitted for A . Referred to Fig. 4.

time interval (the number of passing cars)	observed values per 15 seconds		theoretical values ($\Omega=1$)					
	average	variance	*	$\langle X(\infty) \rangle$	$\langle (\Delta X(\infty))^2 \rangle$	A	A	B
(a) 18:00—19:00 (1183)	4.929	7.641	1	4.716	7.166	3.000	0.165	0.020
			2	4.826	7.379	3.100	0.134	0.009
			4	4.926	7.619	3.179	0.112	0.0001
(b) 3:00—4:00 (325)	1.354	1.487	1	0.614	0.838	1.000	2.188	1.423
			2	1.127	1.249	1.200	0.323	0.202
			4	1.352	1.481	1.233	0.073	0.0009
(c) 6:00—7:00 (1352)	5.633	10.616	1	4.734	9.064	2.000	0.510	0.066
			2	5.521	10.237	2.900	0.179	0.006
			4	5.632	10.607	2.989	0.157	0.00002
(d) 11:00—12:00 (2022)	8.425	16.553	1	8.181	15.725	4.000	0.149	0.008
			2	8.342	16.208	4.200	0.124	0.003
			4	8.421	16.496	4.288	0.115	0.000004

(注3) 観測地点付近は信号機、インターチェンジや車線の変化に交通流が影響されていないと期待された。

(注4) Fig. 2において11:00から12:00の量は、土曜日の東京方面からの交通流出を示している。

Fig. 4 Distributions, $P(X)$ s, of values X per 15 sec for four cases; (a) from 18:00 to 19:00, (b) 3:00 to 4:00, (c) 6:00 to 7:00, (d) 11:00 to 12:00. The broken lines show:

—●— the sample distribution per hour,
 —○— the Poisson distribution with the same mean,
 { — — — } the theoretical distribution whose λ takes the value of x^2/y omitted below { one } decimal
 { — · — } { two } decimal
 { · · · } { four } place (s).

した。(I) マスタ方程式(2.1)の時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常解がポアソン分布となる, 確率変数について線形・非線形によらない, 遷移率の条件を明らかにした。(II) 遷移率が確率変数について非線形の場合はマスタ方程式から得られるモーメントの方程式にモーメント階層が現われるが, 確率変数について2次となる遷移率のモデルを与え, モーメント階層を閉じる近似理論を示した。すなわち遷移率においてパラメータ $1/\varepsilon$ を用い確率変数 X を εX とした後, 時刻 $t \rightarrow \infty$ での定常状態についてモーメントの方程式を(3.3), (3.4)式に変換し, ポアソン分布の性質(3.7)式から, ε を用いオーダ評価した。 ε について統計量を一定にした $\varepsilon \rightarrow 0$ において, 閉じた1次モーメントをそして2次モーメントについて閉じた分散を順次に得た。さらに, モデル

の係数と確率分布形の関係を示した。(III) 実測した交通流が常にポアソン分布から一様にずれていることを明らかにした。この統計的性質の研究に, モデルと理論を応用し有効性を示した。

ご指導, 討論と激励をいただいた黒田義輝東海大学教授に感謝します。4章の測定を組織され, ご討論いただいた谷口旦東海大学教授に感謝します。ご討論いただいた佐光興亜東海大学助教授に感謝します。

《付 録》

交通流について(2.6)式を導く。

ポアソン分布からずれる主な原因を, 密度効果として車同士に生じる相互作用(相互依存性)と推量する。この相互作用を区間 Ω に存均する車の台数(つ

まり密度 X/Ω の単位時間当りの増加と減少で表わし、微小時間 ($\Delta t \rightarrow 0$) において区間 Ω に存在する車の台数の変化を ± 1 台とし、これ以上の変化を無視する。

遷移率

$$\begin{cases} W(X, X+1) = \Omega f_1(X/\Omega) \\ W(X, X-1) = \Omega f_2(X/\Omega) \end{cases}$$

を仮定する。ここで、 f_1 と f_2 は密度 X/Ω の関数。マスタ方程式において上式を X/Ω の冪展開

$$\begin{cases} W(X, X+1) = \Omega \left(a_0 + a_1 \frac{X}{\Omega} + \dots \right) \\ W(X, X-1) = \Omega \left(b_0 + b_1 \frac{X}{\Omega} + \dots \right) \end{cases}$$

で近似可能とする。境界条件は $X=0$ において、 $W(X, X-1)=0$ となり $b_0=0$ 。相互作用がない場合、車流はポアソン分布となる。その時刻 $t \rightarrow \infty$ での平均値を λ として、

$$\begin{cases} W(X, X+1) = \Omega A \left(A = \frac{\lambda}{\Omega} \right) \\ W(X, X-1) = \Omega \frac{X}{\Omega} \end{cases}$$

とすることができ $a_0=A, b_1=1$ 。冪展開の主要な項での近似から (2.6) 式を得る。

ポアソン分布をずらす密度効果として、区間 Ω に

存在する車の台数の単位時間当り増加の係数が A 、減少の係数が B となる。確率変数 X について線形な項の係数は A 、非線形な項の係数は B である。

参 考 文 献

- 1) N.G. Van Kampen: A Power Series Expansion of the Master Equation, Can. J. Phys., **39**, 551/567 (1961)
- 2) N.G. Van Kampen: Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North-Holland (1981)
- 3) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara: Fluctuation and Relaxation of Macrovariables, J. Stat. Phys., **9-1**, 51/96 (1973)
- 4) G. Nicolis and I. Prigogine: Self-Organization in Nonequilibrium Systems, 242, Wiley-Interscience (1977)
- 5) M. Suzuki: Scaling Theory of Non-Equilibrium Systems near the Instability Point. II, Prog. Theor. Phys., **56-2**, 477/493 (1976)
- 6) M. Suzuki: Passage from an Initial Unstable State to a Final Stable State, Adv. Chem. Phys., **46**, 195/278 (1981)
- 7) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 135, Wiley-Interscience (1957)
- 8) M. S. Bartlett: An Introduction to Stochastic Processes (3rd ed.), 49, Cambridge Univ. Press (1978)
- 9) L. D. Landau and E. M. Lifshitz: Statistical Physics (3rd ed.), 347, Pergamon (1980)
- 10) 土田, 真山, 谷口: 車輛の流れの確率過程論的モデル, 第24回自動制御連合講演会前刷, 133/134 (1981)