AR モデル表現に基づいたデジタル 制御系の簡易設計法†

足 立 修 一*・佐 野 昭*

Simplified Method for Digital System Design
Based on AR Model Representation

Shu-ichi ADACHI* and Akira SANO*

Delayed autoregressive (DAR) model representation plays an important role in the design of a digital controller based on the partial model-matching and a model reference adaptive controller. Paying attentions to the decay of the AR coefficients in the model, we give a simplified algorithm for approximately solving the Riccati equation to calculate control gains. If the number of the AR coefficients increases from n to $n+1$, the computational results up to the order n can be retained and only the calculations associated with the additional $(n+1)$ th term are needed; therefore the computational burden can remarkably be reduced. Utilizing the approximated solution, we present the simple structure of the digital PD controller and the digital I-PD controller, and discuss the accuracy of the proposed algorithm through numerical simulations.

Key Words: digital control, Riccati equation, autoregressive model, optimal control, servo system

1. はじめに

デジタル制御系の設計において、制御対象を(AR 形モデル)+(むだ時間)モデルで表現する試みが行われている。例えば、時間応答の立場から部分的モデルマッチングを実現するデジタルコントローラの設計²⁾、非最小位相推移系という条件を緩和するために前述のモデル表現を用いたモデル規範形適応制御³⁾、さらには連続時間系の場合の北森氏の分母系列表現⁴⁾

などにこのようなアプローチがみられる。

制御対象を、(AR 形)+(むだ時間)の離散時間モデルで表現した場合、その AR 係数は次第に減衰するケースが多いが、本論文ではこの係数の減衰性に着目して、Riccati 方程式の解、すなわちデジタルコントローラのゲインを近似的ではあるが極めて簡便に求める新しい方法を提案する。

AR 係数の項数が大きくなるにつれて、行列計算の複雑さは増大するが、本手法による計算量は手計算でも可能な程度のものであり、しかも項数 n から $n+1$ へ増加させたとき、 n 項までの計算結果をそのまま保存し、 $n+1$ 番目に対応する計算結果を新たに加えるだけで求まるという特徴を有しているため、モデル項数の選定も比較的自由に行える利点がある。

最後に、この近似計算法を利用して、デジタル PD 制御、I-PD 制御についての設計法を与え、計算例を通してその精度の検討を行う。

2. 問題の説明

1 章で説明したように制御対象は、(AR 形)+(むだ時間)表現で与えられるとする。

$$A(z^{-1})y(k) = bz^{-L}u(k-1) \quad (1)$$

ただし、

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}$$

むだ時間 L については、 $L=0$ のときの制御則から $L>0$ の場合の解が容易に求まるので⁵⁾、以下では $L=0$ と仮定して議論を進める。このとき、(1)式を状態変数表示すると、

$$\lambda(k) = \Phi\lambda(k-1) + ru(k-1) \quad (2a)$$

$$y(k) = (1, 0, \dots, 0)\lambda(k) \quad (2b)$$

となる。ただし、 Φ は $n \times n$ 行列、 r 、 $\lambda(k)$ は n 次元ベクトルでそれぞれつぎのように与えられる。

† 第 23 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 59・7)

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received October 3, 1984)

(Revised February 7, 1985)

$$\Phi = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix}$$

一般に制御対象が (AR 形) + (むだ時間) 表現できる場合、 n が増加するにつれ、係数は次第に減衰する。そこで、以下ではしばしば、係数 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ にある仮想的な減衰パラメータ ε を導入して、 $\{\alpha_1, \alpha_2 \varepsilon, \dots, \alpha_n \varepsilon^{n-1}\}$ と表わすことにする。

さて、評価指標が、

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\lambda^T(k) Q \lambda(k) + \rho \{u(k)\}^2] \quad (3)$$

$$Q = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$$

のとき、この J を最小にする最適レギュレータ制御則 $u^*(k)$ は、次式で与えられる。

$$u^*(k) = -g^{*T} \lambda(k) \quad (4)$$

ここで、 g^* はレギュレータ最適ゲインで、

$$g^{*T} = (\rho + r^T \Sigma^* r)^{-1} r^T \Sigma^* \Phi \quad (5)$$

であり、 Σ^* はつぎの定常 Riccati 方程式を満たす。

$$\Sigma = Q + \Phi^T \Sigma \Phi - \Phi^T \Sigma r (\rho + r^T \Sigma r)^{-1} r^T \Sigma \Phi \quad (6)$$

ここで、(6) 式は非線形方程式であるために、一般には解析的に解くことはできず、反復計算、あるいは symplectic 行列を利用した代数的方法⁷⁾ によって定常解を得ている。しかし、制御対象の項数 n が大きい場合には、行列 Φ のサイズも大きくなり、定常解を求めるための計算時間が増大するうえ、系表現の展開項数 n を、例えば $n+1$ へ変更した場合にも初めから計算をやり直す必要がある。

そこで、本論文では制御対象の係数系列 $\{a_1, \dots, a_n\}$ に仮想的な減衰パラメータ ε を導入することにより、Riccati 方程式の定常解を近似的にはあるが解析的に求める簡単な方法を提案し、デジタル PD および I-PD 制御系の簡便な設計法を与える。

3. Riccati 方程式の近似解法

本章では、Riccati 方程式 (6) の解を前章の ε に関して係数比較を行うことによって、近似的ではあるが解析的に求める方法を提案する。まず、制御対象の係数の項数 (m とする) が 1 から n まで更新されるとき、近似解がどのような関係を満たしているかを調べる。

まず、 $m=1$ のとき、制御対象は次式で表わされる。

$$y(k) = -\alpha_1 y(k-1) + bu(k-1) \quad (7)$$

(7) 式を (6) 式に代入し、Riccati 方程式の解 ($\Sigma^{(0)}$: $n \times n$ 行列とおく) を要素別に計算すると、(1, 1) 要素 ($\sigma_{11}^{(0)}$ とおく) のみが値を持ち、次式を満たす。

$$b^2(\sigma_{11}^{(0)})^2 + \{\rho - b^2 - \rho(\alpha_1)^2\} \sigma_{11}^{(0)} - \rho = 0 \quad (8)$$

(8) 式は $\sigma_{11}^{(0)}$ に関する二次方程式なので、解は直ちに得られ、 $m=1$ の場合には解析的に正確な解が求まる。

つぎに $m=2$ のとき、制御対象は次式で表わされる。

$$y(k) = -\alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 \varepsilon y(k-2) + bu(k-1)$$

そして、Riccati 方程式の解 $\Omega^{(1)}$ ($n \times n$ 行列) を、

$$\Omega^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_{11}^{(1)} & \omega_{12}^{(1)} \\ \omega_{21}^{(1)} & \omega_{22}^{(1)} \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

とおき、これらを (6) 式に代入して要素別に計算すると、

$$\omega_{11}^{(1)} = [\rho(\alpha_1)^2 \omega_{11}^{(1)} + b^2 \omega_{11}^{(1)} + \rho - (b^2 \omega_{11}^{(1)} + 2\rho \alpha_1 \omega_{12}^{(1)})] (\rho + b^2 \omega_{11}^{(1)})^{-1} + \omega_{22}^{(1)} \quad (9a)$$

$$\omega_{12}^{(1)} = \rho \alpha_2 \varepsilon (\alpha_1 \omega_{11}^{(1)} - \omega_{12}^{(1)}) (\rho + b^2 \omega_{11}^{(1)})^{-1} \quad (9b)$$

$$\omega_{22}^{(1)} = \rho(\alpha_2 \varepsilon)^2 \omega_{11}^{(1)} (\rho + b^2 \omega_{11}^{(1)})^{-1} \quad (9c)$$

となるが、このままでは解析的に $\omega_{11}^{(1)}, \omega_{12}^{(1)}, \omega_{22}^{(1)}$ を決定するには複雑な形なので、つぎの仮定により近似解を得ることにする。

[仮定 1] Riccati 方程式の要素別の解の方程式 (たとえば (9) 式) において、制御対象に含まれる ε の次数よりも高次の項を無視する。

$m=2$ の場合には、制御対象は ε^2 以上の項を含まないので、仮定 1 より (9) 式において ε^2 以上の項を無視する。すなわち、 $\omega_{22}^{(1)} = 0$ となる。また、 $\omega_{11}^{(1)}, \omega_{12}^{(1)}$ をそれぞれつぎのようにおく。

$$\omega_{11}^{(1)} \triangleq \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{11}^{(1)} \varepsilon \quad (10a)$$

$$\omega_{12}^{(1)} \triangleq \sigma_{12}^{(1)} \varepsilon \quad (10b)$$

(10) 式を (9) 式に代入して整理する。まず、(1, 1) 要素において ε^0 項の係数を比較すると、

$$(\rho + b^2 \sigma_{11}^{(0)}) \sigma_{11}^{(0)} = \rho(\alpha_1)^2 \sigma_{11}^{(0)} + b^2 \sigma_{11}^{(0)} + \rho$$

となり、この式は (8) 式と一致する。すなわち、 $\sigma_{11}^{(0)}$ は既に求めた $m=1$ の結果を利用すればよく、 $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{12}^{(1)}$ は ε^1 項の係数比較を行うことにより、それぞれ次式より決定される。

$$\sigma_{11}^{(1)} = -2\rho \alpha_1 \sigma_{12}^{(1)} / (\beta \nu) \quad (11a)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \rho \alpha_1 \alpha_2 \sigma_{11}^{(0)} / \beta \quad (11b)$$

ただし、

$$\beta = \rho + b^2 \sigma_{11}^{(0)}, \quad \nu = 1 - (\rho \alpha_1 / \beta)^2$$

以上より、近似解 $\Omega^{(1)}$ は次式より求まる。

$$\Omega^{(1)} = \Sigma^{(0)} + \Sigma^{(1)} \varepsilon$$

ここで、 $\Sigma^{(1)}$ の各要素は(11)式で与えられる。

さらに、 $m=3$ のときの近似解 $\Omega^{(2)}$ を、

$$\Omega^{(2)} = \Omega^{(1)} + \Sigma^{(2)} \varepsilon^2$$

とおく。まず、 $\sigma_{13}^{(2)}$ 、 $\sigma_{23}^{(2)}$ は $m=2$ のときと同様に、 ε^2 項の係数比較より、それぞれつぎのように決定される。

$$\sigma_{13}^{(2)} = \rho \alpha_1 \alpha_3 \sigma_{11}^{(2)} / \beta \quad (12a)$$

$$\sigma_{23}^{(2)} = \rho (\alpha_2)^2 \sigma_{11}^{(2)} / \beta \quad (12b)$$

つぎに、 $\sigma_{12}^{(2)}$ について次式が導びかれる。

$$\begin{aligned} & (\omega_{11}^{(2)} + \sigma_{12}^{(2)} \varepsilon^2) \{(\rho + b^2 \omega_{11}^{(2)}) + \sigma_{12}^{(2)} \varepsilon^2\} \\ & = \rho \alpha_2 \varepsilon (\alpha_1 \omega_{11}^{(1)} - \omega_{12}^{(1)}) - \rho \alpha_1 \sigma_{13}^{(2)} \varepsilon^2 - \rho \alpha_2 \sigma_{12}^{(2)} \varepsilon^3 \\ & \quad + \rho \alpha_1 \alpha_2 \sigma_{12}^{(2)} \varepsilon^3 - b^2 (\omega_{11}^{(2)} + \sigma_{12}^{(2)} \varepsilon^2) \sigma_{12}^{(2)} \varepsilon^2 \quad (13) \end{aligned}$$

(13)式で ε^2 項の係数比較を行えば $\sigma_{12}^{(2)}$ は決定できるが、このままだと複雑な形なので、さらにつぎの仮定を設け、近似する。

[仮定 2] 1 項数前 $(m-1)$ においては、 ε^{m-1} 項の係数比較を行っただけで、 ε^m 項以降の係数については何も操作していないが、それらの項の係数比較はすべて正確に行われたものとする。

すなわち、(9b)式より、

$$\omega_{11}^{(2)} (\rho + b^2 \omega_{11}^{(1)}) = \rho \alpha_2 \varepsilon (\alpha_1 \omega_{11}^{(1)} - \omega_{12}^{(1)})$$

が得られるが、 $m=2$ のときには仮定 1 より、 ε^1 項の係数比較を行っただけで、上式に含まれる ε^2 項については何も操作していないので、実際には等号は成立していない。しかし、この式が成立しているものとし、(13)式を簡単化することが仮定 2 の方針である。この仮定 2 より、 $\Sigma^{(m)}$ の各要素を決定するときに、 $\Sigma^{(0)}$ と $\Sigma^{(m)}$ の各要素だけが影響し、 $\Sigma^{(i)} (i=1, \dots, m-1)$ の各要素を利用しないので、計算量はさらに低減化される。すると、 $\sigma_{12}^{(2)}$ は ε^2 項の係数比較より、つぎのように求まる。

$$\sigma_{12}^{(2)} = -\rho \alpha_1 \sigma_{13}^{(2)} / \beta \quad (14a)$$

また、同様にして $\sigma_{11}^{(2)}$ はつぎのようになる。

$$\sigma_{11}^{(2)} = -2\rho \alpha_1 \sigma_{12}^{(2)} / (\beta \nu) + \sigma_{22}^{(2)} / \nu \quad (14b)$$

このような手順を制御対象の項数 n まで繰り返すことにより、つぎのアルゴリズムで近似解は求まる。

[Σ の近似計算法]

$$\text{初期値: } \sigma_{11}^{(0)} = (-\tau + \sqrt{\tau^2 + 4\rho b^2}) / (2b^2) \quad (15)$$

ただし、

$$\tau \triangleq \rho - \rho(\alpha_1)^2 - b^2$$

ループ: $k=1, 2, \dots, n-1$

$$(i) \quad \sigma_{i,k-i+2}^{(k)} = \rho \alpha_i \sigma_{k-i+2}^{(k)} / \beta \quad (16a)$$

$$(i=1, 2, \dots, k+1)$$

$$(ii) \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{i+1,j+1}^{(k)} \quad (16b)$$

$$(i, j=2, \dots, k-1; k \geq 3)$$

$$(iii) \quad \sigma_{1j}^{(k)} = \sigma_{2,j+1}^{(k)} - \rho \alpha_1 \sigma_{1,j+1}^{(k)} / \beta \quad (16c)$$

$$(j=2, \dots, k; k \geq 2)$$

$$(iv) \quad \sigma_{11}^{(k)} = -2\rho \alpha_1 \sigma_{12}^{(k)} / (\beta \nu) + \sigma_{22}^{(k)} / \nu \quad (16d)$$

ただし、

$$\beta \triangleq \rho + b^2 \sigma_{11}^{(0)}, \quad \nu \triangleq 1 - (\rho \alpha_1 / \beta)^2$$

(15)、(16)式では、 α_k の代わりに $a_k (= \alpha_k \varepsilon^{k-1})$ を用いて表わしたので、 ε は現われない。このアルゴリズムで求めたものを各要素とする行列を $\Sigma^{(k)}$ とすると、Riccati 方程式の近似解 Ω は次式より求められる。

$$\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \{\Sigma^{(k)}\} \quad (17)$$

本計算法の特徴は、解析的に計算できる点だけではなく、項数を m から $m+1$ へ増加した場合、 $\Sigma^{(0)}, \dots, \Sigma^{(m-1)}$ までの結果を保存し、新たに $\Sigma^{(m)}$ の要素のみを計算して付け加えてやればよいという点にある。また、Riccati 方程式(6)を反復計算によって解くと、乗算回数は、 $M(2n^3 + 4n^2 + n + 1)$ となる。ただし、 M は反復の回数、 n は制御対象の項数である。それに対して本手法では、 $(5n^2 - 11n + 42)/2$ 回となり、 n が大きい制御対象では計算量は大幅に低減化されており、計算量の点からも実用的であると思われる。

近似解 Ω を用いたレギュレータゲイン g は(5)式より、

$$\begin{aligned} g^T &= (\rho + r^T \Omega r)^{-1} r^T \Omega \Phi \\ &= \frac{b}{\rho + b^2 \omega_{11}} [\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1n}] \Phi \end{aligned}$$

となる。ただし、 ω_{ij} は行列 Ω の (i, j) 要素である。よってゲイン g を求めるのに実際に用いられるのは、 Ω の第 1 行のみとなるので、(17)式の解 Ω の右下の要素を 0 と仮定したことは陽に影響しない。以上の議論は $L=0$ の場合を扱ったものであったが、 $L>0$ の場合にはつぎのようにしてゲイン g_c が決定できる。まず、制御則をつぎのようにおく。

$$u(k) = -g_c^T \lambda_c(k) \quad (18)$$

ただし、

$$\lambda_c(k) = [\lambda^T(k), u(k-L), \dots, u(k-1)]^T$$

このとき、ゲイン g_c は、 $L=0$ の場合のゲイン g から次式によって求まる⁶⁾。

$$g_c^T = g^T T_L \quad (19)$$

ただし、

$$T_L = [\Phi^L, \Phi^{L-1} r, \dots, \Phi r, r]$$

4. 級数展開による近似解法の説明

本章では、行列 Φ を ε の関数、 $\Phi(\varepsilon)$ とおき、級数展開の立場から近似解法を考え、前章のアルゴリズムとの関連性を明らかにする。

行列 $\Phi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ の近傍において ε の解析関数であると仮定すると、Riccati 方程式(6)の定常解 Σ^*

$=\Sigma(\varepsilon)$ は ε の解析関数となり、つぎのような無限級数に展開できる¹⁾。

$$\Sigma(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \Sigma^{(k)} \quad (20)$$

ただし、

$$\Sigma^{(k)} = \left. \frac{\partial^k \Sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0} \quad (21)$$

本章では、上添字 (k) は (21) 式のように ε に関して k 階微分した後に $\varepsilon=0$ とおく演算を表わすことにする。

まず、 $k=0$ のとき、 $\Sigma^{(0)}$ は (6) 式より次式を満たす。

$$\Sigma^{(0)} = \mathbf{Q} + \Psi^{(0)} - \mathbf{I}^{(0)} / \alpha^{(0)} \quad (22)$$

ただし、

$$\Psi \triangleq \Phi^T(\varepsilon) \Sigma(\varepsilon) \Phi(\varepsilon), \quad \Psi^{(0)} = \Psi|_{\varepsilon=0}$$

$$\mathbf{I} \triangleq \Phi^T(\varepsilon) \Sigma(\varepsilon) \mathbf{r} \mathbf{r}^T \Sigma(\varepsilon) \Phi(\varepsilon), \quad \mathbf{I}^{(0)} = \mathbf{I}|_{\varepsilon=0}$$

$$\alpha \triangleq \rho + \mathbf{r}^T \Sigma(\varepsilon) \mathbf{r}, \quad \alpha^{(0)} = \alpha|_{\varepsilon=0}$$

となり、(22) 式を要素別に考えると、 $\Sigma^{(0)}$ は前章の $\Sigma^{(0)}$ に一致する。さらに、1 階微分以降については、一般式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Sigma^{(i)} = & \Psi^{(i)} - \frac{1}{\alpha^{(0)}} \left[\mathbf{I}^{(i)} - \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} \Psi^{(j-1)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \Sigma^{(j-1)} \right\} - \frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(0)}} \mathbf{I}^{(0)} \right], \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式のままでは、微分の階数が増加するにつれて右辺の項数が増加し複雑な形となるので、一般に $\Sigma^{(i)}$ を explicit に計算することは容易でない。すなわち、(20) 式は Σ を求める計算式と考えることはできないが、前章の近似解法との関連性を調べることは有意義である。

まず、前章の仮定1は、(20) 式において有限次数 $(n-1)$ までで級数展開を打ち切ることにより、近似を行うことに対応している。つぎに、前章の仮定2より、(23) 式中で $\Sigma^{(i)}$ と $\Sigma^{(0)}$ の関係している項だけを取り出し、残りの項を無視することにより、(23) 式を近似すると、

$$\Sigma^{(i)} \triangleq \bar{\Psi}^{(i)} - \frac{1}{\alpha^{(0)}} \left(\bar{\mathbf{I}}^{(i)} - \frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(0)}} \bar{\mathbf{I}}^{(0)} \right) \quad (24)$$

となる。ただし、

$$\bar{\Psi}^{(i)} \triangleq \Phi^{(0)T} \Sigma^{(i)} \Phi^{(0)} + \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Phi^{(j)T} \Sigma^{(0)} \Phi^{(i-j)}$$

$$\bar{\mathbf{I}}^{(i)} \triangleq \Phi^{(0)T} \Sigma^{(i)} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \Sigma^{(0)} \Phi^{(0)}$$

$$+ \Phi^{(0)T} \Sigma^{(0)} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \Sigma^{(i)} \Phi^{(0)}$$

$$+ \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Phi^{(j)T} \Sigma^{(0)} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \Sigma^{(0)} \Phi^{(i-j)}$$

$$\alpha^{(i)} \triangleq \mathbf{r}^T \Sigma^{(i)} \mathbf{r} \quad (i \geq 1)$$

(24) 式を要素別に計算し、その結果を

$$\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^k}{k!} \Sigma^{(k)} \quad (25)$$

に代入すると、前章と同じアルゴリズムとなることが確かめられる。すなわち、3 章の近似解法は仮定1, 2のもとで近似的に行った級数展開表現の枠内で説明できることがわかった。

5. サーボ系の簡易設計法

本章では、目標値 r に追従させる制御系における最適制御則を3章で導出した Riccati 方程式の近似解法を用いて計算する方法を考える。

5.1 PD 制御系

まず、つぎの評価指標を設定する。

$$\begin{aligned} J = & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\{ \mathbf{h}^T \lambda(k) - r \}^2 + \rho \{ u(k) \}^2] \\ \mathbf{h}^T = & [1, 0, \dots, 0] \end{aligned} \quad (26)$$

この J を最小にする最適制御則 $u^*(k)$ は次式で与えられる。

$$u^*(k) = -\mathbf{g}^{*T} \lambda(k) + \rho \xi \quad (27)$$

ただし、

$$\mathbf{g}^{*T} = (\rho + \mathbf{r}^T \Sigma^* \mathbf{r})^{-1} \mathbf{r}^T \Sigma^* \Phi \quad (28a)$$

$$\rho \xi = -(\rho + \mathbf{r}^T \Sigma^* \mathbf{r})^{-1} \mathbf{r}^T \mathbf{q}^* \quad (28b)$$

ここで、 Σ^* , $\mathbf{q}^*$ は次式を満たす。

$$\Sigma = \mathbf{h} \mathbf{h}^T + \Phi^T \Sigma \Phi - \Phi^T \Sigma \mathbf{r} (\rho + \mathbf{r}^T \Sigma \mathbf{r})^{-1} \mathbf{r}^T \Sigma \Phi \quad (29a)$$

$$\mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{q} + \mathbf{r} \mathbf{h} - \Phi^T \Sigma \mathbf{r} (\rho + \mathbf{r}^T \Sigma \mathbf{r})^{-1} \mathbf{q}^T \mathbf{r} \quad (29b)$$

また、 $\mathbf{g}^* = [\rho \xi, \dots, \rho \xi]^T$ とすると、 $\rho \xi$ は (28), (29) 式より、

$$\rho \xi = \frac{r b}{(\rho + b^2 \sigma_{\mathbf{h}}^2) \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i - b \sum_{i=1}^n \rho_i^* \right)} \quad (30)$$

で与えられる。ここで、 $\sigma_{\mathbf{h}}^2$ は Σ^* の (1,1) 要素である。さて、 $\mathbf{h} \mathbf{h}^T = \mathbf{Q}$ なので、(29a) 式は (6) 式と一致する。よって、3章で導出した手法により Σ^* の近似解 Ω が求まり、(28a), (30) 式を用いることにより、ゲイン $\mathbf{g}^*$, $\rho \xi$ の近似解が決定できる。

5.2 I-PD 制御系

つぎに、I 動作を備えたコントローラ

$$u(k) = -\mathbf{f}^T \lambda(k) + K z(k) \quad (31a)$$

$$z(k+1) = z(k) + \{ r - y(k) \} \quad (31b)$$

を構成する。いま、 $\lambda(k)$, $u(k)$ の定常値をそれぞれ $\lambda(\infty)$, $u(\infty)$ として偏差系を考える。

$$\lambda_e(k) \triangleq \lambda(k) - \lambda(\infty)$$

$$u_e(k) \triangleq u(k) - u(\infty)$$

さらに、 $u_e(k+1) \triangleq v(k)$ と定義すると、偏差系は、

$$\begin{bmatrix} \lambda_e(k+1) \\ u_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & r \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k) \quad (32)$$

で表わされる系に、つぎの状態フィードバックを施したものと取り扱うことができる⁶⁾。

$$v(k) = -f_e^T \begin{bmatrix} \lambda_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix} \quad (33a)$$

ただし、

$$f_e = [(f^T, K)E + (0, 1)^T]^T \quad (33b)$$

$$E = \begin{bmatrix} \Phi - I_n & r \\ h^T & 0 \end{bmatrix} \quad (33c)$$

以上の準備のもとで、評価指標をつぎのようにおく。

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\lambda_e^T(k) Q \lambda_e(k) + \rho \{v(k)\}^2]$$

この J を最小にする最適ゲイン f^* は、レギュレータ問題の場合の Riccati 方程式の解 Σ^* を用いて、

$$\begin{aligned} f_e^{*T} &= (\rho + r^T \Sigma^* r)^{-1} r^T \Sigma^* \Phi [\Phi, r] \\ &= [g^{*T} \Phi, g^{*T} r] \end{aligned} \quad (34)$$

と表わせる。ただし、 g^* は(5)式で与えられる。よって、求めるべき最適ゲイン f^*, K^* は(33)式より、

$$[f^{*T}, K^*] = [g^{*T} \Phi, g^{*T} r + 1] E^{-1} \quad (35)$$

で与えられる。したがって、3章で導出した手法より g^* の近似解を求め、それを用いて(35)式より、 f^*, K^* の近似解が決定できる。さらに、本論文が取扱っている AR モデルの場合には、(35)式に含まれる逆行列 E^{-1} を求めることができ、つぎようになる。

E^{-1}

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & & 1 \\ & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \hline \frac{1}{b} & -\frac{\sum_{i=2}^n a_i}{b} & -\frac{\sum_{i=3}^n a_i}{b} & \dots & -\frac{\sum_{i=n-1}^n a_i}{b} & -\frac{a_n}{b} & 1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b} \end{bmatrix} \quad (36)$$

ここで、(28a)式の最適ゲイン g^* を

$$g^* = [g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*]^T$$

とおき、I 動作を備えた最適ゲインを

$$[f^{*T}, K^*] = [f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*, K^*]$$

とすると、(35)、(36)式より、両者の間にはつぎの関係式が成り立つ。

$$f_1^* = g_1^* + 1/b \quad (37a)$$

$$f_k^* = -\sum_{i=k+1}^n g_i^* - \left(\sum_{i=k}^n a_i \right) / b \quad 2 \leq k \leq n-1 \quad (37b)$$

$$f_n^* = -a_n/b \quad (37c)$$

$$K^* = \sum_{i=1}^n g_i^* + \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \right) / b \quad (37d)$$

以上のように、I-PD 制御の場合にも、ゲイン f^*, K^* の近似値は g^* の近似値より、極めて簡単に手計算のみで与えられることが示された。

6. 例 題

【例題 1】 まず、減衰定数 ε と近似の精度との関係をつぎのモデルで検討する。

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^4 (\alpha_i \varepsilon^i) z^{-i}$$

ただし、 $\alpha_i = (-1)^i, i=1, \dots, 4$

このとき、 ε の値が 0.5, 0.9 の 2 通りの場合において Riccati 方程式(6)の正解(反復計算による定常解)と 3 章で述べた近似解とを比較したものが **Table 1** である。ここで、 $\rho=0.01$ とし、第 1 行のみを比較した。(第 1 行はレギュレータゲイン g に対応するからである。) また、近似解 ω と正解 σ^* との間の誤差の評価として、

$$\left[\sum_{i=1}^4 (\sigma_{1,i}^* - \omega_{1,i})^2 \right]^{1/2} / \left[\sum_{i=1}^4 (\sigma_{1,i}^*)^2 \right]^{1/2}$$

Table 1 Comparison of the approximated solution of the Riccati equation with the exact one

	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}
$\varepsilon=0.5$	1.01×10^0	-3.22×10^{-3}	1.29×10^{-3}	-6.48×10^{-4}
	1.01×10^0	-3.35×10^{-3}	1.60×10^{-3}	-6.43×10^{-4}
$\varepsilon=0.9$	1.02×10^0	-1.85×10^{-2}	9.13×10^{-3}	-8.31×10^{-3}
	1.03×10^0	-2.40×10^{-2}	1.60×10^{-2}	-8.10×10^{-3}

approximate solution
exact solution

Fig. 1 Relation of the decaying rate ε with the accuracy of the approximation

を選び, ε との関係を示したものが **Fig. 1** である。これらの図, 表より, ε の値が小さいほど近似の精度は良く, $\varepsilon=0.9$ の場合でも近似解は正解に近い値となっており, また ρ の値が小さいほど近似の精度が良いことがわかる。

【例題2】制御対象の伝達関数 $G(s)$ が次式で与えられるとする。

$$G(s) = \frac{0.1067}{s^2 + 0.6667s + 0.1067}$$

これを零次ホールドを用いて, $\Delta T=2$ (秒) で離散化し, 打ち切り次数 n の AR 形を求めると,

$$M(z) = \frac{bz^{-1}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}}$$

となる。ただし, $\{a_i\} = \{-1.68, 1.34, -0.86, 0.55,$

Table 2 Coefficients of the PD control law

	$\rho=0.001$		$\rho=0.01$	
	optimal	near-optimal	optimal	near-optimal
q_1	10.8	10.6	7.40	6.66
q_2	-8.75	-8.64	-6.26	-5.86
q_3	5.61	5.54	4.01	3.76
q_4	-3.60	-3.55	-2.57	-2.41
q_5	2.30	2.28	1.65	1.55
q_6	6.45	6.32	4.55	4.14

Table 3 Coefficients of the I-PD control law

	$\rho=0.001$		$\rho=0.01$	
	optimal	near-optimal	optimal	near-optimal
f_1	18.1	17.9	14.7	13.9
f_2	-9.36	-9.32	-8.39	-8.26
f_3	6.00	5.97	5.38	5.25
f_4	-3.84	-3.83	-3.45	-3.41
f_5	2.47	2.45	2.21	2.15
K	6.46	6.36	4.59	4.13

Fig. 2 Comparison of the approximated I-PD control results with the optimal ones

$-0.35, 0.23, -0.15, 0.093, -0.060, 0.038, -0.025, 0.016, -0.010, 0.0064, -0.0041\}$, $b=0.137$, $n=15$. この例題で $|\varepsilon|$ の値を計算すると, 最大で 0.8, 平均すると 0.65 なので, 例題1の結果より, 近似の精度はかなり高いものと期待できる。このとき, PD 制御, I-PD 制御において, 最適制御則と本論文で導出した Riccati 方程式の近似解を用いて計算した近似制御則の一部を比較したものが **Table 2, 3** である。また, I-PD 制御結果を **Fig. 2** で示した。

7. おわりに

本論文では, 制御対象が (AR 形) + (むだ時間) の離散時間モデルで表現されるとき, その AR 係数が減衰していく点に着目して, Riccati 方程式の解を近似的ではあるが極めて簡便に求め, それに基づいてデジタル PD および I-PD 制御器のゲインを簡単に求める方法を提案した。本手法は行列の乗算などを用いないために計算量は極めて少なくてすみ, また AR 係数の項数を n から $n+1$ へ増加させた場合, n 項までの計算結果に, $n+1$ 番目に対応する計算結果を付け加えるだけで求まるという特徴を有している。また, 数値例より, 係数の減衰度が小さい場合でも近似の精度はかなりよいことがわかった。今後の課題をまとめるとつぎのようになる。

- (1) 近似の精度に関する解析的な検討: 現段階では数値計算例を通しての検討にとどまっている。
- (2) 本手法を用いたときの閉ループ系の安定性の解析: ただし, $\rho=0$ のときには有限定応答が得られることがわかっている。

参考文献

- 1) J.B. Cruz, Jr.: Feedback Systems, McGraw-Hill (1971)
- 2) 木村, 当房: 部分的モデルマッチングによるデジタル制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **18-8**, 777/783 (1982)
- 3) S. Fujii and N. Mizuno: A Discrete Model Reference Adaptive Control Using an Autoregressive Model with Dead Time of the Plant, Preprints of 8th IFAC Congress, **VII**, 120/125 (1981)
- 4) 北森: 制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法, 計測自動制御学会論文集, **15-8**, 549/555 (1979)
- 5) 藤中, 荒木: 一方向きむだ時間系に対する離散形最適レギュレータ問題の解法, 計測自動制御学会論文集, **20-4**, 288/293 (1984)
- 6) 美多, 向田: デジタル制御系における最適サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, **19-3**, 193/199 (1983)
- 7) 狩野, 西村: 最適推定制御問題におけるマトリクス・リカッチ方程式, 計測と制御, **20-6**, 566/575 (1981)