適応システムのためのパラメータ調整アルゴリズム

新 中 新 二*・鈴 木 隆*

New Parameter Adjustment Algorithms for Adaptive Systems

Shinji SHINNAKA* and Takashi SUZUKI*

This paper presents new parameter-adjustment algorithms for adaptive systems and analyzes their properties.

Most of the conventional methods for designing adaptive systems require ideal, in other words, unrealistic design conditions that restrict the applications of the methods. Some of these conditions are due to the parameter-adjustment algorithms implemented in the systems, i. e., the present popular algorithms perform satisfactorily only under certain restrictive circumstances that cause the ideal design conditions. In order to apply the adaptive methods to a variety of existing plants, it is necessary to develop new parameter-adjustment algorithms that can perform satisfactorily under more realistic circumstances where the conventional ones cannot. This paper presents such three algorithms and analytically clarifies their attractive properties.

Key Words: adaptive system, adaptive law, adaptive algorithm, exponential convergence

質はゲイン行列によって支配される⁴⁾, また, これまでの主たるアルゴリズムは, ゲイン行列の観点からは, 固定ゲイン, 漸減ゲイン, 固定忘却ゲイン, 固定トレースゲインの4方式に整理される^{1),2)}, ということを示している. しかし, 固定ゲイン方式は, 他3種の適応的な時変ゲインを有する方式に比較し一般に収束速度が著しく落ちるため, 最近では, ほとんど使用されなくなっている. したがって, 現在一般に用いられている主たる方式はわずか3種ということになるが, 収束速度のすぐれたこれらもそれぞれ特有の問題点を有しており, 適応システムの設計に大きな制約を与えている. 制約の少ない, より実的な適応システムの設計を可能にするためには, これら3方式の問題点を克服するような新しい方式のアルゴリズムの導出が必要であるが, このようなアルゴリズムは, いまだ報告されていない.

本論文の目的は, 上述のような特長を備えた新方式のアルゴリズムを示し, その性質, 振舞いに関する解析を与えることにある.

1. ま え が き

適応システムの性能は, 使用されるパラメータ調整アルゴリズムによって著しく左右される場合が少なくない. このため, アルゴリズムに関する研究が, 適応システムにおける重要な研究課題の一つとして古くから行われてきた. アルゴリズムの研究は従来個別的になされてきたが, 最近になって Landau らや筆者らによりこれらの統一化がなされ, アルゴリズムの性質に関する統一的解析が示されるとともに, アルゴリズム相互の関係も明らかにされてきた¹⁾⁻⁴⁾. これらは, 研究結果の一つとして, 一般にアルゴリズムの主要な性

2. 問題の記述

簡単のため, プラントのパラメータ推定を例にとり, 考察対象とするアルゴリズムを記述し, 問題を明らかにする.

プラントとしては, 次式で表わされるものを考える.

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + v(k) \\ = \theta^T \zeta(k) + v(k) \quad (1)$$

ここに, $\theta, \zeta(k)$ は有界なつぎのようなベクトルである.

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T$$

$$\zeta(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)]^T$$

上のプラントに対し, 便宜上つぎの前提を設ける.

(i) プラントの次数 n は既知とする.

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka

(Received February 10, 1984)

(Revised January 19, 1985)

(ii) プラントのパラメータ θ は未知であり、特に断らない限り時不変とする。

(iii) プラントに混入する未知外乱 $v(k)$ は、特に断らない限り、 $v(k)=0$ とする。

(1) 式における未知パラメータ θ を推定するため、これに対応してつぎのような推定モデルを考える。

$$\hat{\theta}(k') = \hat{\theta}^T(k) \zeta(k') \quad ; \quad k' \leq k-1 \quad (2)$$

ここに、 $\hat{\theta}(k)$ は、 θ の推定値たるつぎのような可調整ベクトルである。

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{a}_1(k), \dots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_1(k), \dots, \hat{b}_n(k)]^T$$

$\hat{\theta}(k)$ の調整に現在使用されている、適応システム用の代表的なパラメータ調整アルゴリズムとしては、Landau 形のアルゴリズムと最小 2 乗法形のアルゴリズムの 2 者が挙げられるが⁴⁾、ここでは、最小 2 乗法形アルゴリズムを取り上げて考える。このアルゴリズムの一般形は次式で与えられる⁴⁾。

最小 2 乗法形アルゴリズム

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \frac{\mu(k) \mathbf{F}'(k) \zeta(k)}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}'(k) \zeta(k)} \\ \times (\hat{\theta}^T(k) \zeta(k) - y(k)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{F}'(k+1) = \frac{1}{\lambda(k)} \left[\mathbf{F}'(k) - \frac{\mu(k) \mathbf{F}'(k) \zeta(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}'(k)}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}'(k) \zeta(k)} \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{F}'(0) > 0, 0 < \lambda(k) \leq 1, 0 < \mu(k) < \infty \quad (5)$$

上のアルゴリズムでは、 $\hat{\theta}(k)$ はつぎの $J(\hat{\theta}(k))$

$$\begin{aligned} J(\hat{\theta}(k)) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \lambda(j) \right) \mu(i) (\hat{\theta}^T(i) \zeta(i) - y(i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \lambda(j) \right) \mu(i) (\hat{\theta}^T(i) \zeta(i) - y(i))^2 \end{aligned} \quad (6)$$

を最小とするように調整される⁴⁾。また、この場合のパラメータ誤差 $\phi(k) = \hat{\theta}(k) - \theta$ は、つぎのようにゲイン行列 $\mathbf{F}'(k)$ と関係づけられる (付録 A 参照)。

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \mathbf{F}'(k) \left(\prod_{j=0}^{k-1} \lambda(j) \right) \mathbf{F}'^{-1}(0) \phi(0) \\ &+ \mathbf{F}'(k) \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \lambda(j) \right) \mu(i) \zeta(i) v(i) \end{aligned} \quad (7)$$

(3)~(5) 式のアルゴリズムを実行するためには、重み係数 $\mu(k)$, $\lambda(k)$ を具体的に決定しなければならない。

重み係数 $\mu(k)$ は、適応システムに起りうる零割り現象の回避など、 $\hat{\theta}(k)$ の収束速度をコントロールするために使用されるが⁴⁾、これが特に必要ないような場合には、通常 $\mu(k)=1$ として用いられる。

forgetting factor と呼ばれる $\lambda(k)$ は、ゲイン行列 $\mathbf{F}'(k)$ の振舞い、しいては、アルゴリズムの特性、性能を決定するという重要な役割りを担う。このた

め、アルゴリズムの使用に当っては、 $\lambda(k)$ の決定法がキーポイントになる。 $\lambda(k)$ は、 $0 < \lambda(k) \leq 1$ なる範囲で決定されねばならないが、この決定法として今日用いられている主たるものは、 $\lambda(k)=1$; $\forall k$ とする漸減ゲイン方式、 $\lambda(k)=\lambda < 1$; $\lambda = \text{const.}$, $\forall k$ とする固定忘却ゲイン方式、および、 $\text{tr } \mathbf{F}'(k) = \text{tr } \mathbf{F}'(0)$; $\forall k$ となるように $\lambda(k)$ を定める固定トレースゲイン方式のわずか 3 方式である。しかし、これら 3 方式は特有のすぐれた性質を有している反面、問題点も内蔵しており、適応システムの設計に大きな制約を与えている。

ここで考える問題は、上記の 3 方式の長所を活かしつつその問題点を克服するような新たな $\lambda(k)$ の決定法を見出し、性質、振舞いを解析的に明らかにすることである。

3. 上限トレースゲイン方式

3.1 基本的性質

まず、本章で考える方式をつぎの定理の形で与え、その基本的性質を明らかにする。

《定理 1》

以下の更新式

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(k+1) &= \frac{1}{\lambda(k)} \left[\mathbf{F}'(k) - \frac{\mu(k) \mathbf{F}'(k) \zeta(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}'(k)}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}'(k) \zeta(k)} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda(k)} \mathbf{F}'(k) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\lambda(k) = \max \{ \lambda, \text{tr } \mathbf{F}'(k) / \gamma_u \} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}'(0) > 0, \gamma_u \geq \text{tr } \mathbf{F}'(0) \\ 0 < \lambda < 1, 0 < \mu(k) < \infty \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

に従って $\lambda(k)$, $\mathbf{F}'(k)$ を定めるならば、つぎの性質が保証される。

$$(a) \quad 0 < \text{tr } \mathbf{F}'(k) \leq \gamma_u \quad ; \quad \forall k \quad (11)$$

$$(b) \quad \lambda \leq \lambda(k) \leq 1 \quad ; \quad \forall k \quad (12)$$

(証明)

(a) 最初に、 $\text{tr } \mathbf{F}'(k) \leq \gamma_u$; $\forall k$ を示す。(9) 式より、

$$\lambda(k) \geq \frac{1}{\gamma_u} \text{tr } \mathbf{F}'(k) \quad (13)$$

(8) 式の両辺についてトレースをとり、上式を用いると

$$\text{tr } \mathbf{F}'(k+1) = \frac{1}{\lambda(k)} \text{tr } \mathbf{F}'(k) \leq \gamma_u \quad (14)$$

つぎに、 $\text{tr } \mathbf{F}'(k) > 0$; $\forall k$ を示す。(13), (14) 式より、 $\lambda(k)$, $\text{tr } \mathbf{F}'(k+1)$ に関しては、つぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \text{tr } \mathbf{F}'(k+1) = \gamma_u; \lambda(k) = \text{tr } \mathbf{F}'(k) / \gamma_u > \lambda \\ \text{tr } \mathbf{F}'(k+1) < \gamma_u; \lambda(k) = \lambda > \text{tr } \mathbf{F}'(k) / \gamma_u \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

すなわち, $\text{tr } \mathbf{F}(k+1)$ は, $\lambda(k)=\lambda$ のとき, 最小値をとりうる. したがって, $\text{tr } \mathbf{F}(k) > 0; \forall k$ の証明に関しては, $\lambda(k)=\lambda; \forall k$ なる場合について考えておけば十分である. この場合には, $\mathbf{F}(k)$ の逆行列 $\mathbf{F}^{-1}(k)$ はつぎのように表わされる⁴⁾.

$$\mathbf{F}^{-1}(k) = \lambda^k \mathbf{F}^{-1}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i} \mu(i) \boldsymbol{\zeta}(i) \boldsymbol{\zeta}^T(i)$$

よって, $\mu(i) \|\boldsymbol{\zeta}(i)\|^2 \leq M_1 < \infty$ とすると, $\text{tr } \mathbf{F}^{-1}(k)$ は

$$\text{tr } \mathbf{F}^{-1}(k) \leq \lambda^k \text{tr } \mathbf{F}^{-1}(0) + \frac{\lambda(1-\lambda^k)}{1-\lambda} M_1 \quad (16)$$

ここで, $\mathbf{F}(k), \mathbf{F}^{-1}(k)$ の固有値がともに非負であることを考慮すると, 上式より

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{F}(k) &\geq \frac{1}{\text{tr } \mathbf{F}^{-1}(k)} \\ &\geq \frac{1-\lambda}{\max\{(1-\lambda)\text{tr } \mathbf{F}^{-1}(0), \lambda M_1\}} \quad (17) \end{aligned}$$

(b) $\lambda(k)=\lambda$ なるときは, (12)式は明らか. $\lambda(k)=\text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u$ なるときは, これは $\lambda(k) \geq \lambda$ を意味するので, このとき $\lambda(k) \leq 1$ となることを示せば証明は完結する. これは, 性質(a)より,

$$\lambda(k) = \frac{1}{\gamma_u} \text{tr } \mathbf{F}'(k) \leq \frac{1}{\gamma_u} \text{tr } \mathbf{F}(k) \leq 1$$

(11), (12)式は, 従来方式では同時には達成できなかった性質である. しかし, これは単に $\text{tr } \mathbf{F}(k), \lambda(k)$ の上下限を示しているにすぎない. つぎに, これらの振舞いについて検討を加える.

3.2 振舞い

まず最初は, $\lambda(k)=\text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u (> \lambda)$ であったとしよう. したがって, このときには, (15)式が示すように $\text{tr } \mathbf{F}(k+1)=\gamma_u$ となる. このため, この状態が続く間は, この方式は $\text{tr } \mathbf{F}(k)=\gamma_u; \forall k$ とする固定トレースゲイン方式と同様の挙動を示す. この場合には, $\text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u$ は一般に $0 < \text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u \leq 1$ の範囲で変動するため³⁾, ある時点で $\text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u < \lambda$ となることがある. この現象は, λ が大きい, γ_u が大きい, $\boldsymbol{\zeta}(k)$ の P.S. (persistently spanning) 性が強いなどという状況下では比較的容易に起きる^{3), 4)}. $\text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u < \lambda$ なる現象が起きると, (15)式が示すように $\lambda(k)=\lambda, \text{tr } \mathbf{F}(k+1) < \gamma_u$ となり, 固定トレースゲイン方式とは異なった挙動が引き起こされる. この現象が起きたときと同程度かそれ以上 P.S. 性を信号ベクトル $\boldsymbol{\zeta}(k)$ が保持するような場合には, 引続き $\lambda(k)=\lambda$ となるため, 本方式は, $\lambda(k)=\lambda; \forall k$ とする固定忘却ゲイン方式と同様の振舞いを続けることになる. しかし, $\boldsymbol{\zeta}(k)$ の P.S. 性が弱くなると $\mathbf{F}(k)\boldsymbol{\zeta}(k) \approx 0, \mathbf{F}(k+1) \approx \mathbf{F}(k)/\lambda$ となり, $\mathbf{F}(k)$ は指数的に増大し, やがてつぎの関係

$$\frac{1}{\gamma_u} \text{tr } \mathbf{F}(k) \approx \frac{1}{\gamma_u} \text{tr } \mathbf{F}'(k) > \lambda$$

が満足されるようになる. この結果, $\lambda(k)=\text{tr } \mathbf{F}'(k)/\gamma_u$ となり, 再び固定トレースゲイン方式と同様の挙動が引き起こされることになる.

上記の検討よりつぎのことが明らかである. 本方式は, $\boldsymbol{\zeta}(k)$ の P.S. 性が強い場合には固定忘却ゲイン方式と同様の挙動を示し, 逆に, P.S. 性が弱い場合には固定トレースゲイン方式と同様の挙動を示す. すなわち, $\lambda(k)$ は, $\boldsymbol{\zeta}(k)$ の P.S. 性が強いときには, (6)式に示した $J(\hat{\theta}(k))$ の重み係数として意味の高い一定値 $\lambda(k)=\lambda$ をとる. これは, 本方式は, 固定トレースゲイン方式の一つの難点であった, $\lambda(k)$ が極端に小さくなるという問題点を克服すると同時に, 固定忘却ゲイン方式の最大の特長を活かす方式であることを示している. 逆に, $\boldsymbol{\zeta}(k)$ の P.S. 性が低下したりあるいは一時的に失われるときには, $\lambda(k)$ は $\text{tr } \mathbf{F}(k)=\gamma_u$ となるように調整される. これはまた, 本方式は, 固定トレースゲイン方式の特長を活かし, 固定忘却ゲイン方式の最大の難点であった, ゲイン行列 $\mathbf{F}(k)$ の不都合な増大を防止する方式でもあることを示している. このように, 上限トレースゲイン方式は, 固定忘却ゲイン, 固定トレースゲイン方式の長所を活かし, これにより両方式の短所を補う方式となっている.

4. 下限トレースゲイン方式

4.1 基本的性質

本節では, ここで考える方式をつぎの定理の形で与え, その基本的性質を明らかにする.

《定理 2》

以下の更新式

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(k+1) &= \frac{1}{\lambda(k)} \left[\mathbf{F}(k) - \frac{\mu(k) \mathbf{F}(k) \boldsymbol{\zeta}(k) \boldsymbol{\zeta}^T(k) \mathbf{F}(k)}{1 + \mu(k) \boldsymbol{\zeta}^T(k) \mathbf{F}(k) \boldsymbol{\zeta}(k)} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda(k)} \mathbf{F}'(k) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(k) &= \min \{ \lambda_1(k), \lambda_2(k) \} \\ \lambda_1(k) &= \alpha \lambda_1(k-1) + (1-\alpha) \\ \lambda_2(k) &= \frac{1}{\gamma_l} \text{tr } \mathbf{F}'(k) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(0) &> 0, \quad 0 < \gamma_l < \text{tr } \mathbf{F}(0) \\ 0 &< \alpha < 1, \quad 0 < \lambda_1(0) \leq 1, \quad 0 < \mu(k) < \infty \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

に従って, $\lambda(k), \mathbf{F}(k)$ を定めるならば, つぎの性質が保証される.

$$(a) \quad \gamma_l \leq \text{tr } \mathbf{F}(k) < \infty; \forall k \quad (21)$$

特に, $\lambda_1(k)=1; \forall k$ とする場合には

$$\gamma_l \leq \text{tr } \mathbf{F}(k) \leq \text{tr } \mathbf{F}(k-1); \forall k \quad (22)$$

$$(b) \quad 0 < \lambda(k) \leq 1 \quad ; \quad \forall k \quad (23)$$

(証明)

(a) まず, $\text{tr } \mathbf{F}'(k) \geq \gamma_i$; $\forall k$ を示す. (18)式の両辺についてトレースをとり, (19)式の関係を用いると,

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{F}'(k+1) &= \frac{1}{\lambda(k)} \text{tr } \mathbf{F}'(k) \\ &\geq \frac{1}{\lambda_2(k)} \text{tr } \mathbf{F}'(k) = \gamma_i \end{aligned} \quad (24)$$

つぎに, $\text{tr } \mathbf{F}'(k) < \infty$; $\forall k$ を示す. 上式より, $\lambda(k) = \lambda_2(k)$ なるときは $\text{tr } \mathbf{F}'(k+1) = \gamma_i$ となり, ゲイン行列のトレースは下限値をとる. したがって, $\text{tr } \mathbf{F}'(k) < \infty$; $\forall k$ を示すためには, $\lambda(k) = \lambda_1(k)$; $\forall k$ なる特別の場合について考えておけば十分である. この証明の準備として, $\lambda_1(k)$ の収束に関する性質を明らかにしておく.

(19)式の $\lambda_1(k)$ はつぎのように書き換えられる.

$$\lambda_1(k) = \alpha^k \lambda_1(0) + (1 - \alpha^k) \quad (25)$$

上式を用いると, $1/\lambda_1(k)$ はつぎのように表わされる.

$$\frac{1}{\lambda_1(k)} = 1 + \frac{1 - \lambda_1(0)}{\lambda_1(k)} \cdot \alpha^k \quad (26)$$

(26)式の右辺第2項の第1因数は(25)式より明らかなように単調に収束し, 第2因数による級数は収束する. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \lambda_1(0)}{\lambda_1(k)} &= 1 - \lambda_1(0) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k &= \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

したがって, (26)式の右辺第2項よりなる無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \lambda_1(0)}{\lambda_1(k)} \alpha^k$$

も収束する (付録B, 補助定理1参照). これは, (26)式による無限乗積が有界なある値 M_2 に収束することを意味する (付録B, 補助定理2参照). すなわち,

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1(k)} = M_2 < \infty \quad (28)$$

上に示した $\lambda_1(k)$ の性質と(18)式より, $\text{tr } \mathbf{F}'(k+1)$ の上界は

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{F}'(k+1) &\leq \frac{1}{\lambda_1(k)} \text{tr } \mathbf{F}'(k) \leq \left(\prod_{i=0}^k \frac{1}{\lambda_1(i)} \right) \text{tr } \mathbf{F}'(0) \\ &\leq \left(\prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1(i)} \right) \text{tr } \mathbf{F}'(0) = M_2 \cdot \text{tr } \mathbf{F}'(0) \end{aligned} \quad (29)$$

終わりに, (22)式を示す. $\lambda(k) = \lambda_1(k) = 1$ なるときには, 明らかに $\text{tr } \mathbf{F}'(k+1) \leq \text{tr } \mathbf{F}'(k)$. また, (21)式より, $\gamma_i \leq \text{tr } \mathbf{F}'(k+1)$.

(b) $\lambda_1(k)$ に関しては, (25)式より $0 < \lambda_1(0) \leq \lambda_1(k) \leq 1$. また, $\lambda_2(k)$ に関しては, (21)式より $\mathbf{F}'(k) > 0$ すなわち $\text{tr } \mathbf{F}'(k) > 0$. よって, (19)式より $\lambda_2(k) > 0$. これらは(23)式を意味する.

4.2 振舞い

まず, $\lambda_1(0) = 1$ (したがって, $\lambda_1(k) = 1$; $\forall k$) とする比較的簡単な場合から考える. この場合には, (22)式が示すように, $\text{tr } \mathbf{F}'(k)$ は下限値 γ_i に向って単調に減少する. この単調減少は, (24)式より, $\lambda_2(k) > 1$, $\lambda(k) = \lambda_1(k)$ なる間は継続される. $\text{tr } \mathbf{F}'(k)$ が γ_i 近くまで減少すると, ついには, $\text{tr } \mathbf{F}'(k) \leq \gamma_i$ なる現象が引起こされ, $\lambda(k) = \lambda_2(k)$ となる. これより(24)式が示すように $\text{tr } \mathbf{F}'(k+1) = \gamma_i$ となり, これ以降は(22)式よりこの状態が保たれることになる.

つぎに, $\lambda_1(0) < 1$ とする場合について考える. この場合も, $\lambda_1(0) = 1$ の場合同様, 当初は $\lambda(k) = \lambda_1(k)$ となる. しかし, $\lambda_1(k)$ は $\mathbf{F}'(k)$ と独立に調整されているため, $\text{tr } \mathbf{F}'(k+1) > \text{tr } \mathbf{F}'(k)$ なることも起こりうる. この $\lambda_1(k)$ は指数的に1に漸近するため, $\lambda(k)$, $\mathbf{F}'(k)$ はやがて $\lambda_1(k) = 1$; $\forall k$ とした場合と同じ振舞いを示すようになる.

上記の検討よりつぎのことが明らかである. 本方式は, 初期段階では漸減ゲイン方式と同様の挙動を示し, やがて固定トレースゲイン方式と同様の挙動を示す. したがって, $\text{tr } \mathbf{F}'(0)$ を大きくとり, 下限値 γ_i を $\text{tr } \mathbf{F}'(0)$ に比較して十分に小さく選べば, 本方式は, 漸減ゲイン方式とトレース値を低く抑えた固定トレースゲイン方式の両者の特長を互いの欠点を補う形で活かしたアルゴリズムとなる. すなわち, この場合には, 漸減ゲイン方式のすぐれた初期収束性でトレース値を低く抑えた固定トレースゲイン方式の欠点が補われ, 逆に, 漸減ゲイン方式の難点である $\mathbf{F}'(k)$ のアンダフローが固定トレースゲイン方式特有の性質により防止されることになる. しかも, 漸減ゲイン方式がもちえなかった, パラメータ変動に対する追従性も備えることになる.

(注意 1) (19)式に用いた $\lambda_1(k)$ は, 次式

$$\lambda_1(k) = \lambda_1(0) + (1 - \lambda_1(0))(1 - \exp(\ln \alpha \cdot k))$$

に示すように指数的に1に漸近する. $\lambda_1(k)$ は, 初期誤差の影響を早期に忘却するために導入されたものであり, (28)式のような性質を有するものであれば, 必ずしも指数収束するものを用いる必要はない.

(注意 2) 固定トレースゲイン方式のモードに入った後の $\lambda(k)$ の下限は, 厳密には, 次式で与えられる.

$$\lambda(k) = \lambda_2(k) \geq \frac{1}{1 + \gamma_i \mu(k) \|\zeta(k)\|^2}$$

これより明らかなように, 一般には, γ_i を小さくとつ

ておけば、 $\lambda(k)$ は極端に 1 より小さくなることはない。

5. 両限トレースゲイン方式

5.1 基本的性質

前述の 2 方式では、ゲイン行列の上限、下限のいずれか一方は指定できるが、上下限を同時には指定できなかった。ここでは、これを同時に指定する方式について考える。まず、この方式を定理の形で示す。

《定理 3》

以下の更新式

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(k+1) &= \frac{1}{\lambda(k)} \left[\mathbf{F}(k) - \frac{\mu(k) \mathbf{F}(k) \zeta(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}(k)}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}(k) \zeta(k)} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda(k)} \mathbf{F}'(k)\end{aligned}\quad (30)$$

$$\lambda(k) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_u} \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k); & \lambda \leq \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_u \\ \lambda & ; \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_u \leq \lambda \leq \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_l \\ \frac{1}{\gamma_l} \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k); & \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_l \leq \lambda \end{cases}\quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}(0) > 0, \quad 0 < \gamma_l < \operatorname{tr} \mathbf{F}(0) \leq \gamma_u \\ 0 < \lambda < 1, \quad 0 < \mu(k) < \infty \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

に従って $\lambda(k)$, $\mathbf{F}(k)$ を定めるならば、つぎの性質が保証される。

$$(a) \quad \gamma_l \leq \operatorname{tr} \mathbf{F}(k) \leq \gamma_u \quad ; \quad \forall k \quad (33)$$

$$(b) \quad 0 < \lambda(k) \leq 1 \quad ; \quad \forall k \quad (34)$$

(証明)

(a) (31), (32) 式より

$$\frac{\operatorname{tr} \mathbf{F}'(k)}{\gamma_u} \leq \lambda(k) \leq \frac{\operatorname{tr} \mathbf{F}'(k)}{\gamma_l} \quad (35)$$

また、(30) 式より

$$\operatorname{tr} \mathbf{F}(k+1) = \frac{1}{\lambda(k)} \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) \quad (36)$$

(35), (36) 式は (33) 式を意味する。

(b) $\lambda(k) = \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_u$ のときには、(12) 式に関する証明と同様にして、

$$\lambda \leq \lambda(k) \leq 1 \quad (37)$$

また、 $\lambda(k) = \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_l$ のときには、(23) 式に関する証明と同様な手順により

$$0 < \lambda(k) \leq \lambda \quad (38)$$

$0 < \lambda < 1$ であるので、これらは (34) 式を意味する。

5.2 振舞い

(30)～(32) 式と (8)～(10) 式の比較より明らかなように、 $\lambda \leq \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_l$ なる間は本方式と上限トレースゲイン方式は同じ振舞いをし、 $\lambda \geq \operatorname{tr} \mathbf{F}'(k) / \gamma_l$ なる場合に限り両者は異なった振舞いを示す。このような場

合には、上限トレースゲイン方式では、状況のいかんによっては $\operatorname{tr} \mathbf{F}(k)$ は (17) 式に示された下限値に漸近し、有限語長効果のため $\mathbf{F}(k)$ がアンダフローを起す恐れを生ずるが、本方式では $\operatorname{tr} \mathbf{F}(k)$ は下限値 γ_l に抑えられるため、これは回避される。すなわち、本方式は上限トレースゲイン方式にアンダフロー防止機能をもたせたものになっている。本方式は、(17) 式より明らかなように、基準値 λ を比較的大きく選定するような場合に特に有用である。なお、アンダフロー防止機能が働いている間は、 $\lambda(k)$ は基準値 λ を離れ、(38) 式に示された値をとることになる。

6. 数値実験

ここでは、前章で考察した新方式の特徴的な性質と振舞いを、プラントのパラメータ推定に関する簡単な数値実験により、確認する。

6.1 上限トレースゲイン方式

数値実験に用いるプラントとして、つぎの 2 次システムを考える。

$$\begin{aligned} y(k) &= y(k-1) - 0.35y(k-2) + u(k-1) \\ &\quad + 0.75u(k-2) \\ &= \theta^T \zeta(k) \end{aligned} \quad (39)$$

ただし、

$$\theta = [a_1, a_2, b_1, b_2]^T = [-1, 0.35, 1, 0.75]^T$$

$$\zeta(k) = [-y(k-1), -y(k-2), u(k-1), u(k-2)]^T$$

このプラントに対する入力 $u(k)$ は、振幅 ± 1 、周期 40 の矩形波とする。

未知パラメータ θ の推定値たる可調整パラメータ

$$\hat{\theta}(k) = [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \hat{b}_1(k), \hat{b}_2(k)]^T$$

は、(3) 式に従って逐次的に調整されるが、本方式では、この更新式には (8)～(10) 式に従って定められた $\mathbf{F}(k)$, $\lambda(k)$ が用いられる。

Fig. 1 は、これらの設計パラメータを

$$\mathbf{F}(0) = 10\mathbf{I}, \quad \gamma_u = \operatorname{tr} \mathbf{F}(0) = 40$$

$$\lambda = 0.7, \quad \mu(k) = 1$$

と選んだ場合の実験結果である。同図(a), (b)はそれぞれ $\lambda(k)$, $\operatorname{tr} \mathbf{F}(k)$ の挙動を示している。これらより、(11), (12) 式に示された性質、および、3.2 節で考察された振舞いが確認される。なお、同図(c)はこの場合の $\hat{\theta}(k)$ を示したものである。

6.2 下限トレースゲイン方式

プラントとしては、(39) 式に外乱の項を考慮したつぎのものを考える。

$$y(k) = \theta^T \zeta(k) + v(k)$$

この場合のプラント入力 $u(k)$ は前述と同一の矩形波とする。また、新たに加えた外乱 $v(k)$ は、 $u(k)$ とは

Fig. 1 A numerical example for upper-bound trace-gain algorithm

統計的に独立な、区間 $[-0.5, 0.5]$ に一様分布した白色雑音とする。

θ の推定値たる $\hat{\theta}(k)$ は、前述の方式同様、(3)式に従って調整されるが、本方式ではこの更新式には(18)~(20)式に従って定められた $\mathbf{F}(k), \lambda(k)$ が用いられる。

Fig. 2 は、これらの設計パラメータを

$$\mathbf{F}(0) = 1000\mathbf{I}, \gamma_i = \text{tr}[0.1\mathbf{I}] = 0.4$$

$$\alpha = 0.9, \lambda_1(0) = 0.9, \mu(k) = 1$$

と選んだ場合の実験結果である。同図(a), (b)はそれぞれ $\lambda(k), \text{tr } \mathbf{F}(k)$ の挙動を示している(なお、図(b)では、スケーリングの都合上、区間 $[0, 5]$ の6個のデータ 4000, 4444, 3664, 2660, 1438, 14 は省略されている)。これら両図より、(21), (23)式に示された性質、および、4.2節で考察された振舞いが確認される。なお、同図(c)は、この場合の $\hat{\theta}(k)$ を示したものであるが、約 $k=180$ で θ の近傍に収束している。

6.3 両限トレースゲイン方式

プラントとしては、(39)式と同じものを考える。た

Fig. 2 A numerical example for lower-bound trace-gain algorithm

だし、入力 $u(k)$ は振幅 ± 1 、周期 80 の矩形波とする。この方式においても、 $\hat{\theta}(k)$ は前述の2方式同様(3)式に従って調整されるが、この更新式には、(30)~(32)式に従って定められた $\mathbf{F}(k), \lambda(k)$ が用いられる。

Fig. 3 は、これらの設計パラメータを

$$\mathbf{F}(0) = 100\mathbf{I}, \gamma_u = \text{tr } \mathbf{F}(0) = 400, \gamma_i = \text{tr } \mathbf{I} = 4,$$

$$\lambda = 0.85, \mu(k) = 1$$

と選んだ場合の実験結果である。同図(a), (b)はそれぞれ $\lambda(k), \text{tr } \mathbf{F}(k)$ の挙動を示している。 $\text{tr } \mathbf{F}(k)$ の下限値は、スケーリングの関係上明瞭ではないが、 $\gamma_i = 4$ に抑えられており、(33), (34)式に示された性質、および、5.2節で考察された振舞いが確認される。なお、同図(c)はこの場合の $\hat{\theta}(k)$ を示したものである。

Fig. 3 A numerical example for double-bound-trace-gain algorithm

7. む す び

本論文では、従来の漸減ゲイン、固定忘却ゲイン、固定トレースゲインの3方式のアルゴリズムの欠点を克服するとともにこれらの長所を活かすような新たな方式のアルゴリズムを示し、これらの性質、振舞いを解析的に明らかにした。これらは、従来方式のアルゴリズムでは困難あるいは不可能であったような適応システムの設計を可能とするものであり、今後の応用が期待される。なお、ここでは最小2乗法形アルゴリズムを取上げて新方式を示したが、これらは Landau 形のアルゴリズムに対しても用いることができる。

参 考 文 献

- 1) Landau, 富塚：適応制御システムの理論と実際，オーム社 (1981)
- 2) I. D. Landau and R. Lozano: Unification of Discrete Time Explicit Model Reference Adaptive Control Designs, *Automatica*, **17**-4, 593/611 (1981)
- 3) 鈴木, 新中, 田中：一般化適応則の証明と固定トレースアルゴリズムの諸性質, 計測自動制御学会論文集, **18**-11, 1074/1079 (1982)

- 4) 新中, 鈴木：一般化パラメータ適応則の拡張とその性質, 計測自動制御学会論文集, **19**-11, 881/888 (1983)
- 5) R. Lozano: Independent Tracking and Regulation Adaptive Control with Forgetting Factor, *Automatica*, **18**-4, 455/459 (1982)
- 6) 斎藤正男 (数学ハンドブック編集委員会編)：理工学のための数学ハンドブック, 83/100, 丸善 (1960)

《 付 録 》

A : (7) 式の証明

(1), (3) 式より, $\psi(k) = \hat{\theta}(k) - \theta$ は

$$\begin{aligned}\psi(k+1) &= \mathbf{A}(k)\psi(k) + \mathbf{b}(k)v(k) \\ &= \left(\prod_{j=0}^k \mathbf{A}(j) \right) \psi(0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=i+1}^k \mathbf{A}(j) \right) \mathbf{b}(i)v(i) \quad (\text{A} \cdot 1)\end{aligned}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{A}(k) &= \mathbf{I} - \frac{\mu(k)\mathbf{\Gamma}(k)\zeta(k)\zeta^T(k)}{1 + \mu(k)\zeta^T(k)\mathbf{\Gamma}(k)\zeta(k)} \\ \mathbf{b}(k) &= \frac{\mu(k)\mathbf{\Gamma}(k)\zeta(k)}{1 + \mu(k)\zeta^T(k)\mathbf{\Gamma}(k)\zeta(k)} \\ &= \mu(k)\lambda(k)\mathbf{\Gamma}(k+1)\zeta(k)\end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

また, (4) 式は, 上の $\mathbf{A}(k)$ を用いると,

$$\mathbf{\Gamma}(k+1) = \frac{\mathbf{A}(k)}{\lambda(k)} \mathbf{\Gamma}(k) = \left(\prod_{j=i}^k \frac{\mathbf{A}(j)}{\lambda(j)} \right) \mathbf{\Gamma}(i) \quad (\text{A} \cdot 3)$$

上式より,

$$\prod_{j=0}^k \mathbf{A}(j) = \left(\prod_{j=0}^k \lambda(j) \right) \mathbf{\Gamma}(k+1) \mathbf{\Gamma}^{-1}(0) \quad (\text{A} \cdot 4)$$

また, (A・2), (A・3) 式より

$$\begin{aligned}& \left(\prod_{j=i+1}^k \mathbf{A}(j) \right) \mathbf{b}(i) \\ &= \mu(i)\lambda(i) \left(\prod_{j=i+1}^k \mathbf{A}(j) \right) \mathbf{\Gamma}(i+1)\zeta(i) \\ &= \mu(i) \left(\prod_{j=i}^k \lambda(j) \right) \mathbf{\Gamma}(k+1)\zeta(i) \quad (\text{A} \cdot 5)\end{aligned}$$

(A・1), (A・4), (A・5) 式は (7) 式を意味する。なお, 証明より明らかのように, (7) 式の関係は, ゲイン行列 $\mathbf{\Gamma}(k)$; $k \geq 1$ の正則性のいかにかわらず成立する。

B : 無限級数と無限乗積に関する補助定理⁶⁾

[補助定理 1] (Abel の条件)

$\{a(k)\}$ が単調に収束し, $\sum_{k=0}^{\infty} b(k)$ が収束するなら

ば, $\sum_{k=0}^{\infty} (a(k)b(k))$ も収束する。

[補助定理 2]

$\prod_{k=0}^{\infty} (1+a(k))$; $a(k) \geq 0$ が収束するための必要十分

条件は $\sum_{k=0}^{\infty} a(k)$ が収束することである。