2 点 Padé 近似による離散時間システムモデリング†

勝 部 泰 弘*・堀 口 和 己*・浜 田 望*

System Modeling via 2-Point Padé Approximation

Yasuhiro KATSUBE*, Kazumi HORIGUCHI* and Nozomu HAMADA*

In order to design control systems, it is necessary to have a mathematical model which will adequately describe the motion of a given system. Modelling problem is a significant field in control theory, and has been much studied in relation to signal processing theory.

In this paper, we concern with a modelling method using 2-point Padé approximation on discrete-time systems. The rational function of z (difference operator) obtained by usual Padé approximation preserves the first some terms of the given power series expansion at a point. When we choose $z=1$ ($z=\infty$) as that point, the first parts of time moments (Markov parameters) of the model coincide with the given ones in version of discrete-time systems. On the other hand, 2-point Padé approximation provides the transfer function which fits the desired characteristics at two points respectively, hence selecting $z=1$ and $z=\infty$ as these two points, we can obtain the model with both steady and transient response taken into account.

The outline of this paper is as the following: after definition of 2-point Padé approximation problem in Sec. 2.1, a few subjects on it are discussed in the next four sections. They are (1) an explicit form of 2-point Padé approximation (Sec. 2.2), (2) minimal order's realization problem (Sec. 2.3), (3) Nuttall's compact form (Sec. 2.4), (4) relation to continued fraction expansions and numerical efficient algorithm based on it (Sec. 2.5). In Sec. 3, a numerical example of modelling via 2-point Padé approximation is shown for demonstration of its effectiveness.

Key Words: modeling, Padé approximation, discrete-time system, minimal realization, continued fraction expansion

crete-time system, minimal realization, continued fraction expansion

1. 緒 言

Padé 近似¹⁾はその簡潔さゆえに、システムモデリングとシステム低次元化等の分野において、広く利用されている。有力な一近似手法である。通常の Padé 近似は、ある一点の近傍でのべき展開係数を適当個数一致させるものであるが、相異なる複数点の近傍でのべき展開係数をそれぞれ適当個数一致させるものとして、multipoint Padé 近似が提案されている^{1a)}。これは、より多様な要求に対応できる近似手法である反面、その取り扱いが複雑なものとなる。

2 点 Padé 近似は数学的には複数点 Padé 近似の特殊な場合にすぎないが、システム理論的に見れば重要な意味を持つ。すなわち、連続系においてはその 2 点を $s=0, \infty$ ととることにより、低周波及び高周波域特性両者の近似となり、また離散系においては $z=1, \infty$ とした時、定常 (低周波) 及び過渡応答特性を兼慮した近似手法となる。さらに、この問題は本文において後述する様に通常の Padé 近似とほぼ同様な取り扱いが可能であり、特に複雑なものとはならない。

2 点 Padé 近似問題は、この観点から既にいくつか扱われている。例えば、連分数展開によるシステム低次元化の立場から連続系及び離散系に適用したものとしてそれぞれ文献 2), 3), 及び 4) があり、また最近では文献において、システムの部分実現問題として解析され⁵⁾、多入出力離散系の近似手法として提案されている。

本文では、システムの離散時間モデリング問題の立場から 2 点 Padé 近似法を扱うものである。本文の構成として、まず 2.1 節で問題を明確に定式化した後、近似モデルの explicit 表現 (2.2 節)、最小実現問題 (2.3 節)、Nuttall の表現形 (2.4 節) 及び連分数展開表現と高速逐次演算法 (2.5 節) につき議論する。こ

† 第 13 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 59・5)

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received September 19, 1984)

(Revised March 22, 1985)

れらは通常の Padé 近似の場合の自然な拡張となっている。特に2.5節は、モデリングの実用的立場から有用な解析手法と思われる。さらに3章では本手法の適用例として、プラントのモデリングの数値結果を示している。

2. 2点 Padé 近似によるプラントの 離散時間モデリング

2.1 問題設定

本章で扱う問題は以下の通りである。

まず、プラントの情報としてつぎの二つの特性、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{過渡応答特性:} \\ f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} s_i^* \zeta^{-i} \quad (1) \\ \text{定常応答特性:} \\ f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i (z-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \zeta^i \quad (2) \end{array} \right. \quad (\zeta = z-1)$$

が与えられたものとする。これより、プラントの離散時間伝達関数 $H(z)$ をつぎのような n 次有理関数で構成する。

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^n q_i \zeta^i}{\sum_{i=0}^n p_i \zeta^i} \quad (3)$$

$$(a_0 = p_0 = 1)$$

ただし、このとき $H(z)$ は $f(z)$ に対しつぎの関係式

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{過渡域: } f(z) - H(z) = 0(\zeta^{-l^*}) \quad (4) \\ \text{定常域: } f(z) - H(z) = 0(\zeta^l) \quad (5) \end{array} \right.$$

$$(l + l^* = 2n + 1)$$

が成り立つように決定されるものとする。すなわち近似有理関数 $H(z)$ の $\zeta^{-1}=0$ での展開係数（過渡応答特性）が(1)式の $\{s_i^*\}_{i=0}^{l^*-1}$ と一致し、 $H(z)$ の $\zeta=0$ での展開係数（定常域特性）が(2)式の $\{s_i\}_{i=0}^{l-1}$ と一致するようにする。このようにして得られた $H(z)$ は過渡域、定常域両特性を考慮してプラントを近似したモデルとなっている。

2.2 近似有理関数 $H(z)$ の explicit 表現形

前節で提起した2点 Padé 近似問題の解はつぎの形で与えられる。

近似有理関数を $H(\zeta) = Q(\zeta)/P(\zeta)$ とすると、

$$P(\zeta) = \begin{vmatrix} M_{-l^*+1} & \cdots & M_{-l^*} & M_{-l^*+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{-l^*} & M_{-l^*+1} & \cdots & M_{2n-l^*-1} & M_{2n-l^*} \\ \zeta^n & \cdots & \zeta & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$Q(\zeta) = \begin{vmatrix} M_{-l^*+1} & M_{-l^*+2} & \cdots & M_{-l^*} & M_{-l^*+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{-l^*} & M_{-l^*+1} & \cdots & M_{2n-l^*-1} & M_{2n-l^*} \\ s_0 \zeta^n & s_0 \zeta^{n-1} + s_1 \zeta^n & \cdots & \sum_{i=1}^n s_{i-1} \zeta^i & \sum_{i=0}^n s_i \zeta^i \end{vmatrix} \quad (l > l^*) \quad (7. a)$$

$$\begin{vmatrix} M_{-l^*+1} & M_{-l^*+2} & \cdots & M_{-l^*} & M_{-l^*+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{-l^*} & M_{-l^*+1} & \cdots & M_{2n-l^*-1} & M_{2n-l^*} \\ \sum_{i=0}^n s_i^* \zeta^{n-i} & \sum_{i=0}^{n-1} s_i^* \zeta^{n-i-1} & \cdots & s_0^* \zeta + s_1^* & s_0^* \end{vmatrix} \quad (l < l^*) \quad (7. b)$$

と書ける。ただし M_i は、つぎのように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{-i} = -s_i^* \quad (i=1 \cdots l^*-1) \\ M_0 = s_0 - s_0^* \\ M_i = s_i \quad (i=1 \cdots l-1) \end{array} \right. \quad (8)$$

また、上表現は(8)式に分母分子係数 $\{p_i\}_{i=0}^n, \{q_i\}_{i=0}^n$ を用いてつぎのように書くこともできる。

$$\begin{bmatrix} M_{-l^*+1} & \cdots & M_{-l^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{-l^*} & \cdots & M_{2n-l^*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ \vdots \\ p_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{-l^*+1} \\ \vdots \\ M_{2n-l^*} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} s_0^* & \cdots & s_{l^*-1}^* & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{l^*-1}^* & \cdots & s_0^* & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_0 \cdots s_{n-l^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ \vdots \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_n \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

上式は2点 Padé 近似関数 $H(\zeta)$ が、通常の Padé 近似同様 n 元連立一次方程式を解くことにより得られることを示している。

また、 $\{p_i\}_{i=0}^n, \{q_i\}_{i=0}^n$ から $\{a_i\}_{i=0}^n, \{b_i\}_{i=0}^n$ への変換は、(3)式において $\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = \sum_{i=0}^n p_i (z-1)^i$ 、

$\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i} = \sum_{i=0}^n q_i (z-1)^i$ であることにより、つぎのような線形変換により得られる。

$$[a_n \cdots a_0] = [p_n \cdots p_0] \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & n & n-1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (11)$$

上式右辺の行列の要素は、(1, 1)要素を頂点とするパスカルの三角形を構成している。

$\{b_i\}_{i=0}^n, \{q_i\}_{i=0}^n$ についても同様の関係が成り立つ。

2.3 最小部分実現問題

Padé 近似は与えられた有限個のデータを発生する

線形システムを求める問題であり、いわゆる部分実現問題と等価である。部分実現に必要なシステムの最小次数を決定する方法は、最小部分実現問題としてよく知られている⁶⁾。

本節では、その考え方を2点 Padé 近似の場合へ拡張し、2点 Padé 近似における最小部分実現問題についての結果を示す。

《定理 1》

システム特性(1)，(2)からの部分データ列

$$\{s_i\}_{i=0}^{l^*-1}, \{s_i\}_{i=0}^{l-1} \quad (12)$$

が、次数 N なるシステム $H(z)$ で最小実現可能ならば

$$\begin{cases} \det H[j/N] \neq 0 \\ \det H[j/i] = 0 \quad (i > N) \end{cases} \quad (13)$$

が成立する。但し、 $H[j/i]$ は下記の Hankel 行列であり、(13)式は与データより評価可能な $H[j/i]$ についてのみ考えるものとする。また逆に、(13)式を満たす $N \leq [(l+l^*)/2]$ が存在するならば、データ列(12)は N 次システムで最小実現される。

$$H[j/i] \triangleq \begin{cases} -1 & (i = -1) \\ 1 & (i = 0) \\ \begin{bmatrix} M_{-i+j+1} & \dots & M_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_j & \dots & M_{i+j-1} \end{bmatrix} & (i \geq 1) \end{cases} \quad (14)$$

(略証)

まず、つぎの命題が成立する。

特性(1)，(2)が N 次システムで最小実現されるための必要十分条件は、 $\det H[j/N] \neq 0 \quad (-\infty < j < \infty)$ かつ $\det H[j/i] = 0 \quad (i > N, -\infty < j < \infty)$ なることである。必要性: N 次元最小実現システムを $Q(\zeta)/P(\zeta)$ とする。後式は $Q(\zeta) - f(\zeta)P(\zeta) = 0$ から容易に示すことができる。さらに $P(0) \neq 0, P(\infty) \neq 0$ であるから、(6)式より $\det H[N-l^*/N] \neq 0, \det H[N-l^*+1/N] \neq 0$ である。仮にある j_0 に対し $\det H[j_0/N] = 0$ ならば、Hankel 行列に対する Sylvester's determinant identity: $\det H[j/N+1] \cdot \det H[j/N-1] = \det H[j-1/N] \cdot \det H[j+1/N] - (\det H[j/N])^2$ より $\det H[j/N] = 0 \quad (-\infty < j < \infty)$ となるが、これは前述に矛盾。故に $\det H[j/N] \neq 0 \quad (-\infty < j < \infty)$ が言える。十分性: 仮定前式より $l+l^*=2N+1$ なる部分データ(12)から(6)，(7)式に基づいて作られる N 次システム: $Q(\zeta)/P(\zeta)$ は確かに(12)を実現する ($P(0) \neq 0, P(\infty) \neq 0$ より)。さらに仮定後式は $Q(\zeta) - f(\zeta)P(\zeta) = 0$ を意味し、したがって特性(1)，(2)は N 次システムで実現可能。仮に、特性(1)，(2)が $N' < N$ 次システムで実現されるならば、その必要性より $\det H[j/N] = 0 \quad (-\infty < j < \infty)$ となるが、これ

は仮定と矛盾。故に、 N は最小次数である。

上命題を用いれば、本定理は明らかである。なお、(13)式を満たす $N \leq [(l+l^*)/2]$ が存在しない場合は、部分データ列(12)を適当に拡張したデータ列に対し、 $[(l+l^*)/2]$ 次以上のシステムで実現する必要がある。

2.4 Nuttall の実現形

2.2 節では、2点 Padé 近似法によるシステム特性の実現形として伝達関数による表現を示した。これに対し本節では、状態空間による表現を導くことを考える。通常の Padé 近似において、与えられたべき展開係数から直接そのシステムの状態空間実現を得る方法として Nuttall's compact form が知られている¹⁶⁾。ここでは、2点 Padé 近似に対する Nuttall の表現形を導き、さらにその形を用いてシステムの状態空間実現を行う。

まず近似有理関数 $H(\zeta)$ の分母多項式 $P(\zeta)$ ((6)式)に対して、(第 i 列) - (第 $i+1$ 列) $\times \zeta$ ($i=1 \dots n$) という変形を行うことにより、つぎのように書ける。

$$P(\zeta) = \begin{vmatrix} M_{-i^*+1} - \zeta M_{-i^*+2} & \dots & M_{-i^*} - \zeta M_{-i^*+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-i^*} - \zeta M_{n-i^*+1} & \dots & M_{2n-i^*} - \zeta M_{2n-i^*-1} \end{vmatrix} \quad (15)$$

また分子多項式 $Q(\zeta)$ に対しては、(第 i 列) - (第 $i+1$ 列) $\times \zeta$ ($i=1 \dots n$) に続いて、(第 $n+1$ 列) + $\sum_{i=1}^n$ (第 i 列) $\times \zeta^{-(n+1-i)}$ という変形を行うことにより、つぎのように書ける。

$$Q(\zeta) = \begin{cases} \begin{vmatrix} M_{-i^*+1} - \zeta M_{-i^*+2} & \dots & M_{-i^*} - \zeta M_{-i^*+1} & M_{-i^*+1} \zeta^{-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{n-i^*} - \zeta M_{n-i^*+1} & \dots & M_{2n-i^*} - \zeta M_{2n-i^*-1} & M_{n-i^*} \zeta^{-n} \\ -M_1 \zeta^{n+1} & \dots & -M_n \zeta^{n+1} & s_0 \end{vmatrix} & (l > l^*) \\ & (16. a) \\ \begin{vmatrix} M_{-i^*+1} - \zeta M_{-i^*+2} & \dots & M_{-i^*} - \zeta M_{-i^*+1} & M_{-i^*+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{n-i^*} - \zeta M_{n-i^*+1} & \dots & M_{2n-i^*} - \zeta M_{2n-i^*-1} & M_{n-i^*} \\ M_{-n} & \dots & M_{-1} & s_0^* \end{vmatrix} & (l < l^*) \\ & (16. b) \end{cases}$$

ここで、 $P(\zeta)$ が $Q(\zeta)$ の主座小行列式になっていることより $H(\zeta)$ の Nuttall's compact form として、

$$H(\zeta) = \frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)} = \begin{cases} d - c(A - \zeta E)^{-1} b \zeta & (l > l^*) \\ d^* - c^*(A - \zeta E)^{-1} b^* & (l < l^*) \end{cases} \quad (17. a)$$

$$= \begin{cases} d - c(A - \zeta E)^{-1} b \zeta & (l > l^*) \\ d^* - c^*(A - \zeta E)^{-1} b^* & (l < l^*) \end{cases} \quad (17. b)$$

が得られる。ただし、

$$A = \begin{bmatrix} M_{-l^*+1} & \cdots & M_{n-l^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-l^*+1} & \cdots & M_{2n-l^*} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} M_{-l^*+2} & \cdots & M_{n-l^*+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-l^*+1} & \cdots & M_{2n-l^*} \end{bmatrix}$$

$$c = [-M_1, \dots, -M_n]$$

$$c^* = [M_{-n}, \dots, M_{-1}]$$

$$b = \begin{bmatrix} M_{-l^*+1} \\ \vdots \\ M_{n-l^*} \end{bmatrix} \quad b^* = \begin{bmatrix} M_{n-l^*+1} \\ \vdots \\ M_{2n-l^*} \end{bmatrix}$$

$$d = s_0, \quad d^* = s_0^*$$

(17. a), (17. b) 式よりシステム入力 $U(\zeta)$, 状態 $X(\zeta)$, 出力 $Y(\zeta)$ に対しつぎの関係が成立する.

$$\begin{cases} E\zeta X(\zeta) = AX(\zeta) + bU(\zeta) \\ Y(\zeta) = c\zeta X(\zeta) + dU(\zeta) \end{cases} \quad (l > l^*) \quad (18. a)$$

$$\begin{cases} E\zeta X(\zeta) = AX(\zeta) + b^*U(\zeta) \\ Y(\zeta) = c^*X(\zeta) + d^*U(\zeta) \end{cases} \quad (l < l^*) \quad (18. b)$$

ここで, $\zeta = z-1$ であるのでこのシステムの状態空間表現として次式を得る.

$$\begin{cases} x_{k+1} = (E^{-1}A + I)x_k + E^{-1}bu_k \\ y_k = cE\bar{A}x_k + (cE^{-1}b - d)u_k \end{cases} \quad (l > l^*) \quad (19. a)$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = (E^{-1}A + I)x_k + E^{-1}b^*u_k \\ y_k = c^*x_k + d^*u_k \end{cases} \quad (l < l^*) \quad (19. b)$$

2.5 連分数展開表現と高速逐次演算法

2.2 節, 2.4 節において 2点 Padé 近似の explicit 表現, Nuttall の表現形をそれぞれ示した. 本節では 2点 Padé 近似を連分数展開形により表現し, さらにその表現に基づく数値的に有効な演算法を記すことにする.

通常の Padé が近似 C-fraction^{7a)} (文献 2) では Cauchy first or second form と命名されている) あるいは J-fraction^{7b)} と呼ばれる連分数展開形で, また 2点 Padé 近似の特殊な場合: $|l-l^*|=1$ が T-fraction^{7c)} (文献 2) では Cauchy third form) なる形でそれぞれ表現されることは既に知られている. そこで, 一般の 2点 Padé 近似をつぎの形に展開表現することを考える.

$$H(\zeta) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1\zeta}{1+\mu_1\zeta+\dots+1+\mu_l^*\zeta+1+\mu_{l^*+1}\zeta} \\ - \frac{\lambda_{l^*+2}\zeta^2}{-1+\mu_{l^*+2}\zeta-\dots-1+\mu_{n-1}\zeta-1+\mu_n\zeta} \quad (\zeta=z-1) \quad (20)$$

ただし, $l > l^*$ すなわち, $0 \leq l^* \leq n$ の場合を示した. $l < l^*$ の場合は $\zeta \rightarrow \zeta^{-1}$, $l^* \rightarrow l$ とすればよい. なお, 以後の議論は全て $l > l^*$ の場合について記す.

(20) 式は, T-fraction の後に J-fraction を連結した形となっているので T-J-fraction と呼ぶことにする. 上連分数展開を第 i 項までで打ち切った有理関数の分母分子多項式をそれぞれ $P_i(\zeta)$, $Q_i(\zeta)$ とすると, つぎの漸化式が成立する^{7d)}.

$$P_{-1}(\zeta) = 0, \quad P_0(\zeta) = 1, \quad Q_{-1}(\zeta) = 1, \quad Q_0(\zeta) = \lambda_0$$

$$\begin{cases} P_{i+1}(\zeta) = (1+\mu_{i+1}\zeta)P_i(\zeta) + \lambda_{i+1}\zeta P_{i-1}(\zeta) \\ Q_{i+1}(\zeta) = (1+\mu_{i+1}\zeta)Q_i(\zeta) + \lambda_{i+1}\zeta Q_{i-1}(\zeta) \end{cases} \quad (i=0 \dots l^*)$$

$$\begin{cases} P_{i+1}(\zeta) = (1+\mu_{i+1}\zeta)P_i(\zeta) - \lambda_{i+1}\zeta^2 P_{i-1}(\zeta) \\ Q_{i+1}(\zeta) = (1+\mu_{i+1}\zeta)Q_i(\zeta) - \lambda_{i+1}\zeta^2 Q_{i-1}(\zeta) \end{cases} \quad (i=l^*+1 \dots n-1) \quad (21)$$

さらに, 2.2 節に関連して $H_i(\zeta) \triangleq Q_i(\zeta)/P_i(\zeta)$ の explicit form は次式で与えられる.

$$\begin{cases} H_i(\zeta) = \det \begin{bmatrix} \hat{H}[0/i] \\ g(\zeta) \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} \hat{H}[0/i] \\ h(\zeta) \end{bmatrix} \quad (i=0 \dots l^*) \\ H_i(\zeta) = \det \begin{bmatrix} \hat{H}[i-l^*/i] \\ g(\zeta) \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} \hat{H}[i-l^*/i] \\ h(\zeta) \end{bmatrix} \quad (i=l^* \dots n) \end{cases} \quad (22)$$

ここで, $\hat{H}[j/i]$ 及び $g(\zeta)$, $h(\zeta)$ はそれぞれ $i \times (i+1)$ 次行列及び $(i+1)$ 次行ベクトルでつぎの通りである.

$$\begin{cases} \hat{H}[j/i] \triangleq \begin{bmatrix} M_{-i+j+1} & \cdots & M_j & M_{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_j & \cdots & M_{i+j-1} & M_{i+j} \end{bmatrix} \\ g(\zeta) \triangleq [s_0\zeta^i \quad s_0\zeta^{i-1} + s_1\zeta^i \quad \cdots \quad \sum_{k=0}^i s_k\zeta^k] \\ h(\zeta) \triangleq [\zeta^i \quad \zeta^{i-1} \quad \cdots \quad \zeta \quad 1] \end{cases} \quad (23)$$

さて, 上 2 式 (21) 及び (22) を比較することにより, 連分数展開式 (20) 中のパラメータ $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ はそれぞれ以下の形で得られる.

$$\begin{cases} \lambda_0 = s_0 \\ \lambda_i = -\frac{\det H[0/i-2] \det H[1/i]}{\det H[0/i-1] \det H[1/i-1]} \quad (i=1 \dots l^*+1) \\ \lambda_i = \frac{\det H[i-l^*-2/i-2] \det H[i-l^*/i]}{(\det H[i-l^*-1/i-1])^2} \quad (i=l^*+2 \dots n) \\ \mu_i = -\frac{\det H[0/i-1] \det H[1/i]}{\det H[1/i-1] \det H[0/i]} \quad (i=1 \dots l^*) \\ \mu_{l^*+1}^* = -\frac{\det H[0/l^*] \det H[2/l^*+1]}{\det H[1/l^*] \det H[1/l^*+1]} \\ \mu_i = \frac{\det H'[i-l^*-1/i-1] \det H'[i-l^*/i]}{\det H[i-l^*-1/i-1] \det H[i-l^*/i]} \quad (i=l^*+2 \dots n) \end{cases} \quad (24)$$

ただし, 式中 $H[j/i]$ は (14) 式で定義された Hankel 行列であり, $H'[j/i]$ の定義は次式による.

$$H'[j/i] \triangleq \begin{cases} M_{j+1} & (i=1) \\ \begin{bmatrix} M_{-i+j+1} & \cdots & M_{j-1} & M_{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_j & \cdots & M_{i+j-1} & M_{i+j} \end{bmatrix} & (i \geq 2) \end{cases} \quad (26)$$

(24), (25) 式より, パラメータ λ_i , μ_i の特性データ列 s_i , s_i^* ((1), (2) 式) への依存関係は,

$$\begin{cases} \lambda_i = F(s_0, \dots, s_i, s_0^*, \dots, s_{i-2}^*) \quad (i=0 \dots l^*) \\ \lambda_i = F(s_0, \dots, s_{2i-l^*-1}, s_0^*, \dots, s_{l^*-1}^*) \quad (i=l^*+1 \dots n) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mu_i = F(s_0, \dots, s_i, s_0^*, \dots, s_{i-1}^*) & (i=1 \dots l^*) \\ \mu_i = F(s_0, \dots, s_{2i-l^*}, s_0^*, \dots, s_{i-l^*}^*) & (i=l^*+1 \dots n) \end{cases} \quad (28)$$

となることがわかり、この事実によれば、データの追加に伴う近似有理関数の更新を逐次演算に従い効率的に行うことが可能となる。与特性データ列 $\{s_i\}_{i=0}^n$, $\{s_i^*\}_{i=0}^{l^*-1}$ から、T-J-fraction 表現された近似有理関数のパラメータ $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ 及び分母・分子係数 $\{p_i\}_{i=0}^n$, $\{q_i\}_{i=0}^n$ をそれぞれ求める高速逐次演算アルゴリズムを付録に示す。

本アルゴリズムによれば、新たなデータの追加： $\{s_i, s_i^*\}$ ($0 \leq i \leq l^*$) or $\{s_{2i-l^*}, s_{2i-l^*}^*\}$ ($l^*+1 \leq i \leq n$) に伴う近似関数の更新： $H_{i-1}(\zeta) \rightarrow H_i(\zeta)$ が容易になされ（この時約 θ_i 回の乗算が必要）、また次数 n が大なる時、最終的な近似関数 $H_n(\zeta)$ を得る過程においても連立方程式(9)を直接解く方法に比べて演算量が少なくなる（乗算回数 $3n^2$ 対 $1/3n^3$ ）。さらに、近似関数の実用的次数決定の指標としてパラメータ λ_i を用いることができる。すなわち、 λ_{m+1} の絶対値が相対的に小さくなった時：

$$|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m| \gg |\lambda_{m+1}| \quad (29)$$

近似関数の次数は m と選定される。これは、定理1及び(24)、(25)式から理論的にも説明できる。仮に、 $\{s_i\}_{i=0}^n$, $\{s_i^*\}_{i=0}^{l^*-1}$ が次数 m からのデータ列であれば、定理1より(24)式の右辺分子第2項が零となるからである。しかし、逆は必ずしも成立せず関係式(29)が成立しても実際には m より高次の近似系を設定しなければならない場合も生ずる。この理由は、任意の有理関数が必ずしも T-J-fraction 表現可能ではないことに起因し(注)、この場合本アルゴリズムは適用できなくなる。しかし、この点に注意すれば大部分の系に対し数値的に有効な演算手法であると思われる。

3. 例題

本章では、2.2 節で示した手法によるプラントの離散時間モデリングの例題を示す。プラントとして比較的大きなアンダーシュートを持つものを考え、これを2次の離散時間システムとしてモデリングした結果を Fig. 1 (1)~(4) に示す。これらの結果を比較してみると、定常応答特性のみからモデリングした(1)では、アンダーシュートの部分の近似がうまくできておらず、また過渡応答特性のみからモデリングした(4)では、定常位置偏差が生じている。これらに対して定

(注) T-J-fraction (20) において、 $\lambda_i (i=1, \dots, n)$, $\mu_i (i=1, \dots, l^*+1)$ は共に非零有限値に定まることが必要で、このため Hankel 行列式に対する一連の非零条件がある^{7b, c)}。

(1) $l=5$, $l^*=0$

(2) $l=3$, $l^*=2$

(3) $l=2$, $l^*=3$

(4) $l=0$, $l^*=5$

Fig. 1 Unit step responses of original plant and 2nd order's model

— original plant
○○○○○ model

常域、過渡域両特性を考慮した(2), (3)では, 良好なモデリング結果が得られていることがわかる。

4. 結 言

本文では, 2点 Padé 近似問題について種々の議論を行った。ここでの2点 Padé 近似は $z=1, \infty(\zeta=0, \infty)$ といった特殊な場合であるため, 通常の Padé 近似に類似した結果が得られている。本文では, システムモデリングの立場からこの問題を扱っているが, 近似問題において常に問題とされる近似モデルの次数決定について, その実用的解決策の一つが2.5節に示されている。但し, 通常の Padé 近似の場合にもしばしば問題となる近似モデルの安定性, 最小位相性の保証については, 理論的改善を得るには至らなかった。

なお, 制御系設計問題への応用としての2点 Padé 近似は, 北森, 大日方等と同様な部分モデルマッチング法の考え方を展開する可能性を与えるもので, 文献(8)にその適用例が見られる。

最後に, 本研究遂行に当たり貴重なご意見・ご助言を頂きました高橋進一教授に感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) G. A. Baker and P. R. Graves-Morris: Padé Approximants, Part I: Basic Theory, Part II: Extensions and Applications, Addison-Wesley (1981)
a) Part II, Chap. 1, Sec. 1.1
b) Part I, Chap. 1, Sec. 1.3, p. 16
- 2) L. S. Shieh and M. J. Goldman: Continued Fraction Expansion and Inversion of the Cauer Third Form, IEEE Trans., **CAS-21**-3, 341/345 (1974)
- 3) Y. Shamash: Continued Fraction Methods for the Reduction of Constant-Linear Multivariable Systems, International J. of Systems Sci., **7**-7, 743/758 (1976)
- 4) Y. Shamash: Continued Fraction Methods for the Reduction of Discrete Time Dynamic Systems, International J. of Control, **20**-2, 267/275 (1974)
- 5) Y. Bistritz and U. Shaked: Discrete Multivariable System Approximations by Minimal Padé-Type Stable Models, IEEE Trans., **CAS-31**-4, 382/390 (1984)
- 6) 木村英紀: デジタル信号処理と制御, 3章, 3.5節, 昭晃堂 (1982)
- 7) W. B. Jones and W. J. Thron: Continued Fractions, Analytic Theory and Applications, Addison-Wesley
a) Chap. 7, Sec. 7.1.1 b) Chap. 7, Sec. 7.2.1
c) Chap. 7, Sec. 7.3.1 d) Chap. 2, Sec. 2.1.1 p. 20
- 8) 勝部, 他: 2-point Padé近似法とその制御問題への応用, 第13回制御理論シンポジウム資料, 177/182 (1984)

《付 録》

Algorithm: $\{s_i\}_{i=0}^{l-1} \quad \{s_i^*\}_{i=0}^{l^*-1}$

$\rightarrow \{\lambda_i\}_{i=0}^n \quad \{\mu_i\}_{i=1}^n \quad \{p_i\}_{i=0}^n \quad \{q_i\}_{i=0}^n$

(1) 初期設定

$$\lambda_0 = s_0, \quad \sigma_{-1} = K_{-1} = 1, \quad \tau_{-1} = 0, \quad p_0^0 = 1, \quad q_0^0 = s_0$$

$$M_j = -s_j^*, (j < 0), \quad s_0 - s_j^* (j = 0), \quad s_j (j > 0)$$

$$p_j^i = q_j^i = 0 (i < j, i < 0, j < 0)$$

(2) 近似関数更新過程

(a) for $i = 01 \dots l^* - 1$

$$\begin{cases} \sigma_i = -\sum_{j=0}^i p_j^i M_{i-j+1} \\ K_i = \sigma_i^{-1} \cdot \sum_{j=0}^i p_j^i M_{i-j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} = -\sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i \\ \mu_{i+1} = K_{i-1} \cdot K_i \end{cases}$$

for $j = 01 \dots i + 1$

$$\begin{cases} p_j^{i+1} = p_j^i + \mu_{i+1} p_{j-1}^i + \lambda_{i+1} p_{j-1}^{i-1} \\ q_j^{i+1} = q_j^i + \mu_{i+1} q_{j-1}^i + \lambda_{i+1} q_{j-1}^{i-1} \end{cases}$$

(b) $i = l^*$

$$\begin{cases} \sigma_{l^*} = -\sum_{j=0}^{l^*} p_j^{l^*} M_{l^*-j+1} \\ \tau_i = \sigma_i^{-1} \cdot \sum_{j=0}^i p_j^i M_{i-j+2} \quad (i = l^* - 1, l^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{l^*+1} = -\sigma_{l^*}^{-1} \cdot \sigma_{l^*} \\ \mu_{l^*+1} = \tau_{l^*-1} - \tau_{l^*} \end{cases}$$

for $j = 01 \dots l^* + 1$

$$\begin{cases} p_j^{l^*+1} = p_j^{l^*} + \mu_{l^*+1} p_{j-1}^{l^*} + \lambda_{l^*+1} p_{j-1}^{l^*-1} \\ q_j^{l^*+1} = q_j^{l^*} + \mu_{l^*+1} q_{j-1}^{l^*} + \lambda_{l^*+1} q_{j-1}^{l^*-1} \end{cases}$$

(c) for $i = l^* + 1 \dots n - 1$

$$\begin{cases} \sigma_i = -\sum_{j=0}^i p_j^i M_{2i-j-l^*+1} \\ \tau_i = \sigma_i^{-1} \cdot \sum_{j=0}^i p_j^i M_{2i-j-l^*+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{i+1} = \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i \\ \mu_{i+1} = \tau_{i-1} - \tau_i \end{cases}$$

for $j = 01 \dots i + 1$

$$\begin{cases} p_j^{i+1} = p_j^i + \mu_{i+1} p_{j-1}^i - \lambda_{i+1} p_{j-1}^{i-1} \\ q_j^{i+1} = q_j^i + \mu_{i+1} q_{j-1}^i - \lambda_{i+1} q_{j-1}^{i-1} \end{cases}$$

(3) 最終設定

$$\begin{cases} p_j = p_j^n & (j = 01 \dots n) \\ q_j = q_j^n \end{cases}$$

但し, 上記は $l > l^*$ の場合. $l = l^*$ の場合はつぎの変更が必要.

$$l^* \rightarrow l, \quad M_j \rightarrow M_{-j} \quad (\text{step (2)})$$

$$\begin{cases} p_j = p_{n-j}^n & (j = 01 \dots n) \\ q_j = q_{n-j}^n \end{cases} \quad (\text{step (3)})$$