線形システムにおける感度最小構造
としての平衡形実現^{*}川 又 政 征^{*}・岩 月 正 見^{*}・樋 口 龍 雄^{*}

Balanced Realizations as Minimum Sensitivity Structures in Linear Systems

Masayuki KAWAMATA^{*}, Masami IWATSUKI^{*} and Tatsuo HIGUCHI^{*}

Recently, balanced realizations in linear systems have been proposed from the viewpoint of controllability and observability measure of the state-space. They have been extended to various linear systems such as time-variant systems and a class of 2-dimensional systems, and have been applied to model reduction. However, basic properties of balanced realizations have not been investigated so far. On the other hand, system sensitivities are important measures to compare realization structures.

This paper shows that balanced realizations in discrete-time linear systems are derived as minimum sensitivity structures. The statistical sensitivity of linear state-space systems is proposed and represented by the controllability and observability Grammians. It is shown that the statistical sensitivity depends on realization structures. The statistical sensitivity is minimized, and minimum sensitivity structures are obtained via equivalent transformations. The class of minimum sensitivity structures includes balanced realizations as a special case.

Key Words: balanced realization, sensitivity, structure, controllability, observability

1. ま え が き

与えられた伝達関数を有する状態空間モデルを求めることは実現問題とよばれ、線形システムの研究において基礎的かつ重要な課題である。最近、線形システムの実現構造として平衡形実現(balanced realization)

が Moore により提案された^{1),2)}。平衡形実現は、状態空間の可制御性と可観測性の測度に着目して構成される実現構造である。Moore により提案された平衡形実現は、時変システムやあるクラスの2次元システムへ拡張されている³⁾⁻⁵⁾。しかし、平衡形実現に関する従来の研究においては、その実現法やモデル低次元化への応用^{2),3),5),6)}が示されているものの、平衡形実現の性質はほとんど明らかにされていない。一方、線形システムの実現構造を評価する上で、システムの感度は重要な評価規準であり、一般には、感度が最小な実現構造が望ましいことは言うまでもない。平衡形実現は、他の構造に較べ低感度となっていることが示されている⁷⁾。

本論文では、感度が最小である実現構造として平衡形実現が導出されることを明らかにする。まず、離散時間の線形システムの実現構造に対する新しい感度(統計的感度)を提案し、この感度は、可制御性グラムと可観測性グラムによって表わされることを示す。つぎに、状態変数の等価変換により統計的感度の最小値と感度最小構造を求め、平衡形実現は感度最小構造となっていることを明らかにする。

2. 平衡形実現

以後の議論のために、平衡形実現の概略についてここで述べておく。離散時間の安定な n 次伝達関数を、 $H(z)$ とする。この伝達関数を有するシステムはつぎの最小次数の状態方程式で表わされる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad (1.1)$$

$$y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + du(k) \quad (1.2)$$

ここで、 $\mathbf{x}(k)$ は n 次状態ベクトルであり、 $u(k)$ と $y(k)$ はそれぞれスカラの入力と出力である。 $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, d は適当な大きさの実係数行列である。ただし、伝達関数と係数行列はつぎの関係にある。

^{*} 計測自動制御学会東北支部講演会で発表 (昭59・10)

^{*} 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

^{*} Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

(Received February 14, 1985)

(Revised April 22, 1985)

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \quad (2)$$

与えられた伝達関数 $H(z)$ を有する実現構造が無数に存在することはつぎのように示される。任意の $n \times n$ の正則行列を $\mathbf{T}$ とし、状態ベクトルを $\mathbf{x}'(k) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(k)$ と変換する。このとき、新しい状態ベクトル $\mathbf{x}'(k)$ を有する実現構造は、 $(\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{b}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{c}' = \mathbf{c}\mathbf{T}, d)$ となる。

平衡形実現は、状態空間の可制御性と可観測性の測度に着目して決定される実現構造である。平衡形実現を求めるにはつぎのようにする。まず、つぎのリアプノフの方程式の解 $\mathbf{K}$ と $\mathbf{W}$ を求める。

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \mathbf{b}\mathbf{b}' \mathbf{A}^{j'} \quad (3)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}'\mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{c}'\mathbf{c} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^{j'} \mathbf{c}'\mathbf{c} \mathbf{A}^j \quad (4)$$

ここで $\mathbf{K}$ と $\mathbf{W}$ はそれぞれ実現構造 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ の可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンとよばれる。 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ が安定であり、可制御かつ可観測ならば、可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは対称正定である。 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ の状態空間の可制御性と可観測性の強さは、それぞれのグラミアンの固有値によって知ることができる。可制御性の強い部分空間は、 $\mathbf{K}$ の固有値の中で相対的に大きい固有値に対応する固有ベクトルによって張られる空間である²⁾。可観測性の強い部分空間は、 $\mathbf{W}$ の固有値の中で相対的に大きい固有値に対応する固有ベクトルによって張られる空間である²⁾。 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ に等価な構造 $(\mathbf{A}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', d)$ の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンをそれぞれ $\mathbf{K}'$ と $\mathbf{W}'$ とすれば、

$$\mathbf{K}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{W}' = \mathbf{T}'\mathbf{W}\mathbf{T} \quad (6)$$

となる。(5)式から、 $\mathbf{K}'$ の固有値と $\mathbf{K}$ の固有値は一般には異なり、等価変換行列 $\mathbf{T}$ の選び方により状態空間の可制御性の強さが変化することがわかる。可観測性の強さに関しても同様のことが(6)式から言える。 $\mathbf{K}$ と $\mathbf{W}$ は対称正定行列であるから、適当な等価変換行列を選べば、つぎのような形の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを有する実現構造が得られる²⁾。

$$\text{i) 入力正規形: } \mathbf{K}' = \mathbf{I}, \mathbf{W}' = \text{diag}(\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2) \quad (7)$$

$$\text{ii) 出力正規形: } \mathbf{K}' = \text{diag}(\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2), \mathbf{W}' = \mathbf{I} \quad (8)$$

$$\text{iii) 平衡形: } \mathbf{K}' = \mathbf{W}' = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (9)$$

ここで、 $\theta_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ は、行列積 $\mathbf{K}\mathbf{W}$ の固有値である。ただし、

$$\mathbf{K}'\mathbf{W}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{W}\mathbf{T} \quad (10)$$

が成立することにより、 $\theta_i (>0)$ は等価変換行列に依存しない量であり、システムの2次モード (second-order mode) とよばれる⁸⁾。

3. 線形システムの統計的感度

3.1 統計的感度の定義

従来、線形システムの感度としてさまざまなものが提案されている。例えば、状態遷移行列の固有値 $\lambda_i(\mathbf{A})$ の係数 a_{ij} に関する微分 $\partial \lambda_i(\mathbf{A}) / \partial a_{ij}$ を用いるもの⁹⁾ や周波数特性 $H(e^{j\omega})$ の係数 a_{ij} に関する微分 $\partial H(e^{j\omega}) / \partial a_{ij}$ を用いるもの¹⁰⁾ などがある。ここでは、時間領域においてシステムが記述されていることに着目し、つぎのような考え方のもとに感度を定義する。まず、(1)式の実現構造 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ に対して、その係数行列がランダムに微小変化しているつぎの仮想的システムを考える。

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}(k)]\tilde{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}(k)]u(k) \quad (11.1)$$

$$\tilde{y}(k) = [\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}(k)]\tilde{\mathbf{x}}(k) + [d + \Delta d(k)]u(k) \quad (11.2)$$

ここで、係数行列の微小変化 $\Delta \mathbf{A}(k)$, $\Delta \mathbf{b}(k)$, $\Delta \mathbf{c}(k)$, $\Delta d(k)$ の各要素は、互いに無相関であり、入力信号 $u(k)$ と相関のない白色雑音と仮定し、その平均を0、分散を $\sigma^2 (0 < \sigma \ll 1)$ とする。入力信号 $u(k)$ は、平均0、分散1の正規白色過程と仮定する。このとき、定常誤差、

$$E[\Delta y^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[\{\tilde{y}(k) - y(k)\}^2] \quad (12)$$

が求められ、これを用いてつぎの量が定義できる。

$$S = E[\Delta y^2] / \sigma^2 \quad (13)$$

(12)式は、 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ の係数行列の微小変化に起因する出力誤差を表わし、(13)式の S は、係数行列の微小変化に起因する出力の変化の度合いを表わしている。よって、(13)式の S は、実現構造 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ の感度と考えてよい。本論文では、この S を統計的感度とよぶことにする。

以上のように定義される統計的感度 S を、係数行列 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d$ を用いて表わすために、まず定常誤差 $E[\Delta y^2]$ を求める。(1)式と(11)式を用いれば、出力誤差 $\Delta y(k) = \tilde{y}(k) - y(k)$ は次式によって表わされる。

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(k) + \Delta \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{A}(k)\mathbf{v}(k) + \Delta \mathbf{b}(k)u(k) \quad (14.1)$$

$$\Delta y(k) = \mathbf{c}\mathbf{v}(k) + \Delta \mathbf{c}(k)\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{c}(k)\mathbf{v}(k) + \Delta d(k)u(k) \quad (14.2)$$

ここで、 $\mathbf{v}(k) = (\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))$ は状態誤差ベクトルであ

る。(14.1)式と(14.2)式の右辺において、 $\Delta A(k)v(k)$ と $\Delta c(k)v(k)$ は、 $O(\sigma^2)$ の値であり、他の項は、 $O(\sigma)$ の値を有する。 $0 < \sigma \ll 1$ であるから、 $\Delta A(k)v(k)$ と $\Delta c(k)v(k)$ は他の項に較べて十分小さい。したがって、以後の解析においては、この二つの項を省略する。入力信号と係数行列の微小変化に対する前述の統計的な仮定を利用すれば、(14.2)式から、 $E[\Delta y^2(k)]$ はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} E[\Delta y^2(k)] &= E\{c^T v(k) + \Delta c(k)x(k) + \Delta d(k)u(k)\} \cdot \\ &\quad \{c^T v(k) + \Delta c(k)x(k) + \Delta d(k)u(k)\}^T \\ &= c^T E[v(k)v^T(k)]c \\ &\quad + E[\Delta c(k)x(k)x^T(k)\Delta c^T(k)] \\ &\quad + E[\Delta d^2(k)u^2(k)] \\ &= c^T V(k)c + \sigma^2 \text{tr}[X(k)] + \sigma^2 \quad (15) \end{aligned}$$

ここで、

$$V(k) = E[v(k)v^T(k)] \quad (16)$$

$$X(k) = E[x(k)x^T(k)] \quad (17)$$

といている。(16)式の状態誤差ベクトルの共分散行列 $V(k)$ は、(14.1)式よりつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} V(k+1) &= E[v(k+1)v^T(k+1)] \\ &= E\{A v(k) + \Delta A(k)x(k) + \Delta b(k)u(k)\} \cdot \\ &\quad \{A v(k) + \Delta A(k)x(k) + \Delta b(k)u(k)\}^T \\ &= A E[v(k)v^T(k)] A^T \\ &\quad + E[\Delta A(k)x(k)x^T(k)\Delta A^T(k)] \\ &\quad + E[\Delta b(k)\Delta b^T(k)u^2(k)] \\ &= A V(k)A^T + \sigma^2 \text{tr}[X(k)]I + \sigma^2 I \quad (18) \end{aligned}$$

(17)式の状態ベクトルの共分散行列 $X(k)$ は、(1.1)式よりつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} X(k+1) &= E[x(k+1)x^T(k+1)] \\ &= E\{A x(k) + b u(k)\} \cdot \{A x(k) + b u(k)\}^T \\ &= A X(k)A^T + b b^T \quad (19) \end{aligned}$$

状態遷移行列 A が安定ならば、共分散行列 $V(k)$ と $X(k)$ は収束するので、これらの定常状態における値をそれぞれ V と X とおけば、 V と X はそれぞれつぎのリアプノフの方程式の解として得られる。

$$X = A X A^T + b b^T \quad (20)$$

$$V = A V A^T + \sigma^2 \{\text{tr}(X) + 1\} I \quad (21)$$

したがって、上式の X と V を(15)式に代入すれば、定常誤差 $E[\Delta y^2]$ が次式によって最終的に得られる。

$$E[\Delta y^2] = c^T V c + \sigma^2 \text{tr}(X) + \sigma^2 \quad (22)$$

上式から得られる定常誤差 $E[\Delta y^2]$ を用いて、実現構造 (A, b, c, d) の統計的感度が $S = E[\Delta y^2]/\sigma^2$ によって求められる。

3.2 統計的感度と可制御性・可観測性グラミアンの関係

前節で求められた統計的感度 S と可制御性グラミア

ン K 、可観測性グラミアン W の関係を考察するために、(22)式の定常誤差 $E[\Delta y^2]$ を K と W によって表わすことを考える。まず、(20)式と(3)式の比較から、共分散行列 X は可制御性グラミアン K に等価であることがわかる。また、(22)式の右辺第1項は、 V が(21)式のリアプノフの方程式の解であることを考慮すれば、つぎのように変形できる。

$$\begin{aligned} c^T V c &= \text{tr}(c^T V c) \\ &= \text{tr}\left[c \sum_{j=0}^{\infty} A^j \sigma^2 \{\text{tr}(K) + 1\} A^{jT} c^T\right] \\ &= \sigma^2 \{\text{tr}(K) + 1\} \text{tr}\left[\sum_{j=0}^{\infty} A^j c^T c A^j\right] \quad (23) \end{aligned}$$

上式右辺の無限級数は、(4)式から、可観測性グラミアン W に等価であることがわかるので、次式が成立する。

$$c^T V c = \sigma^2 \{\text{tr}(K) + 1\} \text{tr}(W) \quad (24)$$

したがって、上式の $c^T V c$ および $X = K$ を(22)式に代入すれば、定常誤差 $E[\Delta y^2]$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} E[\Delta y^2] &= \sigma^2 \{\text{tr}(K) + 1\} \text{tr}(W) + \sigma^2 \text{tr}(X) + \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \{\text{tr}(K) + 1\} \{\text{tr}(W) + 1\} \quad (25) \end{aligned}$$

よって、実現構造 (A, b, c, d) の統計的感度 S は、

$$S = \{\text{tr}(K) + 1\} \{\text{tr}(W) + 1\} \quad (26)$$

と表わされる。上式は、実現構造の統計的感度が、状態空間の可制御性と可観測性の強さに密接に結びついていることを示している。

統計的感度の例

i) 入力正規形、出力正規形、平衡形実現

(7)式～(9)式の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを用いれば、これら三つの実現構造の統計的感度はそれぞれつぎようになる。

$$\text{入力正規形, 出力正規形: } (n+1) \left(\sum_{i=1}^n \theta_i^2 + 1 \right)$$

$$\text{平衡形: } \left(\sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right)^2$$

ii) 全域通過伝達関数の平衡実現

伝達関数が全域通過特性を有するための必要十分条件は、その2次モードがすべて1であることである¹¹⁾。よって、全域通過伝達関数の入力正規形と出力正規形、平衡形実現すべて同一であり、これらの統計的感度は $(n+1)^2$ である。

4. 感度最小構造としての平衡形実現

4.1 統計的感度の最小化

前章によって定義された感度が実現構造に依存することを示すために、実現構造 $(T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ の感度 S' を求めてみる。 $(T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ の可制

御性グラミアンと可観測性グラミアンはそれぞれ(5)式と(6)式のようになるから、この実現構造の統計的感度は、

$$\begin{aligned} S' &= \{\text{tr}(\mathbf{K}') + 1\} \{\text{tr}(\mathbf{W}') + 1\} \\ &= \{\text{tr}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}) + 1\} \{\text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{W}\mathbf{T}) + 1\} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。上式は等価変換行列 $\mathbf{T}$ を含むことから、統計的感度は実現構造に依存することがわかる。また、統計的感度の基本的性質として、統計的感度には上限が存在しないこと、および統計的感度は座標軸の直交変換に対して不変であることもわかる。

つぎに、(27)式の統計的感度が等価変換行列の関数となっていることを利用し、統計的感度の最小値とこれを達成する等価変換行列を求める。統計的感度の最小化を行うために、任意の正則な等価変換行列 $\mathbf{T}$ は、つぎの形式に必ず分解できることに注目する。(付録参照)

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 \mathbf{R} \mathbf{D} \mathbf{U} \quad (28)$$

ただし、 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{U}$ は $n \times n$ の直交行列であり、 $\mathbf{D}$ は $n \times n$ の正定な対角行列であり、 $\mathbf{T}_0$ は、

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0' = \mathbf{K} \quad (29)$$

を満たす任意の $n \times n$ の正則行列である。このような等価変換行列の分解を用いると、

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}) &= \text{tr}(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-1}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{U}\mathbf{U}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}'\mathbf{D}^{-1}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{D}^{-2}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{W}\mathbf{T}) &= \text{tr}(\mathbf{U}'\mathbf{D}'\mathbf{R}'\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0\mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{U}) \\ &= \text{tr}[\mathbf{D}^2\mathbf{R}'(\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0)\mathbf{R}] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} S' &= \{\text{tr}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}) + 1\} \{\text{tr}(\mathbf{T}'\mathbf{W}\mathbf{T}) + 1\} \\ &= \{\text{tr}(\mathbf{D}^{-2}) + 1\} \{\text{tr}[\mathbf{D}^2\mathbf{R}'(\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0)\mathbf{R}] + 1\} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n d_i^{-2} + 1 \right) \left(\sum_{j=1}^n d_j^2 p_j^2 + 1 \right) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ただし、行列 $\mathbf{R}'(\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0)\mathbf{R}$ の対角要素を p_j^2 としている。上式のような統計的感度の式の変形を基礎として、統計的感度の最小値と、これを達成する等価変換行列 $\mathbf{T}$ を構成する $\mathbf{U}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{R}$ をこの順に求めて行く。

i) 直交行列 $\mathbf{U}$

(32)式に直交行列 $\mathbf{U}$ の要素は現れていないため、直交行列 $\mathbf{U}$ は統計的感度には影響を与えない。よって、統計的感度の最小化のためには、直交行列 $\mathbf{U}$ は任意でよい。

ii) 対角行列 $\mathbf{D}$

Cauchy-Schwarz の不等式を (32) 式に適用すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} S' &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(d_i^{-2} + \frac{1}{n} \right) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(d_j^2 p_j^2 + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &\geq \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(d_i^{-2} + \frac{1}{n} \right) \left(d_i^2 p_i^2 + \frac{1}{n} \right)} \right\}^2 \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、等号は、

$$d_i^{-2} + \frac{1}{n} = \alpha \left(d_i^2 p_i^2 + \frac{1}{n} \right), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

α は任意の正数

のとき成立する。さらに、(33)式の右辺を変形すれば、つぎの不等式が得られる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(d_i^{-2} + \frac{1}{n} \right) \left(d_i^2 p_i^2 + \frac{1}{n} \right)} \right\}^2 \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(p_i + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(d_i p_i - \frac{1}{d_i} \right)^2} \right\}^2 \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n p_i + 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、等号は、

$$d_i = p_i^{-1/2}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (36)$$

のとき成立する。したがって、(33)式と(35)式から、統計的感度に対してつぎの不等式が成立する。

$$S' \geq \left(\sum_{i=1}^n p_i + 1 \right)^2 \quad (37)$$

ここで、等号の成立は、(34)式と(36)式より、

$$d_i = p_i^{-1/2} \quad (38)$$

のときに限られる。よって、 S' が最小値を有するためには、対角行列 $\mathbf{D}$ は、

$$\mathbf{D} = \text{diag}(p_1^{-1/2}, p_2^{-1/2}, \dots, p_n^{-1/2}) \quad (39)$$

でなければならない。

iii) 直交行列 $\mathbf{R}$

つぎに、(37)式の右辺 $\left(\sum_{i=1}^n p_i + 1 \right)$ の最小値を求める。 p_i は、対称正定行列 $\mathbf{R}'(\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0)\mathbf{R}$ の対角要素 p_i^2 の平方根であり、 $\sum_{i=1}^n p_i$ が最小のときに $\left(\sum_{i=1}^n p_i + 1 \right)^2$ は最小値をとることは明らかである。対称正定行列 $\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0$ の固有値を $\rho_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ とするとき、次式が成立することが知られている¹²⁾。

$$\sum_{i=1}^n p_i \geq \sum_{j=1}^n \rho_j \quad (40)$$

ただし、等号は、

$$\mathbf{R}'(\mathbf{T}_0'\mathbf{W}\mathbf{T}_0)\mathbf{R} = \text{diag}(\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_n^2) \quad (41)$$

のときにのみ成立する。したがって、(37)式と(40)式を用いれば、

$$S' \geq \left(\sum_{i=1}^n \rho_i + 1 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right)^2 \quad (42)$$

が得られる。ここで、上式の等号が成立するのは、直交行列 $\mathbf{R}$ が(41)式を満たすときに限られる。ただし、

$T_0^*WT_0$ の固有値の平方根 ρ_i は、次式からわかるように、システムの2次モード θ_i であることを用いている。

$$\begin{aligned} T_0^{-1}KT_0^{-1} \cdot T_0^*WT_0 &= I \cdot T_0^*WT_0 \\ &= T_0^*WT_0 \end{aligned} \quad (43)$$

以上、統計的感度が最小となるための U と D , R に対する条件が求められた。(42)式の右辺は2次モード θ_i によって表わされている。2章において述べたように、2次モード θ_i は、実現構造には依存せず、伝達関数によって定められる固有の定数である。したがって、(42)式の右辺が統計的感度の最小値を与えている。

これまでの議論をまとめると、統計的感度の最小値 $S_{\min}$ は次式で与えられる。

$$S_{\min} = \left(\sum_{i=1}^n \theta_i + 1 \right)^2 \quad (44)$$

実現構造 (A, b, c, d) が与えられたとき、感度最小構造 $(T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ を実現する等価変換行列 T はつぎのように与えられる。

$$T = T_0 R D U \quad (45)$$

ここで、 K と W を (A, b, c, d) の可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンとすると、 T_0 と R, D, U はそれぞれつぎのような行列である。

$$T_0: T_0^*T_0 = K \text{ となる任意の正則行列} \quad (46)$$

$$R: R^*(T_0^*WT_0)R = \text{diag}(\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2) \quad (47)$$

となる直交行列

$$D = \text{diag}(\theta_1^{-1/2}, \theta_2^{-1/2}, \dots, \theta_n^{-1/2}) \quad (48)$$

$$U: \text{任意の直交行列} \quad (49)$$

4.2 感度最小構造の可制御性グラミアンと可観測性グラミアン

(45)式の等価変換行列 T を用いて得られる感度最小構造 $(T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ の可制御性グラミアン $\bar{K}$ と可観測性グラミアン $\bar{W}$ を求める。まず、可制御性グラミアン $\bar{K}$ はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \bar{K} &= T^{-1}KT^{-1} \\ &= U^{-1}D^{-1}R^{-1}T_0^{-1}KT_0^{-1}R^{-1}D^{-1}U^{-1} \\ &= U^{-1}D^{-1}R^{-1}RD^{-1}U \\ &= U^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \theta_2 & \\ 0 & & \theta_n \end{bmatrix} U \end{aligned} \quad (50)$$

同様に、可観測性グラミアン $\bar{W}$ はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \bar{W} &= T^*WT \\ &= U^*D^*R^*(T_0^*WT_0)RD^*U \\ &= U^*D^* \begin{bmatrix} \theta_1^2 & & 0 \\ & \theta_2^2 & \\ 0 & & \theta_n^2 \end{bmatrix} D^*U \end{aligned}$$

$$= U^* \begin{bmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \theta_2 & \\ 0 & & \theta_n \end{bmatrix} U \quad (51)$$

前述のように、 U は任意の直交行列であるから、 $U=I$ とおけば、

$$\bar{K} = \bar{W} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (52)$$

となる。したがって、 $U=I$ のときの感度最小構造は平衡形実現であることがわかる。(50)式と(51)式からわかるように、感度最小構造は、平衡形実現の座標軸を任意に回転して得られる構造(広義の平衡形実現, balanced realization in the wide sense¹³⁾)となっている。

5. 計算例

つぎの伝達関数 $H(z)$ を有する感度最小構造の実現例を示す。

$$H(z) = \frac{0.05079z^{-1} + 0.01576z^{-2} + 0.01382z^{-3}}{1 - 2.0040z^{-1} + 1.4469z^{-2} - 0.3617z^{-3}} + d \quad (53)$$

この伝達関数を有する可制御標準形実現の係数行列は

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.3617 & -1.4469 & 2.0040 \end{bmatrix}, \\ b &= \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c' = \begin{bmatrix} 0.01382 \\ 0.01576 \\ 0.05079 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

この実現構造の可制御性グラミアン K と可観測性グラミアン W はつぎのように得られる。

$$K = \begin{bmatrix} 27.6774 & 25.7541 & 20.8802 \\ 25.7541 & 27.6774 & 25.7541 \\ 20.8802 & 25.7541 & 27.6774 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.0218 & -0.0657 & 0.0570 \\ -0.0657 & 0.2034 & -0.1758 \\ 0.0570 & -0.1758 & 0.1653 \end{bmatrix} \quad (56)$$

この可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを用いれば、可制御標準形実現の統計的感度 S がつぎのように求められる。

$$S = 116.8463 \quad (57)$$

行列積 KW の固有値の平方根を計算すれば、2次モードがつぎのように求められる。

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0.7922, 0.3429, 0.0507) \quad (58)$$

よって、(53)式の伝達関数に対する統計的感度の最小値は、

$$S_{\min} = \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i + 1 \right)^2 = 4.7782 \quad (59)$$

となる。

つぎに、感度最小構造を得るための等価変換行列を

Table 1 Statistical sensitivity and eigenvalue sensitivity

Sensitivity Structure	Statistical sensitivity S	Eigenvalue sensitivity S_p
Controllability canonical form	116.8463	525.8435
Minimum sensitivity structure	4.7782	5.9925

Fig. 1 Frequency sensitivity

求めれば、次式が得られる。

$$T = \begin{bmatrix} 3.1389 & 6.8083 & -8.8546 \\ 4.4399 & 5.8660 & -2.2664 \\ 5.5283 & 3.1709 & 0.6014 \end{bmatrix} \quad (60)$$

ただし、ここでは $U=I$ としている。この等価変換行列を用いれば、感度最小構造がつぎのように得られる。

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0.8756 & -0.2929 & 0.0342 \\ 0.2929 & 0.6632 & 0.2564 \\ 0.0342 & -0.2564 & 0.4652 \end{bmatrix} \\ \bar{b} &= T^{-1}b = (0.3941 \quad -0.3476 \quad -0.1275) \\ \bar{c} &= cT = (0.3941 \quad 0.3476 \quad -0.1275) \end{aligned} \quad (61)$$

ただし、等価変換行列 T において $U=I$ としているので、この感度最小構造は平衡形実現である。この感度最小構造の可制御性グラミアン $\bar{K}$ と可観測性グラミアン $\bar{W}$ を求めれば、

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \bar{W} = T^{-1}KT^{-1} = T^TWT \\ &= \text{diag}(0.7922 \quad 0.3430 \quad 0.0507) \end{aligned} \quad (62)$$

となる。感度最小構造の統計的感度の最小値は、(59)式で与えられることは言うまでもない。

本論文では、新しい感度を提案している。最後に、本論文で提案している統計的感度の妥当性を示すため

に、従来の感度との比較を行う。比較のために用いた感度は、 (A, b, c, d) に対してつぎのように定義される固有値感度 $S_p^{(9)}$ と周波数感度 $S_f(\omega)^{(10)}$ である。

$$S_p = \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\left\{ \frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} \right\}^* \left\{ \frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} \right\} \right] \quad (63)$$

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= \text{tr} \left[\left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial A} \right\}^* \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial A} \right\} \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial b} \right\}^* \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial b} \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial c} \right\}^* \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial c} \right\} \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial d} \right\}^* \left\{ \frac{\partial H(e^{j\omega})}{\partial d} \right\} \right] \end{aligned} \quad (64)$$

ただし、 $\lambda_i(A)$ は行列 A の固有値を表わし、 $*$ は共役転置を表わす。可制御標準形実現と感度最小構造の統計的感度と固有値感度が **Table 1** に、周波数感度が **Fig. 1** に示されている。Table 1 と Fig. 1 から明らかのように、実現構造に対する統計的感度の傾向は、固有値感度と周波数感度の傾向と一致する。したがって、統計的感度が妥当であることがわかる。

6. あとがき

従来、平衡形実現の導出は、可制御性グラミアンと可観測性グラミアンの等価変換行列による対角化によって行われていた。本論文では、離散時間線形システムの統計的感度を提案し、この感度が最小である構造として平衡形実現が導出されることを明らかにした。統計的感度の最小化に基づいた平衡形実現の導出は、連続時間線形システムにおいても可能であることは言うまでもない。

平衡形実現の考え方は、1次元の時不変システムだけではなく、時変システムやあるクラスの2次元システムにおいても用いられている。これらのシステムにおいても、感度最小構造として平衡形実現が導出可能か否かは興味ある問題であり、今後の検討課題としたい。

参考文献

- 1) B. C. Moore: Singular Value Analysis of Linear Systems, Part I, II, System Control Report No. 7801, 7802, Univ. of Toront (1978)
- 2) B. C. Moore: Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26-1**, 17/32 (1981)
- 3) S. Shokoohi, L. M. Silverman, P. M. Van Dooren: Linear Time-Variable Systems: Balancing and Model Reduction, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-28-8**, 810/822 (1983)

- 4) E. I. Verriest and T. Kailath: On Generalized Balanced Realizations, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-28-8**, 833/843 (1983)
- 5) B. Lashgari, L. M. Silverman, and J.-F. Abramatic: Approximation of 2-D Separable in Denominator Filters, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **CAS-30-2**, 107/120 (1983)
- 6) L. Pernebo, and L. M. Silverman: Model Reduction via Balanced State-Space Representations, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-27-2**, 382/387 (1982)
- 7) 岩月, 川又, 樋口: 一般化 Balanced Realization の合成とその性質, 計測自動制御学会東北支部学術講演会, 103, 5/6 (1984)
- 8) C. T. Mullis and R. A. Roberts: Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **CAS-23-9**,
- 9) J. B. Cruz, Jr., Editor: System Sensitivity Analysis, Dowden, Hutchinson & Ross, Inc., (1973)
- 10) D. S. K. Chan: Theory and Implementation of Multidimensional Discrete Systems for Signal Processing, Ph. D. Dissertation, M. I. T. Cambridge (1978)
- 11) C. T. Mullis and R. A. Roberts: Roundoff Noise in Digital Filters: Frequency Transformations and Invariants, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, **ASSP-24-6**, 538/550 (1976)
- 12) S. Y. Hwang: Minimum Uncorrelated Unit Noise in State-Space Digital Filtering, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, **ASSP-25-4**, 273/281 (1977)
- 13) S. Shokoohi: Block-Balanced Realizations, IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems Proc., Montreal, 825/829 (1984)
- 14) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)

《付録》 等価変換行列の分解

T と T_0 を任意の $n \times n$ の正則行列とすれば, つぎの恒等式が成立する.

$$\begin{aligned} T &= T_0 T_0^{-1} T \\ &= T_0 T' \end{aligned} \quad (\text{A. 1})$$

ここで,

$$T' = T_0^{-1} T \quad (\text{A. 2})$$

は正則行列である. 実正則行列 T' は, 対称正定行列 P と直交行列 Q を用いて,

$$T' = PQ \quad (\text{A. 3})$$

と一意的に表現できる¹⁴⁾. 対称正定行列 P は, 直交行列 R と対角行列 D を用いて,

$$P = RDR' \quad (\text{A. 4})$$

と分解できる. したがって,

$$\begin{aligned} T &= T_0 T' \\ &= T_0 RDR' Q \\ &= T_0 RDU \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

と表わせる. ここで, $U = R'Q$ は直交行列である.