壁の影響を考慮した熱交換器の 動特性の根軌跡による検討[†]

曹 広 益*・嘉 納 秀 明**

Study on Dynamics of Heat Exchangers with Thick Wall by Root Loci

Guag-yi CAO and Hideaki KANOH

This paper studies the root loci of tubular, parallel-flow and counter-flow heat exchangers controlled by a proportional feedback and clarifies the effect of a wall to heat exchanger dynamics. One of features of heat exchangers with a thick wall is that its transfer function has an essential singular point on the negative real axis and in the vicinity of which infinite number of root loci appear.

In a tubular heat exchanger, the effect of a wall is represented in the neighbourhood of the essential singular point by the shape of the root loci which is divided into two types depending on the values of parameters. As the thickness of the wall increases, the root loci relating to the singular point become to cross the imaginary axis at low frequency and low gain, which causes a serious unstable problem. The model for which the distribution of the wall temperature in the radial direction is considered has infinite number of essential singular points on the negative real axis, while a model with uniform wall temperature has a unique one. As the thickness of the wall increases, the distance between the singular points becomes small and difference between the two models becomes large. The latter model estimates too large stable region.

In parallel-flow and counter-flow heat

exchangers, the effect of the wall appears as deformation of the root loci of the model with a thin wall rather than as issue of the root loci from the essential singular point: i.e. an appearance of a breakaway point for parallel-flow heat exchanger and a bend of root loci to the imaginary axis for the counter-flow heat exchanger which may cause instability. For thick wall, the model with uniform wall temperature estimates too large stable region and it is serious particularly for the counter-flow heat exchanger.

Key Words: root locus, heat exchanger, stability

1. はじめに

熱交換器の固体壁の材料は温度伝導率の値の大きいものも多いが、耐熱性、耐腐食性など要求される使用環境によってステンレス鋼、ガラスのように温度伝導率の値の小さいものも実際に使用されている。さらに例えば高圧力の条件のもとで強度面から考えて使用する熱交換器の壁の肉厚を厚くすることが多い。同時に用いられる材料の熱伝導率の値が小さい場合も多い。これらの諸点から考えて分布系の熱交換器の動特性の研究において、壁の熱伝導の影響を十分考慮することが必要である。

壁の影響を考慮した研究としては、高橋によって熱伝導率が半径方向には無限大、流れ方向には0とした場合、流れ方向には0であるが半径方向には一定の値をもつ場合について検討されている¹⁾。流量変化に対する制御系の動特性をあらわす伝達関数は藤堂によって並流、向流熱交換器について詳しく求められている²⁾。しかし、これらの研究は単に伝達関数を求めるか、それによって得られる周波数特性曲線の数値列を示すかであって、壁の影響の特性については述べられていない。

[†] 第26回自動制御連合講演会で発表(昭58・11)

* 上海交通大学電気工学および計算機科学学科
上海市華山路1954号, 中華人民共和国

** 大阪大学工学部 吹田市山田丘2-1

* Department of Electronic Engineering and Computer Science, Jiaotong University of Shanghai, 1954 Huasanslu, Shanghai, People's Republic of China

** Faculty of Engineering, Osaka University, Suita

(Received May 4, 1984)

(Revised May 27, 1985)

伝達関数や開ループの周波数特性曲線だけで無限次元の分布系の熱交換器を検討することは、場合によって不十分で、制御特性とより密着した根軌跡法によって閉ループとしても検討する必要がある。すなわち、根軌跡を調べると、本論文に示すように根軌跡の形状、特異点の配置などによっておのおのの熱交換器の特徴がはっきりすることがわかる。さらに、閉ループ制御系の安定性、振動周波数、振幅の減衰の状況などが最も直接的に示される。このように根軌跡法は分布系の熱交換器に対しても重要な研究方法のひとつである。

壁の影響が無視できる場合について、入口温度変化に対する熱交換器の動特性の詳しい性質は閉ループを構成したときの根軌跡の形によって調べることが出来ることが最近の研究で明らかにされている³⁾。しかし、壁の熱伝導の影響を考慮し、根軌跡の面から熱交換器に関する研究はまだされていない。

本論文では小さい熱伝導率の固体壁をもつ単管および並流、向流熱交換器において、壁の影響を考慮して、入口温度に対する熱交換器の動特性を根軌跡の観点から研究した。流れ方向の熱伝導の影響は非常に小さいと考えられるので、以下流れ方向の熱伝導率は0であるとし、とくに壁の影響について壁の半径方向の熱伝導率を無限大とした場合（この場合壁温は半径方向には一様になるので、以下半径方向の壁温を一様と考えた場合と呼ぶ）と、壁の半径方向の熱伝導率が有限の一定値をとる場合（この場合を壁の半径方向の温度分布を考慮した場合と呼ぶ）との二つの場合について検討した。

壁の半径方向の温度分布を考慮した場合や半径方向の壁温を一様と考えた場合には、壁の影響を無視した分布系の熱交換器の場合には表われてこない真性特異点が表われてくる。本論文では真性特異点の性質および熱伝導率の変化に対する真性特異点より生ずる根軌跡の形の変化、安定性に及ぼす影響などを、上記二つの場合、あるいは壁の影響を無視した場合について比較検討を行った。

Fig. 1 Tubular heat exchanger

2. 半径方向の壁温を一様として扱った単管熱交換器の動特性と真性特異点およびその根軌跡

Fig. 1 に示す円筒形の単管熱交換器において、壁の半径方向の熱伝導率を一定であるとしたときの系を記述する方程式は、

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = a_1(\theta_w - \theta) \\ \frac{\partial \theta_w}{\partial t} = b_1(\theta - \theta_w) + b_2(\theta_a - \theta_w) \\ \theta(t, x)|_{x=0} = \theta_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

である。ここに θ は流体温度、 θ_w は壁温度、 θ_a は周囲温度、 θ_i は入口温度であり、この系への操作量である、また、

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\alpha_1 A \tau}{C_p \rho_f S_f L} \\ b_1 = \frac{\alpha_1 P \tau}{C_{pw} \rho_w V_w} \\ b_2 = \frac{\alpha_2 A_{out} \tau}{C_{pw} \rho_w V_w} \end{cases} \quad (2)$$

A : 熱交換面積 [m^2]

C_p : 比熱 [$\text{J/kg} \cdot \text{K}$]

t : 時間/ τ [無次元]

V : 管容積 [m^3]

L : 管長 [m]

x : 距離/ L [無次元]

α : 熱伝達係数 [$\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$]

ρ : 密度 [kg/m^3]

S : 流路断面積 [m^2]

A_{out} : 管壁の外側表面積 [m^2]

u : 流速 [m/h]

τ : L/u [h]

添字: f は流体を、 w は壁をあらわす。

上式をラプラス変換することより入口温度変化 θ_i に対する出口温度の伝達関数は、

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\theta(s, 1)}{\theta_i(s)} = \exp(-(s + a_1 H_1(s)), \\ H_1(s) &= \frac{s + b_2}{s + b_1 + b_2} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

この伝達関数は壁の影響を無視した場合のものとは異り、真性特異点をもつ。そこで真性特異点について検討する。

真性特異点は数学上の定義では $f(s)$ の点 S_0 を中心とするローラン展開の負べき項の係数のうち0でないものが無限に多く存在する場合に点 S_0 を $f(s)$ の

真性特異点という。おおまかにいうと伝達関数のなかに極の性質と零点の性質とを同時にもつ点である。

(3)式によれば、 $s=-(b_1+b_2)$ が $G(s)$ の真性特異点である。前述のように極の性質から一群の根軌跡がこの点より出発し零点の性質から一群の根軌跡がこの点で終止することになる。

壁が無視できる場合の伝達関数は $H_1(s) \equiv 0$ の場合のもので等しい。そしてそれは純粋むだ時間の伝達関数となり、真性特異点をもたない。真性特異点を生ずるのは $H_1(s)$ の存在のためであり、これは壁の熱容量の存在のためであるといえる。

根軌跡を検討するために、単管熱交換器に対して比例制御による直接フィードバックを行うと、閉回路伝達関数は(4)式で与えられる。

$$G(s) = \frac{k \exp(-(s+a_1 H_1(s)))}{1 + k \exp(-(s+a_1 H_1(s)))} \quad (4)$$

ただし、 k はフィードバックの比例係数である。

根軌跡は k の値が0から ∞ に変化する時、閉ループの特性多項式、

$$F(s) = 1 + k \exp(-(s+a_1 H_1(s))) \quad (5)$$

が0に等しい時の s の解、すなわちつぎの式の解の軌道である。

$$s^2 + (A_1 - \log_e k - N\pi j)s + A_{12} - B_{12} \log_e k - B_{12} N\pi j = 0 \quad (6)$$

ただし、 $A_1 = a_1 + b_1 + b_2$ $A_{12} = a_1 \cdot b_2$

$B_{12} = b_1 + b_2$ $N = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

この方程式の解はつぎのようになる。

$$s_1 = -\frac{1}{2}(A_1 - \log_e k - N\pi j) + \frac{1}{2}\sqrt{(A_1 - \log_e k)^2 - N^2 \pi^2 - 4(A_{12} - \log_e k \cdot B_{12} - B_{12} N\pi j)} \quad (7)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2}(A_1 - \log_e k - N\pi j) - \frac{1}{2}\sqrt{(A_1 - \log_e k)^2 - N^2 \pi^2 - 4(A_{12} - \log_e k \cdot B_{12} - B_{12} N\pi j)} \quad (8)$$

この二つの根を k を変化させつつ複素数平面に描けば根軌跡がえられる。

この概念図を Fig. 2 に示す。

すなわち $N = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ のように N をかえると N の絶対値が大きくなるにつれてひとつの根軌跡は真性特異点をめぐるループになり、その大きさが次第に縮んでゆく、もう一つの根軌跡は実軸にほぼ平行する直線状のものとなり、その高さが次第にたかくなってゆく。

ループ状の根軌跡については N の増加につれて特異点のまわりに縮小するので系に対する影響が小さくなり、 $N=1, N=3$ までを検討すれば十分であると考えられる。

直線状の根軌跡についても、 N が増加するにつれ、虚軸と交わる点に対する k の値が次第に大きくなるのでやはり $N=1$ 、または $N=3$ の場合を検討すればよいと考えられる。

壁の影響を無視できる場合、すなわち $H_1(s) \equiv 0$ のときには根軌跡はむだ時間のそれになり、よく知られているように実軸に平行な直線群になる。これと Fig. 2 と比較すると実軸より遠く離れたところには壁の影響は出ず、実軸に近いところに壁の影響が出ているものといえる。

つぎにパラメータの変化に対する根軌跡を見るために三つのパラメータ組、

A. $a_1=8$ $b_1=0.48$ $b_2=0.14$

B. $a_1=8$ $b_1=0.50$ $b_2=0.12$

Fig. 2 Schematic drawing of the root loci of a tubular heat exchanger with uniform wall temperature in radial direction

Fig. 3 Root loci of a tubular heat exchanger with uniform wall temperature in radial direction

$$C. \quad a_1=8 \quad b_1=0.49 \quad b_2=0.13$$

に対する三種類の根軌跡を Fig. 3 に示す。根軌跡 A は Fig. 2 に示した形のものである。

図中の根軌跡 B では $N=1$ に対する軌道がループ状のものと直線状のものが互いに結合した形になっている。すなわち一つは左側から 1, 2, 3 のように動いて真性特異点に収束する。もう一つは真性特異点から出発して 3', 2', 1' を経て右側の無限遠点に出てゆく。したがってこの場合の根軌跡は $N=1$ に対して、直線状とループ状には分離せず左右二つの根軌跡に分離する。ただし $N=3$ 以上では根軌跡はループ状と直線状である。

ここで根軌跡が二種類の形状をもっていることがわかった。すなわち上下に分離するものと左右に分離するものからなる。従ってあるパラメータにおいて、この二つの形が入れ換わる筈である。これを示しているのは根軌跡 C である。

(7), (8) 式の根軌跡に対するパラメータの関係は

$$\begin{aligned} 4a_1b_1 &< (\pi N)^2 && \text{上下に分離} \\ 4a_1b_1 &= (\pi N)^2 && \text{臨 界} \\ 4a_1b_1 &> (\pi N)^2 && \text{左右に分離} \end{aligned} \quad (9)$$

この条件より N が大きくなれば根軌跡はすべて上下に分離するループ状のものになることがわかる。

3. 壁の半径方向の温度分布を考慮した 単管熱交換器の動特性と真性特異点 およびその根軌跡

Fig. 1 に示す単管熱交換器において壁の半径方向の温度分布を考慮した基礎方程式はつぎようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} &= a_1(\theta_w(t, x, 0) - \theta(t, x)) \\ \frac{\partial \theta_w(t, x, r)}{\partial t} &= a' \left(\frac{\partial^2 \theta_w(t, x, r)}{\partial r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon r} \frac{\partial \theta_w(t, x, r)}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

初期値条件及び境界条件はつぎの式である。

$$\begin{cases} \theta(0, x) = \theta_w(0, x, r) = 0 \\ \theta(t, 0) = \theta_i(t), \quad \theta(t, 1) = \theta_o(t) \\ \left. \frac{\partial \theta_w(t, x, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = \alpha'(\theta_w(t, x, 0) - \theta(t, x)) \\ \left. \frac{\partial \theta_w(t, x, r)}{\partial r} \right|_{r=1} = \beta'(\theta_o(t) - \theta_w(t, x, 1)) \end{cases} \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{cases} a' = \frac{\lambda \tau}{C_{pw} \rho_w R_1^2} = \frac{a}{\varepsilon^2}, & a = \frac{\lambda \tau}{C_{pw} \rho_w R^2} \\ \alpha' = \frac{\alpha_1}{\lambda} R_1 = \alpha \varepsilon, & \alpha = \frac{\alpha_1}{\lambda} R \\ \beta' = \frac{\alpha_2}{\lambda} R_1 = \beta \varepsilon, & \beta = \frac{\alpha_2}{\lambda} R \\ \varepsilon = R_1/R \end{cases} \quad (12)$$

ここに、 λ : 壁の熱伝導率 $[\text{W/m} \cdot \text{K}]$,

α_1, α_2 : 熱伝達係数 $[\text{W/m}^2 \cdot \text{K}]$

R : 管内径 $[\text{m}]$, R_1 : 管壁厚さ $[\text{m}]$

とし、壁の半径方向の動径を $R + R_1 r (0 \leq r \leq 1)$ と表わしている。

(10) 式第 2 式の右辺第 2 項は、壁が中空円筒であるために壁厚が管内径に比して薄い場合、 $(0 \leq \varepsilon \leq 0.5)$ 無視することが可能であり、以下の解析においては、(10) 式第 2 式、辺第 2 項を無視し壁を平板のように考えて解析している。この近似を行わない厳密な伝達関数の導出は文献 2) で行われている。

壁の平板近似を行った場合の入力 θ_i に対する出口温度 $\theta(s, 1)$ の伝達関数は(10), (11) 式のラプラス変換により、

$$G(s) = \exp(-(s + Q_1 H_2(s))) \quad (13)$$

である。ただし、

$$H_2(s) = \frac{\beta' \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha'}} + \sqrt{\frac{s}{\alpha'}} \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha'}}}{(\alpha' + \beta') \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha'}} + \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha'}} + \alpha' \beta' \sqrt{\frac{\alpha'}{s}} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha'}}} \quad (14)$$

前節で述べたように単管熱交換器において半径方向の壁温を一樣として扱った場合には、ただ一つの真性

Fig. 4 Schematic drawing of the root loci of a tubular heat exchanger with distributed wall temperature in the radial direction

特異点が出てくるのが特徴であるが、壁の半径方向の温度分布を考慮した場合は真性特異点はどのようなかを検討する。

伝達関数をもてみてもわかるように真性特異点は(14)式の分母が零になる s の値であり、

$$(\alpha' + \beta') \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \left(\sqrt{\frac{s}{a'}} + \alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}} = 0 \quad (15)$$

とあらわせる。

ここに $\sqrt{s/a'}$ を $(x + jy)$ と置いて、(15)式に代入して計算すれば x が 0 でなければならないことがわかる。すなわち $\sqrt{s/a'}$ は純虚数である。よって $\sqrt{s/a'} = jy$ とおくと(15)式は、

$$\frac{y(\alpha' + \beta')}{y^2 - \alpha' \beta'} - \tanh y = 0 \quad (16)$$

となる。

(16)式の第1項は y について単調な曲線であり、第2項の $\tanh y$ は周期関数であるので解は無限にある。

y を求めると真性特異点は $s = -a'y^2$ の式によって求められる。

$s = -a'y^2$ がつねに負であるから真性特異点は負実数しかない。なお $y=0$ も(16)式の解であるが $H_2(s)$ の除去可能な特異点なので真性特異点ではない。

以上のことから真性特異点は実軸の負の部分にのみ存在し、その数は可算無限個であることがわかった。

この単管熱交換器に比例フィードバックを行った場

Fig. 5 Root loci of a tubular heat exchanger with distributed wall temperature in the radial direction

合に生ずる根軌跡の様子を概念図的に Fig. 4 に示す。

Fig. 4 にみるように虚軸に近い部分では前節の Fig. 2 に示すものとはほぼ同じ根軌跡になっている。実軸のさらに左側にならぶ第2, 第3, ...の真性特異点に直線状の根軌跡が引きこまれることと各々の特異点のまわりにループ状の根軌跡が生ずることが壁の半径方向の温度分布を考慮した場合の根軌跡の特徴である。

つぎにパラメータの変化に対する根軌跡を見るために a' の値を変化させる。 a' の値は壁の肉厚あるいは材料の伝熱特性を表わすものであり、 a' の小さい時は壁が厚いか伝熱性が悪いことを意味している。したがって a' は熱交換器を制御する場合において、実用的に重要な意味をもつパラメータである。

Fig. 5 につぎの四つのパラメータに対する四種類の根軌跡を示す。

- A. $a_1=8$ $a'=0.5$ $\alpha'=0.3$ $\beta'=0.06$
- B. $a_1=8$ $a'=1.0$ $\alpha'=0.3$ $\beta'=0.06$
- C. $a_1=8$ $a'=2.0$ $\alpha'=0.3$ $\beta'=0.06$
- D. $a_1=8$ $a'=4.0$ $\alpha'=0.3$ $\beta'=0.06$

ただし図では一番外側の根軌跡のみを示す。無数にある小さいループ状のものは省略している。

a' が小さくなると、真性特異点は原点に近づく、また真性特異点の間の距離も小さくなる。原点に近い真性特異点から左右に分離形の根軌跡がつつぎにつぎになくなり、ループ状の根軌跡になる。

系に影響が一番つよい根軌跡は原点にもっとも近い真性特異点から出発する根軌跡であり、この根軌跡は a' が小さいほど小さい K の値でしかも低い周波数の点で虚軸と交わる。したがって a' が小さいほど制御性がわるくなることがわかる。

Fig. 6 Root loci of tubular heat exchangers with different thickness of the walls

Fig. 7 Comparison between the root loci of tubular heat exchangers with uniform wall temperature and distributed wall temperature in the radial direction

壁の厚さの影響をみるために(14)式を a, α, β を用いてかきなおすと,

$H_2(s) =$

$$\frac{\beta \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\varepsilon\right) + \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\varepsilon\right)}{(\alpha + \beta) \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\varepsilon\right) + \left(\sqrt{\frac{s}{a}} + \alpha\beta\sqrt{\frac{a}{s}}\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\varepsilon\right)} \quad (17)$$

となる.

$\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$ に対する根軌跡を,

Fig. 6 に示す.

ε が小さくなると, 壁が薄いことになり, 熱伝導の影響が小さくなる. 壁が薄くなると真性特異点が原点から遠くなり, 系に影響が大きい根軌跡すなわち原点が一番近い真性特異点から出発する根軌跡と虚軸との交わる点が高くなり, 安定性がよくなることがわかった.

最後に熱交換器の壁の半径方向の温度分布を考慮した場合と一様と考えた場合とを比較する.

(2)式と(12)式より半径方向温度分布も一様と考えた場合のパラメータと温度分布を考慮した場合のパラメータの関係をもとめるとつぎのようになる.

$$b_1 = \alpha a \frac{2}{\varepsilon(\varepsilon+2)}, \quad b_2 = \beta a \frac{2(\varepsilon+1)}{\varepsilon(\varepsilon+2)} \quad (18)$$

Fig. 7 に壁の厚さを変化させた $\varepsilon = 0.1 \sim 0.3$ の場

合, 半径方向温度分布を考慮した場合の根軌跡と一様として扱った場合の根軌跡を示す.

壁の厚さが比較的薄い $\varepsilon = 0.1$ の場合は二つの場合の間の差はすくないが, $\varepsilon = 0.2, 0.3$ と厚さが増すにつれて差が増加し, とくに安定性に関して虚軸を切る位置と k の値がずれてくる. $\varepsilon = 0.3$ では両者の相違は著しく増加している. したがってこの図は壁の半径方向の温度分布を一様として考えるか, 分布するとして考えるかの選択の範囲を示している

4. 並流, 向流熱交換器の根軌跡および壁の半径方向の温度分布を考慮した場合と一様として扱った場合の特性の比較

Fig. 8 に示すように熱伝導を熱交換壁においてだけ考慮し外壁は断熱壁である場合を考える.

基礎方程式は,

$$\left(R \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \pm \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = a_1 (\theta_w(t, x, 1) - \theta_1(t, x)) \right)$$

Fig. 8 Parallel-flow and counter-flow heat exchangers

Fig. 9 Comparison between the root loci of parallel-flow heat exchangers with uniform wall temperature and distributed wall temperature in radial direction

Fig. 10 Comparison between the root loci of counter-flow heat exchangers with uniform wall temperature and distributed wall temperature in radial direction

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = a_2(\theta_w(t, x, 0) - \theta_2(t, x)) \\ \frac{\partial \theta_w}{\partial t} = a' \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial r^2} \end{cases} \quad (19)$$

ただし、+：並流，-：向流， R ：流速比であり，初期値条件と境界条件は，

$$\begin{cases} \theta_1(0, x) = \theta_2(0, x) = \theta_w(0, x, r) = 0 \\ \theta_2(t, 0) = \theta_1(t) \\ \theta_1(t, 1) = \theta_0(t) \text{ あるいは } \theta_1(t, 0) = \theta_0(t) \\ \left. \frac{\partial \theta_w(t, x, r)}{\partial r} \right|_{r=0} = \alpha'(\theta_w(t, x, 0) - \theta_2(t, x)) \\ \left. \frac{\partial \theta_w(t, x, r)}{\partial r} \right|_{r=1} = \beta'(\theta_w(t, x, 1) - \theta_1(t, x)) \end{cases} \quad (20)$$

である。

上式をラプラス変換することにより，入口温度に対する出口温度の伝達関数は，

並流の場合，

$$G(s) = \frac{a_1 H_2(s)}{p_1 - p_2} (\exp(p_1) - \exp(p_2)) \quad (21)$$

である。

ただし， p_1 ， p_2 は，

$$(p + rs - a_1(1 + H_4(s)))(p + s + a_2(1 - H_1(s))) - a_1 a_2 H_2(s) H_3(s) = 0 \quad (22)$$

の解である。

向流の場合，

$$G(s) = \frac{a_1 H_3(s) (\exp(p_1) * - \exp(p_2))}{(p_1 + s + a_2(1 - H_1(s))) \exp(p_1) - (p_2 + s + a_2(1 - H_1(s))) \exp(p_2)} \quad (23)$$

であり， p_1 ， p_2 は，

$$(p - rs - a_1(1 - H_4(s)))(p + s + a_2(1 - H_1(s))) + a_1 a_2 H_2(s) H_3(s) = 0 \quad (24)$$

の解である。

以上の $H_1(s)$ ， $H_2(s)$ ， $H_3(s)$ ， $H_4(s)$ はつぎの式で表わされる。

$$H_1(s) = \frac{\alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \alpha' \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}}}{(\alpha' + \beta') \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \left(\alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} + \sqrt{\frac{s}{a'}} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}}$$

$$H_2(s) = \frac{\beta'}{(\alpha' + \beta') \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \left(\alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} + \sqrt{\frac{s}{a'}} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}}$$

$$H_3(s) = \frac{\alpha'}{(\alpha' + \beta') \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \left(\alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} + \sqrt{\frac{s}{a'}} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}}$$

$$H_4(s) = \frac{\alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \beta' \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}}}{(\alpha' + \beta') \cosh \sqrt{\frac{s}{a'}} + \left(\alpha' \beta' \sqrt{\frac{a'}{s}} + \sqrt{\frac{s}{a'}} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{a'}}$$

単管と比較して真性特異点まわりのループ状の根軌跡は非常に小さく，しばしば計算が困難なほどである。したがって並流や向流熱交換器ではループ状の根軌跡は制御性にあまり関与しないものと考えられる。

Fig. 9，**Fig. 10** に壁の半径方向の温度分布を考慮した場合と一様として扱った場合との並流，向流熱交換器の根軌跡図を示す。

壁の影響を無視した場合の並流，向流熱交換器についての根軌跡の研究は文献3)で明らかにされている。それによれば並流の場合ではすべての根軌跡は $-\infty$ から出発し，実軸とほぼ平行に右に動き，一本おきに虚軸の近いところほぼ虚軸との平行な直線上に並ぶ零点にとまるが，他の根軌跡は $+\infty$ へゆく。また実軸上に根軌跡はない。

向流の場合では根軌跡は左半平面に並ぶ極から出発し，ほぼ実軸に平行に右へうごき虚軸に平行な直線にある零点に止まる。零点は常に左半平面にあるので根軌跡は右半平面にでない。また実軸上に根軌跡が存在し，一つの分岐点から零点に軌跡がのびる。

壁の影響がある場合，並流では実軸上に根軌跡が現われる，さらに分岐点が生じ，そこから出た軌道は $+\infty$ にゆく。また $-\infty$ から $+\infty$ へゆく軌道が増加する。向流では根軌跡は右の方に曲げられるようになり，いったん右半平面に出て，そのあと左半平面の零点にもどるようになるので，安定性が悪くなる。

つきは壁の半径方向の温度分布を一樣とした場合と温度分布を考慮した場合の根軌跡について比較する。

並流の場合では系に影響が一番つよい原点付近の根軌跡の差はあまり大きくないが，詳しく比較すると虚軸との交点のゲインと周波数が変わり，半径方向の温度分布を考慮した場合は交点におけるゲインも周波数も減少することが分った。

向流の場合では二つの場合の根軌跡の差が非常に大きい。特に原点付近の真性特異点から出発する根軌跡は半径方向の壁温が一樣とした場合では右半平面に出ないが，温度分布を考慮した場合は右半平面に出て不安定になる。また実軸に一番近い一本の根軌跡が零点に止まらず右半平面の $+\infty$ にゆく。ゆえに壁が厚いときは半径方向の壁温を一樣とするモデルで系の安定性を考えると危険なことがある。

5. 結 論

熱交換器の動特性に対する壁の影響を根軌跡の観点から検討してつぎのような結論を得た。

壁の影響を考慮した場合，伝達関数が負の実軸上に真性特異点を持つことが壁の影響を無視した場合と異なる点の一つである。単管熱交換器においては，真性特異点に関する実軸に近い根軌跡の形状が特に壁の影響の特徴をよく表す。すなわち，その根軌跡の形状はループ状をなすものと，左右に分離するものの二種

類がある。それは壁の厚さなどのパラメータによってきまる。壁が厚くなるとループ状のものになり，虚軸と交わるので低い周波数，低いゲインで発振を生ずる。実軸から離れた部分では根軌跡は純粹むだ時間の根軌跡と同じ形のものとなる。半径方向の壁温が一樣であると考えた場合には，唯一であった真性特異点，分布を考慮する場合は，負の実軸上に可算無限個並んで現われる。壁の厚さが薄いときはこの真性特異点間の距離は大きく，ほとんど壁温を一樣と考えた場合と変わらないが，壁の厚さが増すにつれて特異点間の間隔も小さくなり，根軌跡の形状が大きく相違してくる。根軌跡が虚軸との交点における周波数とゲインの値が壁温を一樣とした場合と違ってくるため，管内径と壁厚との比が0.2以上では壁温の半径方向の分布を考慮しないと安定限界をあやまって見積るおそれがある。

壁の熱伝導の影響を考えた並流および向流熱交換器の伝達関数も真性特異点をもつが，それに関係する根軌跡は非常に小さく制御性にはあまり関与しないものと考えられる。むしろ壁の影響は根軌跡が壁の影響を考えないときに比べて変形するという形で現われてくる。すなわち，並流熱交換器の根軌跡が向流熱交換器の根軌跡に近ずき，実軸上に根軌跡と分岐点が現われる。この分岐点から右方の無限大に向かう根軌跡が虚軸と交わり安定性を支配する。また壁の影響のない場合には常に安定な向流熱交換器でも壁の影響のため，根軌跡が右に曲げられ，虚軸と交わった後右半平面内にある零点にもどるため，大きなゲインに対しては閉ループ系は常に不安定になる。並流，向流いずれの熱交換器でも壁が厚くなると，半径方向の壁温を一樣としたモデルでは分布を考慮したモデルに比べて安定限界を大きく見積るので（とくに向流は）危険である。

謝辞

本論文につきご助言を賜った大阪大学工学部増淵正美教授に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 高橋安人：熱交換の自動制御，日本機械学会誌，54-393，426/432 (1951)
- 2) 藤堂勇雄：並流および向流交換器の流量変化に対する動特性，計測自動制御学会論文集，11-5，600/606 (1975)
- 3) H. Kanoh: Classification of Heat Exchanger Dynamics by Root loci, IFAC 3rd Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, XVII. 427/433 (1982)