分布定数系のモデル規範形適応制御に関する考察[†]

小林 敏 弘*

Some Remarks on Model Reference Adaptive Control for
Distributed Parameter Systems

Toshihiro KOBAYASHI*

1. ま え が き

線形集中定数系の適応制御に関しては種々議論がなされており、特にモデル規範形適応制御系(MRACS)に関しては、その体系がほぼ確立されつつあるといえる¹⁾。しかし、分布定数系の適応制御に関しては、二、三の研究^{2),3)}はあるものの、まだ十分な成果はあがっていない。ここでは、入出力分布関数が未知なる分布定数系に対するMRACSについて考察するとともに、分布定数系固有の問題点を指摘する。

2. 系の記述と極配置

可分なヒルベルト空間 H 上のつぎの系を考える。

$$\left. \begin{aligned} du/dt &= Au(t) + bf(t), \quad u(0) = u_0 \in H \\ y(t) &= \langle c, u(t) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $b \in H$, $c \in H$. A はコンパクトなレゾルベントをもつ上に有界な H 上の自己共役作用素で、相異なる固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ をもつとする。このとき固有ベクトル $\{\xi_i\}$ は H での正規直交系を成す。また $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は H での内積を表わす。

今、作用素 A の固有値 $\{\lambda_i\}$ が、つぎの条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2} < \infty \quad (3)$$

を満足すれば、任意の $g \in H$ に対して、 $A - g\langle c, \cdot \rangle$ は離散スペクトルをもつ H 上のスペクトル作用素^{4),5)} となるが、もはや自己共役作用素ではない。Sun⁶⁾ の結果を、系(1)の双対系に適用することにより、極配

置に関する次の補題を得る。

[補題] 条件(3)のもとで、複素数列 $\Sigma = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ に対し、極配置 $\sigma(A - g\langle c, \cdot \rangle) = \Sigma$ ($\sigma(\cdot)$ はスペクトル集合を表わす) が可能であるための必要十分条件は、

$$(\text{可観測条件}) \quad c_i = \langle c, \xi_i \rangle \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_i - \beta_i}{c_i} \right|^2 < \infty \quad (5)$$

である。

(注意1) (5)より無限個の不安定固有値をもつ系は、安定化できない。また $\{\lambda_i\}$ が既知でないと、極配置が可能かどうか判定できない。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_N = \{\beta_1, \dots, \beta_N, \lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots\} \text{ で} \\ c_i &\neq 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のときには、 $\langle g, \xi_i \rangle = 0, i \geq N+1$ なる $g \in H$ が存在する。

3. 入出力表現

集中定数系に対しては、種々の有用な標準系が与えられているが、分布定数系に対しては、対応するものがない。ここでは、系(1)に対し、状態変数フィルタを用いた入出力表現を与える。

まず系(1)が可観測であるとして、(1)を

$$\left. \begin{aligned} du/dt &= (A - \langle c, \cdot \rangle g)u(t) + bf(t) + gy(t) \\ &= A_g u(t) + bf(t) + gy(t) \\ y(t) &= \langle c, u(t) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

と書き換える。このとき注意2より、 A_g の固有値 $\{\beta_i\}$ が相異なるように g を選べる。

A_g の正規固有ベクトルを $\{\varphi_i\}$ 、その双直交系を $\{\psi_i\}$ とする。 A_g はスペクトル作用素であるから、 $A = TA_g T^{-1}$ が正規直交固有ベクトル $\{e_i\} = \{T\varphi_i\}$ をもつような、逆も有界となる作用素 T が存在する⁵⁾。このとき $\{\psi_i\} = \{(T^{-1})^* e_i\}$ ($*$ は随伴作用素を表わす) である。

[†] 第3回計測自動制御学会九州支部学術講演会で発表 (昭 59・11)

* 九州工業大学 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu
(Received March 1, 1985)

Key Words: distributed parameter system, model reference adaptive control, input-output representation, spectral operator

結局(1)と等価な系として

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{u}/dt &= A\tilde{u}(t) + Tb f(t) + Tg y(t), \quad \tilde{u}(0) = Tu_0 \\ y(t) &= \langle (T^{-1})^* c, \tilde{u}(t) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を得る。これより次の入出力表現を得る。

《定理1》 条件(3)が成立し、かつ A_0 が相異なる固有値をもつとする。そのときつぎの条件

$$(i) \quad h \in H, q \in H \text{ が } \langle h, e_i \rangle \neq 0, \langle q, e_i \rangle \neq 0, i = 1, 2, \dots \text{ を満たす,}$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle c, \varphi_i \rangle \langle b, \psi_i \rangle}{\langle h, e_i \rangle} e_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle c, \varphi_i \rangle \langle g, \psi_i \rangle}{\langle q, e_i \rangle} e_i \text{ が}$$

H に属する。

が成立するならば、系(1)に対し、つぎの入出力表現

$$dy/dt + \alpha y(t) = \langle \theta_1, A v(t) \rangle + \langle \theta_2, A w(t) \rangle + \theta_3 f(t) + \theta_4 y(t) + \langle c, T^{-1} A e^{At} T u_0 \rangle \quad (9)$$

$$dv/dt = A v(t) + h f(t), \quad v(0) = 0 \quad (10)$$

$$dw/dt = A w(t) + q y(t), \quad w(0) = 0 \quad (11)$$

を満たす $\theta_1 \in H, \theta_2 \in H, \theta_3, \theta_4$ が存在する。

(証明) (8)より

$$\begin{aligned} dy/dt + \alpha y(t) &= \langle (T^{-1})^* c, A \tilde{u}(t) + \langle (T^{-1})^* c, T b f(t) \rangle \\ &\quad + \langle (T^{-1})^* c, T g y(t) \rangle + \alpha y(t) \rangle \\ &= \langle (T^{-1})^* c, A \tilde{u}(t) \rangle + \langle c, b \rangle f(t) \\ &\quad + \langle c, g \rangle y(t) + \alpha y(t) \end{aligned}$$

を得る。これをラプラス変換して

$$\begin{aligned} sY(s) - y_0 + \alpha Y(s) &= \langle (T^{-1})^* c, \\ &\quad A(sI - A)^{-1} [T b F(s) + T g Y(s) + T u_0] \\ &\quad + \langle c, b \rangle F(s) + \langle c, g \rangle Y(s) + \alpha Y(s) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \langle \theta_1, A(sI - A)^{-1} h \rangle &= \langle (T^{-1})^* c, A(sI - A)^{-1} T b \rangle \\ \langle \theta_2, A(sI - A)^{-1} q \rangle &= \langle (T^{-1})^* c, A(sI - A)^{-1} T g \rangle \\ \theta_3 &= \langle c, b \rangle \\ \theta_4 &= \langle c, g \rangle \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

これより

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i \langle \theta_1, e_i \rangle \langle h, e_i \rangle}{s - \beta_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i \langle (T^{-1})^* c, e_i \rangle \langle T b, e_i \rangle}{s - \beta_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i \langle c, \varphi_i \rangle \langle b, \psi_i \rangle}{s - \beta_i} \end{aligned}$$

を得るが、条件(i)より

$$\langle \theta_1, e_i \rangle = \frac{\langle c, \varphi_i \rangle \langle b, \psi_i \rangle}{\langle h, e_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

と取れ、条件(ii)より $\theta_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \theta_1, e_i \rangle e_i$ は H に属

する。 θ_2 も同様に H に属し、 $\langle \theta_2, e_i \rangle = \frac{\langle c, \varphi_i \rangle \langle g, \psi_i \rangle}{\langle q, e_i \rangle}$ と取れる。

つぎに、 $V(s), W(s)$ を

$$V(s) = (sI - A)^{-1} h F(s), \quad W(s) = (sI - A)^{-1} q Y(s)$$

と定義する。これを(12)に代入し、逆ラプラス変換して、(9), (10), (11)を得る。

(注意3) 宮里ら²⁾は、

$$dy/dt + \alpha y(t) = \langle \theta_1, v(t) \rangle + \langle \theta_2, w(t) \rangle + \theta_3 f(t) + \theta_4 y(t)$$

なる形の漸近の入出力表現を与えている。このとき

$$\langle \theta_1, e_i \rangle = \frac{\beta_i \langle c, \varphi_i \rangle \langle b, \psi_i \rangle}{\langle h, e_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots$$

となり、 θ_1 が H に属する可能性は小さくなる。

4. MRACS の設計

本章では、系(1)に対し、 A の固有値 $\{\lambda_i\}$ が既知の場合に、入出力表現(9), (10), (11)を用いて MRACS を設計する。もし A の固有値が未知ならば、注意1より、 A_0 の固有値が条件(5)を満足するかどうか判定できない。この点が分布定数系の MRACS の設計における最大の制約である。さらに、適応制御系が安定となるには、作用素 A が安定となることが必要である。しかし、無限個の不安定固有値をもつ系は、安定化できないから、以下ではつぎの仮定をおく。

〔仮定I〕 A の固有値 $\{\lambda_i\}$ は既知で、そのうち p 個しか不安定なものはない。

(注意4) A_0 を安定にする g の存在だけなら、不安定固有値の数 p だけ既知であればよい。フィルタ(10), (11)を設計するためには、 A の固有値が既知でなければならない。

本章での目的は、『仮定Iのもとで、入出力 f, y の情報のみを用いて、出力 y がヒルベルト空間 H_M (有限次元でもよい) 上の安定な規範モデル

$$\left. \begin{aligned} dz/dt &= A_M z(t) + b_M r(t), \quad z(0) = z_0 \in H_M \\ y_M(t) &= \langle c_M, z(t) \rangle_{H_M} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

の出力 y_M に一致するように、入力 f を構成すること』である。

今、複素数列 $\Sigma_N = \{\beta_1, \dots, \beta_N, \lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots\}$ ($\operatorname{Re} \beta_i < 0, N \geq p$) に対し、 A_0 の固有値の集合を Σ_N に設定しよう。このとき、注意2より $\langle g, \xi_i \rangle = 0, i \geq N+1$ であり、さらに $\varphi_i = \psi_i = e_i = \xi_i, i \geq N+1$ であるから、 $\langle g, \psi_i \rangle = 0, i \geq N+1$ となる。これより

$$\langle \theta_2, e_i \rangle = 0, \quad i \geq N+1 \quad (15)$$

が成立する。それ故、フィルタ(11)は N 次系で構成できる。しかし、フィルタ(10)は依然として無限次元系であるから、結果として有限次元の MRACS を構成できない。この点も分布定数系における問題点である。

(注意5) 特別な場合として、 b か c に $(N+1)$ 次

以上のスピルオーバーがないとき, すなわち,

$$\langle c, \xi_i \rangle \langle b, \xi_i \rangle = \langle c, \varphi_i \rangle \langle b, \psi_i \rangle = 0, \quad i \geq N+1$$

のときには, $\langle \theta_1, e_i \rangle = 0, i \geq N+1$ も成立する. よってフィルタ (10) も N 次系で構成でき, 結果として N 次元の MRACS が構成できる.

つぎに, MRACS を設計しよう. $\varepsilon = y_M - y$ とすると, (9) 式より誤差方程式として

$$\begin{aligned} d\varepsilon/dt + \alpha\varepsilon(t) &= dy_M/dt + \alpha y_M(t) - \langle \theta_1, \Lambda v(t) \rangle \\ &\quad - \langle \theta_2, \Lambda w(t) \rangle - \theta_3 f(t) \\ &\quad - \theta_4 y(t) - \eta(t) \end{aligned} \quad (16)$$

を得る. ここに $\eta(t) = \langle c, T^{-1} \Lambda e^{\Lambda^*} T u_0 \rangle$.

入力 f をつぎの制御則で構成しよう.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{dy_M/dt + \alpha y_M(t) - \langle K_1(t), \Lambda v(t) \rangle}{K_3(t)} * \\ &\quad * \frac{-\langle K_2(t), \Lambda w(t) \rangle - K_4(t)y(t)}{K_3(t)} \end{aligned} \quad (17)$$

この制御則を用いれば, (16) は空間 $X = H \times H \times E \times E$ 上で

$$d\varepsilon/dt + \alpha\varepsilon(t) = \langle \Gamma(t), \delta(t) \rangle_X - \eta(t) \quad (18)$$

と表わせる. ただし $\Gamma(t) = (K_1(t) - \theta_1, K_2(t) - \theta_2, K_3(t) - \theta_3, K_4(t) - \theta_4)$, $\delta(t) = (\Lambda v(t), \Lambda w(t), f(t), y(t))$ で, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ は X 上の内積である.

さらに適応則として

$$d\Gamma(t)/dt = -\rho\delta(t)\varepsilon(t), \quad \rho > 0 \quad (19)$$

を採用すれば, つぎの定理を得る.

《定理 2》 仮定 I, 条件 (5) および定理 1 の条件 (i), (ii) が成立するものとする. さらに, $r(t), f(t), y(t)$ が有界であるとする. このとき Λ の固有値をすべて安定に, また $\alpha < 0$ に取り, 制御則 (17) および適応則 (19) を用いれば, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_M(t)$ が成立する.

(証明) Λ が安定であることより, $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$ である. よって系

$$d\varepsilon/dt + \alpha\varepsilon(t) = \langle \Gamma(t), \delta(t) \rangle_X \quad (20)$$

が一樣漸近安定な原点をもつことを示せばよい⁷⁾.

X 上のリアプノフ関数として

$$V(t) = \rho\varepsilon^2(t) + \|\Gamma(t)\|_X^2$$

を取れば, (19), (20) より $\dot{V}(t) = -2\alpha\rho\varepsilon^2(t) \leq 0$ を得る.

さて具体的な MRACS の構成に際しては, 作用素 T や固有ベクトル $\{e_i\}$ を知る必要はない. 実際, 空間 l_2 上で以下のように構成できる.

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots),$$

$$w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t)),$$

$$K_1(t) = (K_{11}(t), K_{12}(t), \dots),$$

$$K_2(t) = (K_{21}(t), \dots, K_{2N}(t)).$$

制御則 (17) は

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\frac{d}{dt}y_M(t) + \alpha y_M(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i K_{1i}(t)v_i(t)}{K_3(t)} * \\ &\quad * \frac{-\sum_{j=1}^N \beta_j K_{2j}(t)w_j(t) - K_4(t)y(t)}{K_3(t)}, \end{aligned}$$

適応則 (19) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}K_{1i}(t) &= -\rho\beta_i v_i(t)\varepsilon(t), \quad i=1, 2, \dots, \\ \frac{d}{dt}K_{2j}(t) &= -\rho\beta_j w_j(t)\varepsilon(t), \quad j=1, \dots, N, \\ \frac{d}{dt}K_3(t) &= -\rho f(t)\varepsilon(t), \\ \frac{d}{dt}K_4(t) &= -\rho y(t)\varepsilon(t). \end{aligned} \right\}$$

状態変数フィルタ (10), (11) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_i(t) &= \beta_i v_i(t) + h_i f(t), \quad v_i(0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, \\ \frac{d}{dt}w_j(t) &= \beta_j w_j(t) + q_j y(t), \quad w_j(0) = 0, \quad j=1, \dots, N. \end{aligned}$$

ただし, $\operatorname{Re}\beta_i < 0, i=1, 2, \dots$ で $\beta_i = \lambda_i, i \geq N+1$ である.

5. あとがき

ここでは, 分布定数系の MRACS について考察し, 問題点として

- (i) A の固有値が既知でなければならないこと.
- (ii) A の不安定固有値が有限個であっても,

MRACS が無限次元になること

を指摘した. これらの制限を弱めることが今後の課題である. なお, ここで展開した議論は, 作用素 A をスペクトル作用素に一般化しても, 本質的には変わらない.

参考文献

- 1) 小特集: 適応制御, 計測と制御, 23-5, 415/502 (1984)
- 2) 宮里, 北森: 分布定数系の適応制御, 第2回適応制御シンポジウム資料, 53/56 (1982)
- 3) T. Kobayashi: A Digital Adaptive Control Law for a Parabolic Distributed Parameter System, Systems and Control Letters, 4-3, 175/179 (1984)
- 4) T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag (1966)
- 5) R.F. Curtain: Spectral Systems, International J. of Control, 39-4, 657/666 (1984)
- 6) S.H. Sun: On Spectrum Distribution of Completely Controllable Linear Systems, SIAM J. on Control, 19-6, 730/743 (1981)
- 7) J.P. Lasalle and R.J. Rath: Eventually Stability, Proc. of 2nd Congress. of IFAC, Basle, Part 1, 550/560 (1963)