システム同定における式誤差規範 (EEM) と 出力誤差規範 (OEM) の相違

富 田 豊*・A. A. H. DAMEN**・P. Van den Hof**

Difference between Equation Error Method (EEM) and Output Error
Method (OEM) in System Identification

Yutaka TOMITA*, A. A. H. DAMEN** and P. Van den Hof**

For the identification of linear system on the basis of both input and output data, equation error methods (EEM) (often indicated as prediction error methods) are frequently used rather than output error methods (OEM). This is mainly caused by the fact that the minimum of the EE-criterion can easily be found, in contrast to the OE-criterion which often displays multiple local minima.

Nevertheless we have the impression that for many applications (simulation, diagnosis, control) a proper fit of the impulse response with corresponds to an OEM is indispensable.

In fact for both methods the model set for the input-output behaviour of the system under study is the same, except for the point where the disturbances are supposed to enter. It is this similarity that often leads to an inconsiderate use of the identification results for various applications irrespective of the chosen identification criterion.

In many practical situations the real system under study will be of infinite order which implies that the systems will result in essentially different models based on either EEM or OEM identification. We will try to characterize this class of systems and give some examples.

Next we want to discuss the impact of this discrepancy on applications.

Key Words: identification, linear single input single output ARMA model, equation error method, output error method, system is not in a modelset

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

** Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands

(Received May 20, 1985)

(Revised August 19, 1985)

1. 緒 言

ある系の入出力信号の時系列 $\{u(k), y(k)\}$ を有限時間観測し、それをもとに系の入出力関係をあらわす動特性を線形モデルで記述する線形パラメトリック同定法 (パラメータ推定法) において、EEM (予測誤差法—PEM とも呼ばれる) は最も頻繁に使われている^{1)~3)}。これは主として、EEM 規範に基づくパラメータ推定法は比較的容易であるのに対し、例えば系のモデルの出力の差を最小 2 乗の意味で最小にする OEM 規範に基づくパラメータ推定法は複雑な非線形方程式を解かなければならないからである。

あらかじめ系の構造が分かっている場合にはモデルの構造を系の構造と等しくすれば、二つの同定法によるパラメータ推定値は漸近的に等しくなるので⁴⁾、演算の容易な EEM を用いればよい。しかし実際の系では多くの場合系の次数が非常に大きいので、我々は (例えば自己回帰移動平均—ARMA) モデルによって系の一部を近似しているにすぎない。このときには同じ構造のモデルを用いても二つの同定法による推定値は異なるので目的によって規範を使い分けなくてはならない⁵⁾。例えば、実時間の予測、制御等のためには EEM を用い、制御方法のシミュレーション、診断、補償回路の設計のためには OEM を用いるべきである。本稿では、系の同定手法を応用の立場から特に線形、離散、定常 (時間不変)、1 入力 1 出力 ARMA モデルについて、2 章で両同定法を概述し、3 章で両同定法の数値例を示し、4 章では両同定法の特徴と EEM 推定値をシミュレーションに用いるときの危険性および危険性を生じさせる系とそうでない系の違いについて述べる。

2. 二つのパラメータ推定法

この章では出力推定値を $\hat{y}(k)$ とするときに、それが次式によってあらわされるモデルのパラメータ推定法について述べる。

$$\hat{y}(k) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} u(k) \quad (1)$$

但し $u(k)$ および $\hat{y}(k)$ はそれぞれ k 時点におけるモデルの入出力値、 z^{-1} は単位推移演算子すなわち、 $z^{-1} u(k) = u(k-1)$ である。また以後簡単のため

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ B &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \end{aligned} \quad (2)$$

と表わすことにする。

OEM は次式で定義される出力誤差 J_0 を最小にするパラメータ推定法である。

$$J_0 = \sum_{k=1}^d \varepsilon_0^2(k) = \sum_{k=1}^d [y(k) - \hat{y}(k)]^2 \quad (3)$$

ここで N は標本数である。OEM は同じ信号を入力したときにシステムの出力とモデルの出力との差を最小 2 乗の意味で最も小さくする非常に考えやすいパラメータ推定法である。これをブロック線図で表わすと Fig. 1(a) のようになる。しかし (1), (3) 式から明らかなようにパラメータが分数形で表現されているので非線形関数となり、この解を求めるためには Steiglitz-McBride 法⁶⁾、傾斜法、クリーピング・ランダム・サーチ法 (CRS)^{7), 8)} 等繰り返し演算が必要な手法を必要とするのでパラメータ推定に時間がかかる。そこでこれを線形化するために、(3) 式に A を乗じた次式を得る¹⁾。

$$J_E = \sum_{k=1}^d \varepsilon_E^2(k) = [A y(k) - B u(k)]^2 \quad (4)$$

Fig. 1 Block diagram of (a) OEM and (b) EEM

EEM は予測誤差 J_E を最小にするパラメータ推定法である。 J_E の最小値を与える A および B は J_E を A および B に関して微分し 0 と等置した連立方程式の解である。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_E}{\partial A} &= 2 \sum y(k) [A y(k) - B u(k)] = 0 \\ \frac{\partial J_E}{\partial B} &= -2 \sum u(k) [A y(k) - B u(k)] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式は A および B に関して線形なので容易に解くことができる。これが EEM が最も頻繁に用いられる理由である。ブロック線図で表わせば Fig. 1(b) のようになる。

さて、系の構造が既知で (1) 式のモデルで記述できる (以下系がモデル集合に含まれるという。) ときには、二つのパラメータ推定法は漸近的に等しい推定値を与える。また精度は EEM の方がよく、OEM は局所的極小値が存在するので傾斜法や疑似線形化法では真の極小値に収束せずに局所的極小値に収束する可能性がある⁴⁾。したがってこの場合には EEM を用いるべきである。しかし系がモデル集合に含まれない場合には二つの同定法による推定値が異なる。このような場合の解析的な考察は困難なので次章では数値例を挙げて説明する。

3. 数値例

与えられた入出力データを系 $S = S(u, y, N)$, n 次 ARMA モデル集合を $M(n)$ とする。

OEM は最急降下法、Steiglitz-McBride 法および CRS 法を用いて行ったが、ここに挙げた結果は CRS 法を用いたものである。特に 3.3 の例では CRS 法以外は収束しなかった。また EEM では Mullis の方法⁹⁾ を用いた。以下にいうシミュレーションとは Fig. 1(a) によるもの、すなわち過去の入力のみによって出力を算出するものであり、予測とは Fig. 1(b) によるもの、すなわち過去の入力および出力によって 1 時点先の出力を算出するものである。

3.1 および 3.2 の例ではモデルの次数 $n=2$ とすればもちろん、完全に一致するが、これらの例は系がモデル集合に含まれないときの EEM および OEM 推定の差異を明らかにするために挙げた。3.1 の例では 3~4 時点の時間遅れを導入すれば EEM 推定もよいシミュレーション結果を与えるが、最適な時間遅れを与える規範はなく、またパラメータ推定の目的が補償回路の設計のような場合には時間遅れ素子を導入することは困難なので、OEM の方が適当な場合もある。

3.1 減衰正弦振動系のインパルス応答

$$S: u(0)=1$$

$$u(k)=0 \quad (k \neq 0)$$

$$y(k)=r^k \sin(fk)$$

$$r=0.9$$

$$f=\pi/100$$

$$N=240$$

$$M: n=1$$

系およびモデルによるシミュレーションと予測の結果を Fig. 2(a) に示す。EEM の推定値によるシミュレーション結果は系からほとんどおいが予測結果は非常によい。OEM 推定値によるシミュレーション結果は EEM によるそれに比べると系のインパルス応答に似ている。Fig. 2(b) に系、EEM 推定値および OEM 推定値の極零配置を示す。極は単位円に近い。以下の例でも同様であるが、EEM 推定値によるシミュレーションの最初の2点 ($=n+1$) は完全に一致している点に注目されたい。理由は4.2に述べる。

3.2 減衰余弦振動系のインパルス応答

$$S: u(0)=1$$

$$u(k)=0 \quad (k \neq 0)$$

$$y(k)=r^k \cos(fk)$$

(a)

(b)

Fig. 2 (a) impulse response of the damped sine, its simulations by EEM and OEM, and its prediction
(b) pole zero plots of the original system, EEM model and OEM model

$$r=0.9$$

$$f=\pi/100$$

$$N=240$$

$$M: n=1$$

系およびモデルによるシミュレーションと予測の結果を Fig. 3(a) に示す。EEM 推定値および OEM 推定値を用いたシミュレーション結果とも系にほぼ一致している。極零配置を Fig. 3(b) に示す。3.1 と異なる点は極の位置は同じであるが極の間に零が存在することである。したがって一つの極は零とほぼ相殺しているので一次系でよく近似ができると考えられる。

3.3 網膜のインパルス応答¹⁰⁾

$$S: u(0)=1$$

$$u(k)=0 \quad (k \neq 0)$$

$$y(k) \text{ Fig. 3(a) に示す。}$$

$$N=89$$

$$M: n=5$$

系とモデルによるシミュレーションと予測の結果を Fig. 4(a) に示す。二つの同定法による推定値の極零配置を Fig. 4(b) に示す。極はやはり単位円近くに位置している。なお本例の行列式比試験の結果は2次であった。

3.4 軟骨の粘弾性特性¹¹⁾

関節軟骨に Fig. 5(a) に示すような変位を与えたときの荷重の変化を Fig. 5(b) に実線で示す。

$$S: u(k) \text{ Fig. 5(a)}$$

$$y(k) \text{ Fig. 5(b)}$$

$$N=12$$

$$M: n=1$$

系とモデルによるシミュレーションと予測の結果を Fig. 5(c) に示す。どちらのシミュレーション結果もあまりよくない。これは非線形系を線形モデルで近似したためと思われる二つの同定法による極の推定値は0.863で単位円に近くはない。したがって OEM および EEM 推定値によるモデルのシミュレーション結果も大差ない。

4. 考 察

4.1 OEM と EEM による推定の特徴

EEM は予測誤差を最小にする推定法であり、前記四つの例では非常に良いが、その推定値をシミュレーションに用いると必ずしも一致が良くないことが Fig. 2~5 からわかる。この現象を Ljung は周波数領域で説明している。すなわち、Fig. 1 に示す両同定法は Fig. 6 のようにも表わすことができる。この図から分か

(a)

(a)

(b)

Fig. 3 (a) impulse response of the damped cosine, its simulations by EEM and OEM, and its prediction
(b) pole zero plots of the original system, EEM model and OEM model

るように $\varepsilon_k(k)$ は高域フィルタ A に $\varepsilon_0(k)$ を入力して得られる。したがって EEM は OEM が全周波数領域について均一な重みで推定しているのに対して高域を強調する同定法である。つまり時間領域では現時点までの入出力信号から一時点先の出力を最もよく近似する手法である^{12), 13)}。

しかしすでに述べたように OEM は非線形方程式の解を求めるために長い計算時間を要し(注 1) 局所的極小値を与えるパラメータを推定する危険性があるので、できれば EEM による推定値をシミュレーションの目的にも流用したい。3.2 の例は十分流用できるが

(注 1) 計算時間の一般的な比較はむづかしいが著者らは PDP 11/60 を用いて 3.3 の例で EEM では数秒、OEM では 3 時間を要した。

(b)

Fig. 4 (a) impulse response of retina, its simulations by EEM and OEM, and its prediction
(b) Pole zero plots of the EEM and OEM models

3.1. 3.3 および 3.4 の例では流用できない。

そこでつぎにどのようなシステムが流用できどのようなシステムが流用できないのかを考察する。

4.2 EEM 推定値をシミュレーションの目的に用いると問題のあるシステム

数学的な検討は文献 14) にあるが、実用上の立場からこれを解釈すると次のように言える。

(a)

(b)

(c)

Fig. 5 (a) displacement input to articular cartilage (b) force output of the articular cartilage
(c) original output, simulations of EEM and OEM, and prediction

Fig. 6 The relationship between equation error and output error

4.2.1 インパルス応答の振幅が最初の $n+1$ 個は非常に小さくその後大きくなる

これはつぎのことから説明できる。(1)式を $k=0, \dots, N-1$ について行列の形で表わすと次の様になる。

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} & \cdots & u_{-n} & y_{-1} & y_{-2} & \cdots & y_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n-1} & \cdots & u_0 & y_n & y_{n-1} & \cdots & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n+1} & u_n & \cdots & u_1 & y_{n+1} & y_n & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n} & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \\ \vdots \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

入力インパルス、すなわち $u(0)=1$, $u(k)=0$ ($k \neq 0$) だから(6)式の中程に引いた破線より上の u は対角線のみが1で他が0、破線より下の u は全て0である。したがって破線より下の部分は $a_1, \dots, a_n$ のみの関係式となる。EEM では先ずこれを解き次にその解を(6)式の破線より上の関係式に代入して $b_0, \dots, b_n$ を解く。ところが破線より上の関係式の数は $n+1$ 個であり推定するパラメータも $n+1$ 個なので解は一意的に定まる。すなわち $y_0, \dots, y_n$ は $y_0, \dots, y_n$ と完全に一致する。換言すれば $b_0, \dots, b_n$ は観測したインパルス応答とモデルの最初の $n+1$ 個を完全に一致するように定められ、それ以降のインパルス応答の推定値は $a_1, \dots, a_n$ のみによって生成される。したがってインパルス応答の振幅が、最初の $n+1$ 個が非常に小さくその後大きくなると、 $b_0, \dots, b_n$ が既に小さく推定されているので、その後の振幅を $a_1, \dots, a_n$ では追従(大きく)できない。しかしそれでもできる限り振幅を追従させるように推定するので不安定に近いモデルとなる。

4.2.2 同定されたモデルの極が単位円に近い

極零配置の立場から 4.2.1 の最後に述べた現象を説

Fig. 7 Approximated OEM (Hankel and Balanced model)

明すると表記ようになる。ただしこれは系を正當に推定している可能性もあるので、十分条件ではない。極の位置が単位円に近いとシミュレーションにおいて丸め誤差の影響が大きく十分精度の高い計算を行わないと懸け離れた結果になる¹⁵⁾のでシミュレーション結果の不一致は往々にして数値計算上の誤差として見過されてきたが、原因は本質的な推定法の相違である。

4.3 OEM の近似法

4.2 に述べたようなシステムでは、よいシミュレーション結果を得るためには OEM を用いなければならないが OEM は計算上問題が多い。そこでインパルス応答が与えられている場合にはハンケル行列やバラン・モデルを用いて Ho-Kalman のアルゴリズムから近似解を得ることが提案されている^{16), 17)}。

著者らも上記の方法によるパラメータ推定を行った。その推定値を用いたシミュレーション結果を Fig. 7 に示す。よい近似であると考え。

5. 結 論

実際の系では多くの場合の次数が非常に大きく系がモデル集合に含まれない。このときに同じ構造のモデルを用いても OEM 推定値と EEM 推定値とは異なる。そこで OEM と EEM によるパラメータ推定法の特徴相違を整理し、どのような場合に EEM 推定法をシミュレーションに用いると問題があるかを明らかにした。

(1) EEM は過去の入出力値に基づき最小 2 乗の意味で 1 時点先の出力推定値を観測された出力の値に最も近づけるパラメータ推定法であり。OEM は過去の入力値に基づき観測範囲全域にわたって、出力推定値を観測された出力の値に最も近づけるパラメータ推定法である。

(2) モデルの次数を n としたときに EEM 推定値によるモデルのインパルス応答は系のインパルス応答

と最初の $n+1$ 個は完全に一致する。

(3) インパルス応答の振幅が最初の $n+1$ 個は非常に小さく、その後大きくなる系では EEM 推定値によるシミュレーション結果の観測値との一致は悪い。

(4) このことを極零配置の立場から言い換えると、推定されたモデルの極が単位円に近いときには EEM 推定によるシミュレーション結果の観測値との一致は悪い。

(5) 上記(4)と(5)の条件に合う系のシミュレーションのためのモデルを同定するには OEM を用いなければならないが、OEM 推定は計算上の問題が多い。そこで OEM の代用としてインパルス応答が与えられている場合にはハンケル行列やバランス・モデルを用いた Ho-Kalman アルゴリズムによる解がよい近似を与えることを示した。他の OEM を用いるときの一般的注意として次のことがある。OEM では最小位相系が推定される保証はないので、測定雑音が大きいときには一致推定量は得られない。また EEM は逐次計算によってパラメータを推定できるのでオンライン同定が可能だが、OEM は繰返し演算が必要なのでオンライン同定は不可能である。

参 考 文 献

- 1) P. Eykhoff: System Identification, John-Wiley, London (1974)
- 2) 中溝高好: 線形離散時間システムの同定手法, システムと制御, **25**, 476/489, 551/563, 609/622, 755/767 (1982)
- 3) 秋月影雄他: システム同定, 計測自動制御学会 (1982)
- 4) T. Soderstrom and P. Stoica, Some Properties of the Output Error Method, Automatica, **18**-1, 93/99 (1982)
- 5) M. Gevers and G. Bastin, "What Does System Identification Have to Offer?", 6th IFAC Symp. Identification and System Parameter Estimation, Tutorial Workshop on Syst. Identif., Washington, D. C., (1982)
- 6) K. Steiglitz and L. E. McBride: A Technique for the Identification of Linear System, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-10**-4, 461/464 (1965)
- 7) M. J. Box, et al.: Non-Linear Optimization Technique, Oliver & Bod, Edinburgh (1969)
- 8) D. G. Luenberger: Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley (1973)
- 9) C. T. Mullis and R. A. Roberts: The Use of Second-Order Information in the Approximation of Discrete-Time Linear Systems, IEEE, Trans. on Acoustic, Speech, and Signal Processing **ASSP-24**-3, 226/238 (1976)
- 10) J. A. J. Roufs, and F. J. J. Blommaert: Temporal impulse and Step Response of the Human Eye Obtained Psychophysically Means of a Driftcorrecting Perturbation Technique, Vision Research, **12**, 1203/1221 (1981)
- 11) 富田 豊: 関節軟骨の粘弾性特性, 計測自動制御学会論文集中, **16**-2, 228/232 (1980)
- 12) L. Ljung: Frequency Domain Properties of Identified Transfer Functions, IMA International Conference on Control Theory, Cambridge (1984)
- 13) B. Wahlberg and L. Ljung: Design Variables for Bias Distribution in Transfer Function Estimation, Linkoping Univ. (Sweden) Rep LiTH-ISY-0683 (1984)
- 14) A. A. H. Damen, et al.: Equation Error and Output Error on System Identification. IEEE Trans. on Automatic Control, Submitting
- 15) K. J. Astrom and B. Wittenmark: Computer Controlled Systems, Prentice Hall, Englewood Cliff, N. J. (1984)
- 16) A. A. H. Damen, et al.: Approximation Realization Based upon an Alternative to the Hankel Matrix: the Page Matrix, Systems and Control letters, **2**, 202/208 (1982)
- 17) C. O. Therapos.: On the Selection of the Reduced Order via Balanced State-Space Representations, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-29**-11, 1019/1021 (1984)