配水管網拡張時の最適設計法[†]

西 川 禎 一*・宇 土 顕 彦*

A Method of Optimal Design for Extension of Water Distribution Networks

Yoshikazu NISHIKAWA* and Akihiko Udo*

Recently, design problems of water distribution networks are getting larger and more complicated. To cope with difficulty of the problems, the authors have developed a method for designing newly-constructed networks, ones for irrigation which need to be more precisely and carefully designed than ones for city-water service. One of the prominent features of the method is that it enables us to consider explicitly the trade-off between enhancement of the distribution security (or reliability) and reduction of the construction cost. It has already been used for practical design of large networks, and has proved its excellent capability compared with conventional techniques.

Based upon the fundamental idea of the above method, the present paper develops a design method for enlargement of existing networks. This is motivated by the fact that, nowadays in Japan, most of the city-water service networks are constructed by enlarging the old ones. Mathematically the problem is formulated into a nonlinear programming type. By choosing proper decision variables, mesh flow volumes, in the formulation and by noticing a feature of the problem structure, we present an efficient solution procedure which has sound feasibility even for large-scale networks. As the method inherits the fundamental virtues of the method previously mentioned, the concept of trade-off between security and cost is kept well in the design procedure.

Key Words: water distribution network, design for extension of system, nonlinear optimization,

steady-state flow analysis, system security

1. はじめに

昨今、配水管網の設計問題はますます大規模かつ複雑化しているが、筆者らは先に管網の新設時における新しい設計手法を開発した。筆者らの手法は、上水道配水管網 (City-water distribution network: CWDN) に比べて、より高い設計精度を必要とするかんがい用配水管網 (Irrigation-water distribution network: IWDN) を特に対象として開発されたものである^{1), 2)}。そして、(1) 配水の信頼性 (すなわち供給の安定性) を表す一つの指標を導入し、配水機能の向上と経済性の追求という相反する目標の間の関係を、設計者が明確に把握することを可能にしている、(2) 単水源のみならず、複数水源を含む場合にもまったく同様に適用できる、(3) 求解法として基本的には線形計算を用いているので、節点数 1,000、管路数 1,500、ループ数 300 程度の大規模管網にも支障なく適用できる、等々の優れた特長を持っている。そして既に実用に供され、取扱い可能な管網の範囲を従来に比して内容的にも規模的にも格段に広げるとともに、品質と信頼度の高い設計結果を得ることを可能にした。

さて、上記の設計手法は CWDN にもそのまま適用することができ、精度の高い設計が可能になる。しかし、実際上は IWDN の設計のほとんどが新設管網を対象とするのに対し、日本をはじめとする先進諸国における CWDN の設計問題の大半は、既設の配水系の拡張を考えるものである。

本論文では、上記の新設設計法の基本的考え方を、拡張部分の設計に応用するための設計法、すなわち拡張設計法について述べる。問題は非線形計画問題となるが、適当な変数を選んで定式化し、その構造の特徴に着目した求解を行うことによって、大規模な管網についても十分実用的な速度で解を求めることができ

[†] 第 27 回自動制御連合講演会で発表 (昭 59・11)

* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町
Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto
(Received September 7, 1984)
(Revised August 14, 1985)

る。そして、新設設計法の信頼性と経済性に対する考え方はそのまま受け継がれるので、拡張設計についてもその理念を明確にできるという利点がある。

以下、2章では準備として基本関係式をまとめる。3章では拡張設計法の基本的な定式化とその解法について説明する。4章では、拡張設計に際しての、より実際的な問題について説明を加える。5章に計算例を示す。6章はまとめである。

2. 配水管網の数学モデル

ここでは配水管網の数学的取扱いについて述べるが、具体例として Fig. 1 の管網を用いる。

(1) グラフ表記

Fig. 1(a) の管網に対し、(b) のように一つの基準節点およびこの基準節点と各水頭既知節点を結ぶ枝（通常、水源を表すので水源枝と呼ぶ）を付加したグラフ $\mathcal{E}$ を考える。また全枝の水頭差（損失水頭）をベクトル $H=[h_i]$ 、全枝の流量をベクトル $Q=[q_i]$ 、需要量（節点流出量）のベクトルを $C=[c_i]$ で表わす。

(2) 固定流量

グラフ $\mathcal{E}$ において水源枝を含む広さ優先木³⁾ を張り (Fig. 1(b) の太線)、需要量がすべてこの木枝のみを通して水源から供給されるとした場合の各枝 i の流量を固定流量 a_i と定義する。補木枝の固定流量はすべて0とする。

(3) メッシュとメッシュ流量

メッシュの一般的な定義は、「平面グラフにおいて枝に囲まれ、かつ内部に枝を含まない領域」であるが、ここでは「構成枝の数ができるだけ小さくなるように順次選んだループ（閉路）の組」とする。したがって平面グラフに限らない。Fig. 1(b) では点線で示す二つのループが必要十分なメッシュの組である。

まず、メッシュ行列 $B=[b_{ij}]$ を定義する。行はメ

ッシュを、列は枝を表わし、枝 j がメッシュ i にメッシュの基準方向と同方向に含まれるときは $b_{ij}=1$ 、逆方向に含まれるときは $b_{ij}=-1$ 、その他の場合は $b_{ij}=0$ とする。さらに、メッシュ i に含まれるすべての枝に共通な循環流量を考え、これをメッシュ流量 m_i とする。

このとき、各枝 i の流量 q_i は、固定流量 a_i と枝 i に関係するすべてのメッシュ流量によって

$$q_i = a_i + \sum_{j=1}^{\mu} b_{ij} m_j \quad (1)$$

で与えられる。 μ は独立なメッシュの数である。

(4) 枝特性

水源枝を除く各枝 i の特性を

$$h_i = f_i(q_i) \quad (2)$$

で表わす。ここでは、管路枝に対しては f_i は q_i の 1.85 次式、バルブ枝に対しては q_i の 2 次式を用いる。

また $q_i = q_i^*$ のときの枝 i の変分抵抗 $\bar{r}_i^*$ を

$$\bar{r}_i^* = \partial f_i / \partial q_i |_{q_i = q_i^*} \quad (3)$$

で定義する。水源枝では常に $\bar{r}_i = 0$ である。

(5) 水頭閉合条件

定常流における水頭閉合条件は、電気回路におけるキルヒホフの電圧則に対応するものである。すなわち、各ループに含まれる枝の水頭差の総和が0であることを表わし、メッシュ行列を用いて

$$BH = 0 \quad (4)$$

で与えられる。

3. 拡張設計法（基本的定式化と解法）

3.1 基本概念

まず、筆者らが先に提案した新設設計法^{1,2)}は、つぎの二つの主要なステップからなる。

(1) 流量配分（重み付き流量二乗と最小化法）

配水の信頼性（供給の安定性）を表わす指標

$$\text{最小化 } \sum_i w_i l_i q_i^2 w_i^{-1} \quad (i \text{ は管路枝}) \quad (5)$$

に従って、管網内全管路の流量すなわち管網内の流量パターンを決定する。 w_i は管路 i への流量の集中度を表わす重み係数、 l_i は管路枝 i の長さである。解は1組の連立1次方程式を解くことによって求まる。

(2) 経済設計（規格管線形計画法）

与えられた水源水頭および需要端の圧力条件の下で、(5)式に従って得られた流量パターンを実現し、かつコストを最小とするような規格口径管とポンプ揚程の組合せを求める問題であり、線形計画法またはセパラル・プログラミングの問題となる。

上記の新設設計法の考え方に準拠した拡張設計の考

(a) Network-1 (b) Graph $\mathcal{E}$ of Network-1
Fig. 1 Example of a network and its graph

え方をまとめるとつぎようになる。

既設管がループを構成している場合には、新設設計時は異なって(5)式に従う流量配分を自由に行うことができない。すなわち、既設部分についての水頭閉合条件を満足する必要があるため、流量配分の問題は以下に述べるように等号制約条件付きの非線形最適化問題となる。この解が求まり流量配分が定まると、既設部分については水頭の値がすべて定まる。したがって経済設計は、新設部分について、既設部分との接続点を水源(水頭既知節点)とみなして規格管線形計画法を適用すればよい。

3.2 定式化

既設部分と新設部分をあわせた管網全体について、Fig. 1(b) のようなグラフ G を考える。

まず既設枝だけからなる独立かつ最大数のメッシュの組 η (メッシュ数 μ_η) を求める。ついで新設枝を含む独立なメッシュの組 ξ (メッシュ数 μ_ξ) を探索し、 G 全体の心要十分なメッシュの組を求める。このときメッシュ行列は次のように分割表現できる。

$$\begin{array}{cc} \text{既設枝} & \text{新設枝} \\ \eta \begin{bmatrix} B_{\eta\eta} & 0 \\ B_{\xi\eta} & B_{\xi\xi} \end{bmatrix} & \end{array} \quad (6)$$

また、 η と ξ の分割に対応して $M=[m_i]=[M_\eta, M_\xi]$ (行ベクトル) とする。

このとき、拡張設計時の流量配分問題は

$$(P1) \text{ 最小化 } y(M)=\sum_i w_i^{-1} l_i q_i^2 \quad (7)$$

$$\text{制約 } G(M)=B_{\eta\eta} H_0=0 \quad (8)$$

なる非線形最適化問題となる。 H_0 は既設部分の各枝の水頭差のベクトルである。 q_i と H_0 はいずれも M によって表すことができるから、(P1) の決定変数は M である。

3.3 求解法

(P1) を一般化簡約勾配法 (GRG)⁴⁾ で解く。GRG 法は可能空間内を降下していく方法であるが、以下に述べるように基底変数として M_η 、独立変数として M_ξ を選ぶことにより、可能点の算出がメッシュ流量法による管網計算^{5,6)} に帰着されるという利点がある。また簡約勾配も容易に求まるので求解速度が速い。

(1) 可能点の算出

独立変数 M_ξ の値が与件であるときに、(8)式を満足する M_η すなわち M の可能点を求める問題は、(8)式が η に関する水頭閉合条件であり、また未知変数が M_η であるから、メッシュ流量法による管網計算の問題に他ならない。そして $\partial G/\partial M_\eta$ はこの管網計算における修正方程式の係数行列 (ヤコビ行列: J)^{5,6)}

であり、正定値対称である。つまり、 $\partial G/\partial M_\eta$ が正則であるから M_η は常に基底となりうる。

(2) 簡約勾配

上記のことから y の M_ξ に関する簡約勾配 g は

$$g = \frac{\partial y}{\partial M_\xi} - \frac{\partial y}{\partial M_\eta} \left(\frac{\partial G}{\partial M_\eta} \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial M_\xi} \quad (9)$$

で与えられる。各可能点における $(\partial G/\partial M_\eta)^{-1} = J^{-1}$ は、管網計算によって可能点が求まった時に、同時に求まっている (厳密には収束と判定される 1 回前の値であるが誤差は十分小さい)。つまり、修正方程式の求解をガウスの消去法によって行う際に得られるヤコビ行列の LU 分解の結果を、そのまま利用すればよい。 $(\partial G/\partial M_\eta)^{-1} \cdot \partial G/\partial M_\xi$ の値は、LU 分解の結果を用い、 $\partial G/\partial M_\xi$ の各列について前進消去と後退代入を行えば容易に算出できる。 J 行列のみならず J^{-1} も一般にスパース性が強い。そして例えば IBM 開発のプログラム MSSN および MSNS 等では、 J 行列とともに LU 分解後の結果も非零要素のみを記憶する方式が採用されているので、この計算は極めて高速に実行される。

(3) 降下ステップの決定

目標関数が M の 2 次式であるので、降下ステップの決定は 2 次関数近似で行う。現在の可能点を M_ξ^k 、 M_ξ^k における簡約勾配を g^k とする。また、ステップサイズ θ の関数

$$\phi(\theta) = y(M_\xi^k - \theta g^k, M_\eta^k(\theta)) \quad (10)$$

を考える。ここで $M_\eta^k(\theta)$ は

$$G(M_\xi^k - \theta g^k, M_\eta^k) = 0 \quad (11)$$

の解である。また

$$\phi'(0) = -g^k (g^k)^T < 0 \quad (12)$$

が成立する⁴⁾。 T は行列またはベクトルの転置を表す。適当な θ^k に対して $\phi(\theta^k)$ を計算し、 ϕ を θ の 2 次関数とみなすと、 ϕ を最小化する θ_c は

$$\theta_c = \frac{0.5 (\theta^k)^2 \phi'(0)^T}{\phi(0) + \theta^k \phi'(0) - \phi(\theta^k)} \quad (13)$$

として求まる。

$$M_\xi^{k+1} = M_\xi^k - \theta_c g^k \quad (14)$$

を独立変数 M_ξ の新しい値とする。ただし値の振動を抑止し、収束性の改善をはかるために、 g^{k-1} と g^k で符号が変化した M_ξ の成分 $(M_\xi)_i$ については

$$(M_\xi^{k+1})_i = (M_\xi^k)_i - \theta_c (g^k)_i / 2 \quad (15)$$

とする。

3.4 アルゴリズム

(P1) の求解アルゴリズムを以下にまとめる。

管網計算の収束判定は、各メッシュについての水頭閉合誤差の最大値が $5 \times 10^{-6} \text{m}$ 以下であるとした。

(Step 1: 初期値設定)

- 1.1 $k=0$ とする.
- 1.2 $\theta^0=0.1\sqrt{\mu_k}$ とする (降下ステップ決定用のパラメータ).
- 1.3 M_k^0 の各成分に $0.001\sim 0.003$ の間のすべて異なる初期値を与える.

(Step 2: 初期可能点の計算)

- 2.1 M_k^0 に対する基底変数の値 M_q^0 を管網計算で求める.
- 2.2 $y(M_k^0, M_q^0)$ を計算する.

(Step 3: 現在点 (M_k^1, M_q^1))

- 3.1 $\phi(0)=y(M_k^1, M_q^1)$ とする.
- 3.2 (9)式に従って g^* を計算する.
- 3.3 (12)式に従って $\phi'(0)$ を計算する.

(Step 4: θ の規格化)

- 4.1 $k=0$ のときのみ $\theta^0=\theta^0/|\phi'(0)|$ とする.

(Step 5: 収束判定 1)

- 5.1 $\theta^k g^k$ の各成分 ($\theta^k g^k$): について
 $|\theta^k g^k|_i < 5 \times 10^{-6}, \forall i$
 が成立すれば停止する.

(Step 6: 仮降下点 ($M_k^1 - \theta^k g^k \cdot M_q^1$))

- 6.1 $M_k^1 = M_k^1 - \theta^k g^k$ とし, このときの基底変数の値 M_q^1 を管網計算 (管網計算 1) を行って求める.
- 6.2 $\phi(\theta^k)$ を計算する.

(Step 7: 降下ステップの決定)

- 7.1 (13)式に従って降下ステップ θ_c を定める.

(Step 8: 降下点)

- 8.1 (14)式または(15)式によって独立変数 M_k の新しい値 M_k^{k+1} を定める.
- 8.2 基底変数の値 M_q^{k+1} を管網計算 (管網計算 2) を行って求める.
- 8.3 $y(M_k^{k+1}, M_q^{k+1})$ を計算する.

(Step 9: 収束判定 2)

- 9.1 管網計算 1 および管網計算 2 の反復回数とともに 0 になれば停止する.

(Step 10: θ の変更)

- 10.1 $\theta_c \geq 3$ ならば $\theta^{k+1} = 2\theta^k$,
 $\theta_c \leq 1$ ならば $\theta^{k+1} = \theta^k/2$,
 それ以外ならば $\theta^{k+1} = \theta^k$ とする.

(Step 11: GRG の反復)

- 11.1 $k=k+1$ とし, Step 3 へ戻る.

なお, 管網計算における M_q の初期値として各時点における M_q^0 の値を用いるので, GRG の反復が進むにつれて管網計算の反復回数は減少し, 1 回ついに 0 回で収束するようになる.

4. 拡張設計法 (付加機能)

前章で拡張設計の基本について述べた. 提示された定式化は, 各節点における水頭と流出入量の方が既知, 他方が未知であるという仮定に基づくものであった.

しかし実際の配水系においては, 既存設備の能力限界や水利権による制約が存在すること, あるいは既存設備が新設部分の設計を大きく規定することのために (P1) による求解を行っても, その解が実現不可能となることがある.

このような問題に対処し, より妥当な設計を行うために, 以下のような付加機能考えた. いずれの場合にも, 制約はすべて等号式で現れる. これにより, GRG 法による高速求解の利点を維持しつつ, 各種の問題に対処することが可能になる.

4.1 節点水頭指定機能

Fig. 2 の配水系において (P1) による流量配分を行い, 各管路の流向が同図のように得られたとする. もし節点 6 の水頭が低いと, 全体の水頭最低点である節点 9 の水頭を許容最低値とするために, 両節点間すなわち枝 11 の水頭差を小さくしなければならない. それゆえ, 枝 11 の流量が小さくなければ, 同枝で大口径管が必要となり, コストが上昇する. したがって節点 9 へは枝 11 よりも枝 13 を通した供給の割合を増やすことが望ましい. これを幹線指定の変更によって行うこともできるが, 節点 6 の水頭を適当な値に固定することが, より直接的かつ实际的である. 必要な節点の水頭の値を何通りか設定し, それぞれの流量パターンに対するコストと, 信頼性を代表する $\sum l_i q_i^2$ の値その他を勘案して最良設計値を定める.

(1) 定式化

(P1) の制約条件式として, 水頭固定節点についての条件式

$$G_i(M) = 0 \quad (16)$$

が加わる. (16) 式は, 水源から各水頭固定節点 (τ 個

Fig. 3 Classification of links in some problems

とする)に至る間の木枝経路の損失水頭の和を、水源水頭から差し引いた値が、各固定水頭値に等しいことを示す τ 本の等号式である。

(8)式と(16)式をまとめて

$$G^*(M) = \begin{bmatrix} G(M) \\ G_1(M) \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

と書く。

(2) 求解法

(7)式を目的関数、(17)式を制約条件式とする非線形最適化問題を(P1)と同様にGRG法で解く。制約式が τ 本増えたので、基底変数として M_q に加えて M_k のうち既設枝に関係する適当な τ 個を選び、両者をまとめて M_q^* と書く。また残りの独立変数を M_k^* で表す。したがって、 τ は既設枝と新設枝の両方に関係するメッシュ数以下でなければならない。

$\partial G^*/\partial M_q^*$ の各要素は以下のように与えられる。

(i, i) ($i \leq \mu$): メッシュ i に含まれるすべての枝の変分抵抗の総和。

(i, j) ($i \leq \mu, i \neq j$): メッシュ i とメッシュ j に共通に含まれる枝の変分抵抗の和に、それらの枝が両メッシュに同方向に含まれるときは正、逆方向に含まれるときは負の符号を付けたもの。

(i, j) ($i \geq \mu+1$): 木枝経路 $T_{(i-\mu)}$ とメッシュ j に共通に含まれる枝の変分抵抗の和に、それらの枝が木枝経路 i とメッシュ j に同方向に含まれるときは正、逆方向に含まれるときは負の符号を付けたもの。

したがって $\partial G^*/\partial M_q^*$ は対称行列ではなくなる。しかし、広さ優先木を用い、水源から各需要節点へは最短経路を選んでいるので、 $(\mu+1)$ 行以下についてもスパース性はある程度高く、行列全体としてはやはり

Table 1 Classification of links

枝分類	水頭差	流量	枝特性	枝数
E_b	○	○	○	n_b
E_e	○	×	×	n_e
E_j	×	○	×	n_j
E_u	×	×	×	n_u
E_k	×	×	○	n_k

(○: 既知, ×: 未知)

スパースである。この行列が正則であるための条件は4.3節に述べる。

4.2 流量指定

既設水源においては、水頭が既知であるとともに、水利権や既存設備の能力によって供給可能量が制限されることが多い。そして、複数水源を有する系に対して(P1)を解いた場合に、得られた水源間の流量分担が、この制約を満足しないことがある。この状況に対処するためには、水源流量 q_i を指定する等式

$$q_i(M) = q_i^* \quad (\text{指定値}) \quad (18)$$

を制約条件として加えればよい。求解は前節と同様に行う。その他、任意の枝流量についても同様の指定が可能である。

4.3 流量配分問題の可解性

節点水頭および流量が指定された問題が、求解可能であるための条件を以下に述べる。これは線形能動回路網の可診断性に関する理論の応用である⁹⁾。

対象管網を、水源および需要端をすべて基準節点に接続する枝で表わす閉じた型のグラフ E^* で考える。そのとき、基準節点接続枝の水頭差および流量は、対応する各節点の水頭および流出入量にはかならない。

Fig. 3(a)の管網の E^* を(b)に示す。 E^* の各枝を、その水頭差、流量および特性値が既知(指定)か

Fig. 4 Examples

否かによって **Table 1** のように、 E_b から E_k までに分類する。水源水頭、節点需要量および既設管の特性値を既知とする (P1) の問題のグラフ枝は (c)、節点 1 の水頭を指定する問題については (d)、さらに節点 2 の水頭を指定する問題については (e) のように分類される。

(1) 流量グラフと水頭グラフ

E^* から E_j と E_b の枝を開放除去し、 E_e と E_u の枝を短絡除去して得られるグラフを E_k に関する流量グラフ E_{qk} 、 E^* から E_j と E_u の枝を開放除去し、 E_e と E_b の枝を短絡除去して得られるグラフを E_k に関する水頭グラフ E_{hk} と呼ぶ。

(2) 流量配分問題が可解であるための位相幾何学的必要条件

E_{qk} の木枝がすべて E_{hk} の木に含まれるような木の対が存在すること、が必要条件である。

Fig. 3 (c)~(e) の E_{qk} と E_{hk} を (c)'~(e)' に示す。(c) と (d) は可解であるが、(e) では特別な水頭指定値の組み合わせ以外は可解でない。

5. 例題

まず、Fig. 2 の管網において水源 s の水頭を 40 m、既設管 1~8 (管路長はすべて 100 m、流速係数 120) の口径 [mm] をそれぞれ 600, 450, 350, 450, 350, 250, 350, 300、各節点流出量を $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ 、すべての w_i の値を 1 として (P1) の配分計算を行った結果を Fig. 4(a) に示す。新設設計時には流量が右上と左下で対称となるのに対し、既設部分の水頭閉合条件を満たす必要上、対称でなくなっている。

(b) はさらに節点 6 の水頭を 25.5 m に固定した結果である。節点 9 の流出量の 7 割以上が枝 13 の側から供給されるようになった。

つぎに、Fig. 5 に示す大規模管網について (P1) を解いた (解の精度を検証するために左右対称の管網を用いた)。基底変数は 62 個、独立変数は 24 個である。

Fig. 5 Example of a large-scale network

管網計算における連立 1 次方程式の求解は計 112 回 (1,100 ms)、GRG の反復は 23 回 (90 ms)、その他、入出力時間を加えて 1,580 ms (FACOM-M382) で解が求まった。水源 1 と水源 2 の流量はそれぞれ 0.55803 と $0.55801 \text{ m}^3/\text{s}$ であり、十分な精度の解となっている。

より大規模な管網についても、メッシュ流量法による大規模管網計算の所要時間⁶⁾や、GRG の反復が進めば、管網計算が各 1 回で収束するという事実を考えると、十分実用的な時間で解が求まると予想できる。

6. おわりに

以上、筆者らが先に提案した配水管網の新設設計法の考え方に基づく拡張設計法について述べた。

主な変更点は流量配分のステップが等号制約条件付きの非線形計画問題となることである。これについて、メッシュ流量を変数を選んで簡潔な定式化を行い、また、そのスパース性に着目して高速求解を実現した。

なお、本論文ではすべて節点取出しモデル^{1),2)}で説明を行ったが、管路取出しモデルにもすべて適用することができる。

参考文献

- 1) 西川, 宇土: かんがい用配水ネットワークの解析と設計, 電気学会論文誌 C, **104**-1, 9/12 (1984)
- 2) 西川, 宇土: 信頼性を考慮した配水管網の最適設計法, 水道協会雑誌, **53**-5, 2/12 (1984)
- 3) N. Deo: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall (1974)
- 4) J. Abadie: Integer and Nonlinear Programming Chapter 8, North-Holland (1970)
- 5) 西川, 宇土: 配水ネットワークにおける拡張定常流計算の基礎と基本定常流計算の総合的考察, 電気学会論文誌 C, **104**-6, 1/8 (1984)
- 6) 西川, 宇土: 大規模管網計算の高速化と管路取出しモデルによる高精度化, 水道協会雑誌 **53**-12, 2/12 (1984)
- 7) IBM: System/360 and System/370, Subroutine Library-Mathematics, User's Guide (1975)
- 8) T. Ozawa and Y. Kajitani: Diagnosability of Linear Active Networks, IEEE. Trans. **CAS** **26**-7, 485/489 (1979)